Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2020/21

22. Vorlesung

Dynamisches Programmieren

Prof. Dr. Alexander Wolff

Lehrstuhl für Informatik I

Entwurfstechniken

Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert

Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert

neu:

Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert

neu:

- Dynamisches Programmieren

Entwurfstechniken

- Inkrementell
- Rekursiv
- Teile und Herrsche
- Randomisiert

neu:

meint hier das Arbeiten mit einer Tabelle,
nicht das Schreiben eines Computerprogramms.

- Dynamisches Programmieren

Vergleich

Teile und Herrsche **Dynamisches Programmieren**

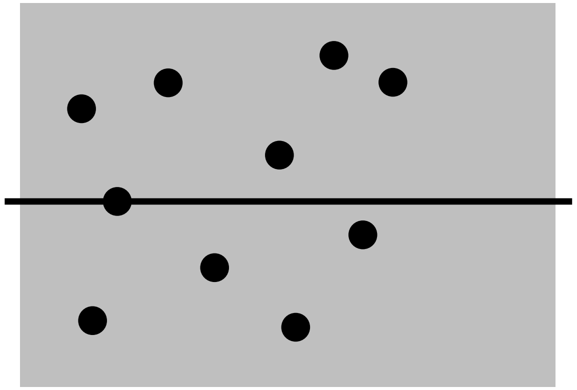
Vergleich

Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

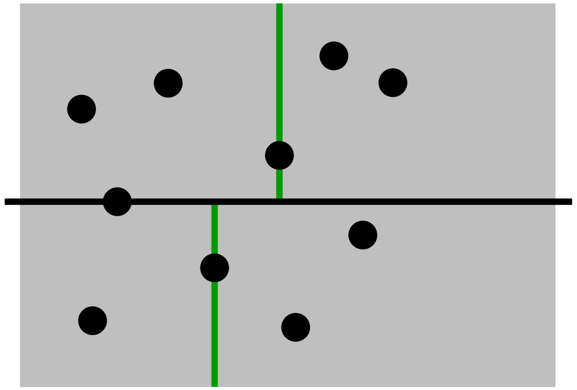


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

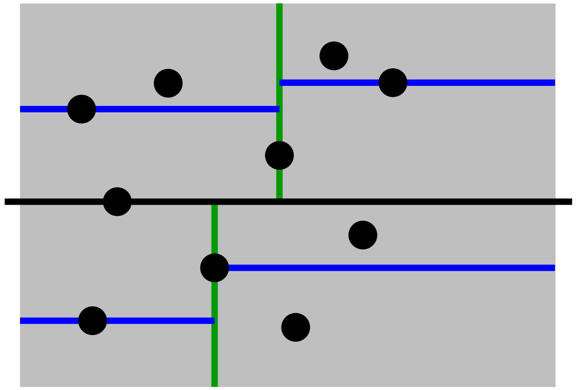


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

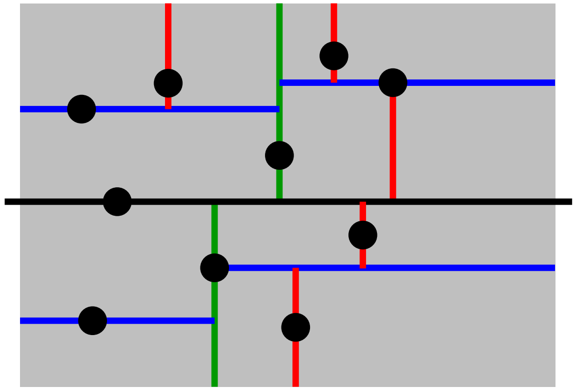


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich

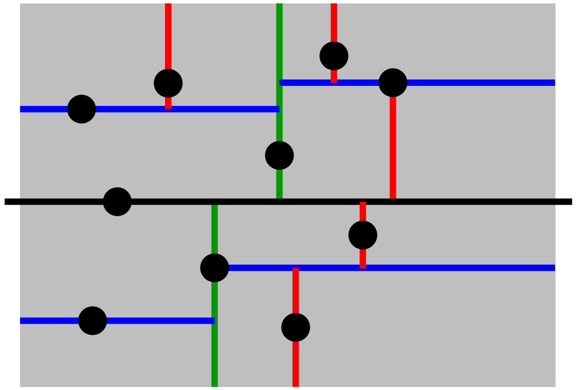


Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

Vergleich



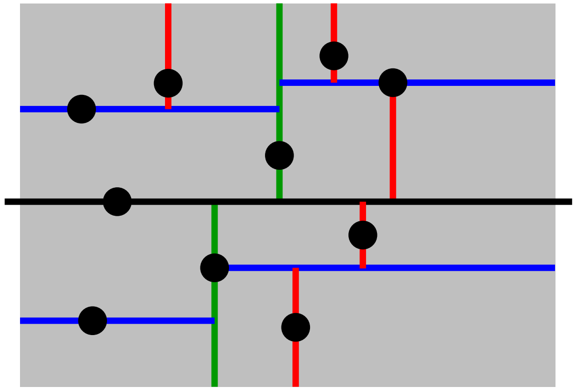
Teile und Herrsche

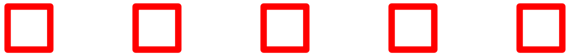
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich





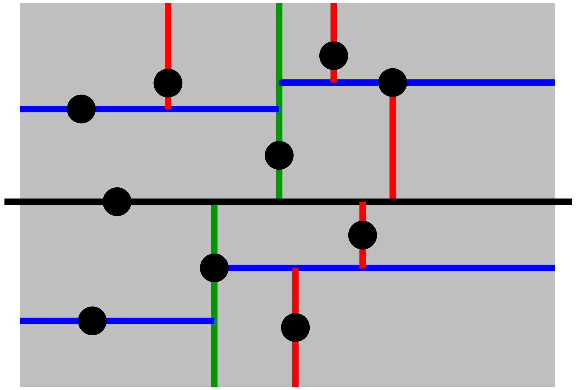
Teile und Herrsche

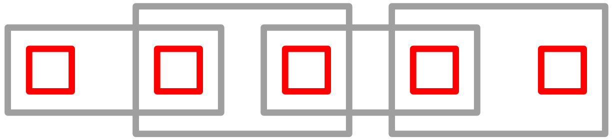
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich





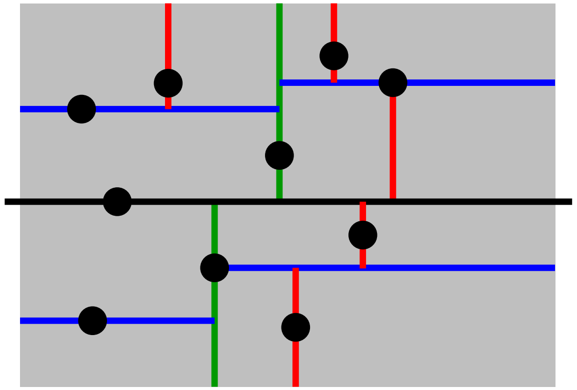
Teile und Herrsche

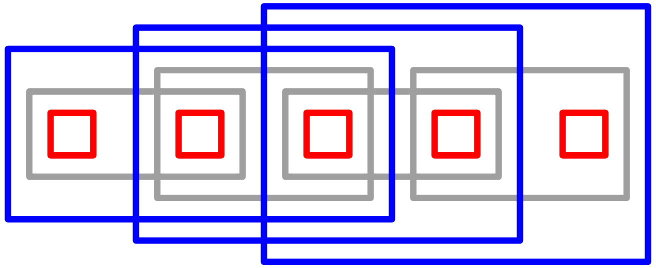
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich





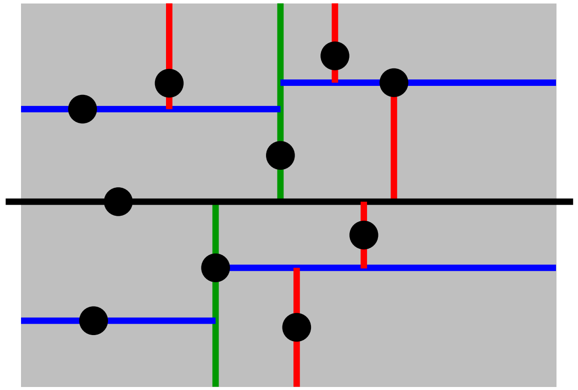
Teile und Herrsche

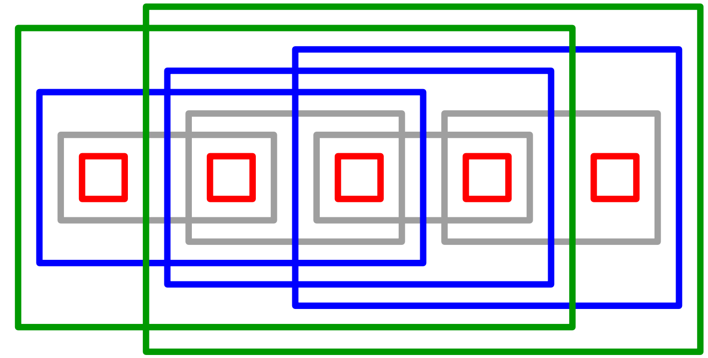
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich





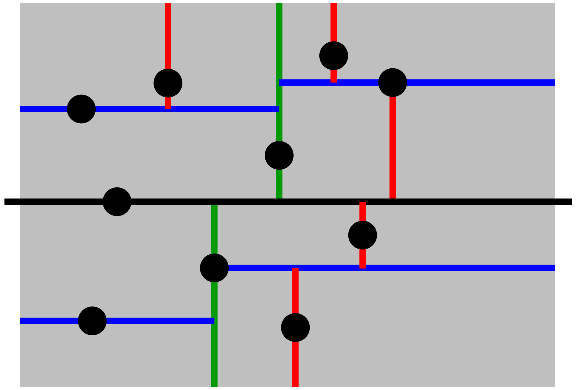
Teile und Herrsche

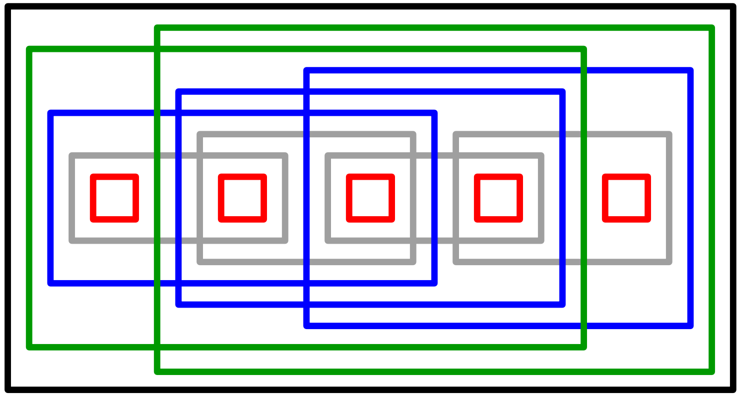
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich





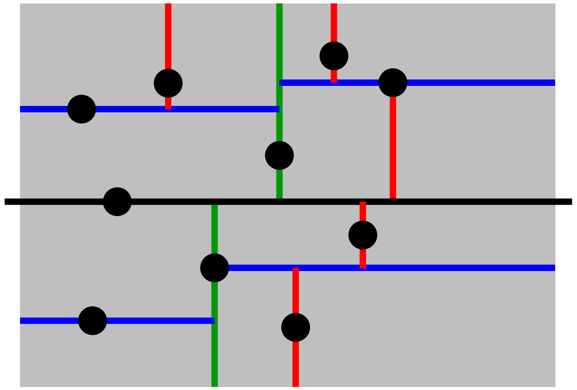
Teile und Herrsche

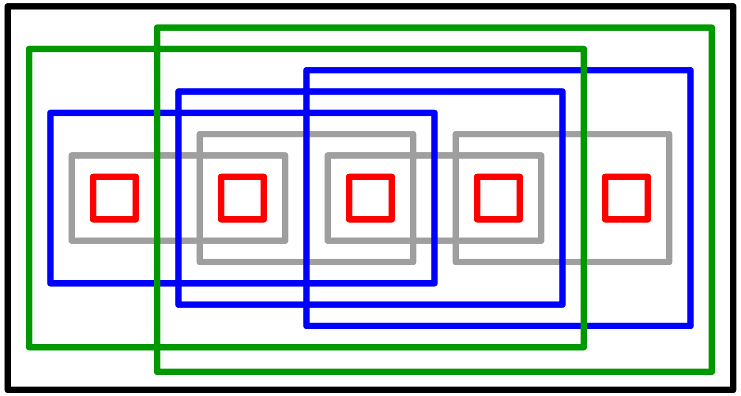
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen

Vergleich





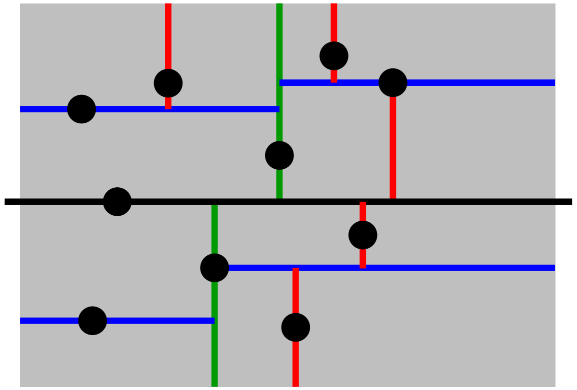
Teile und Herrsche

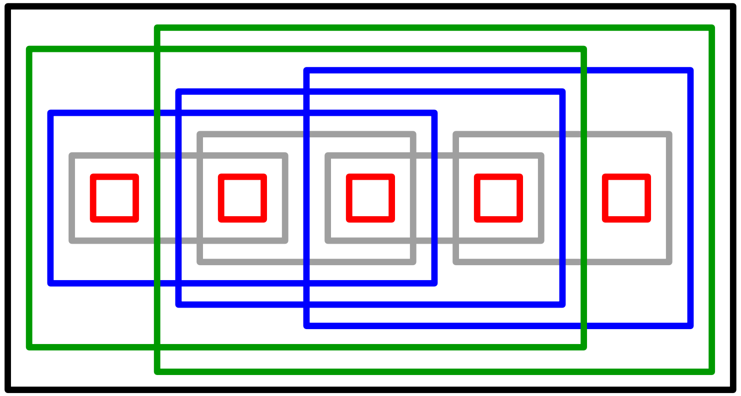
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen.

Vergleich





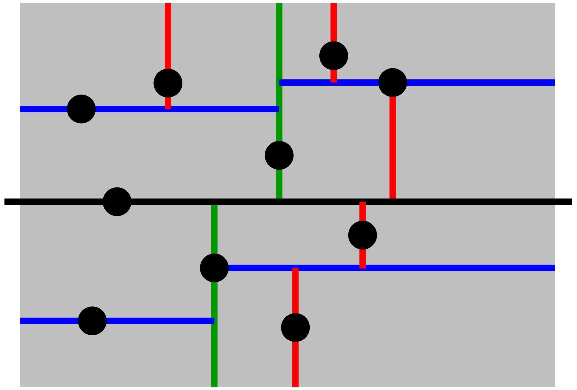
Teile und Herrsche

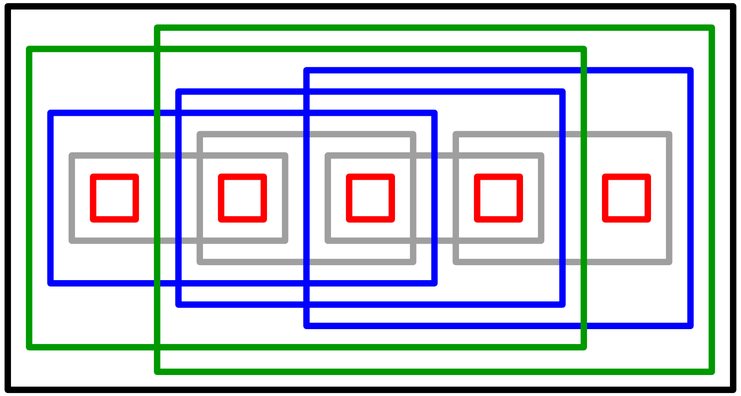
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.

Vergleich





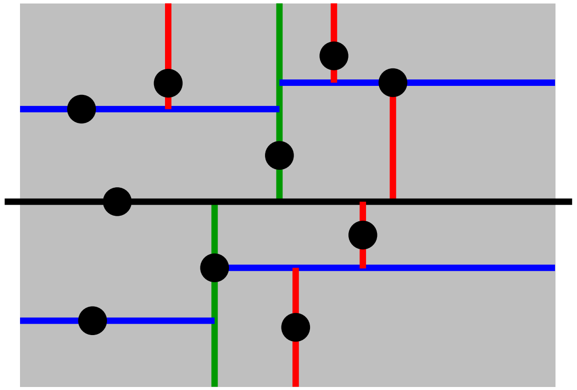
Teile und Herrsche

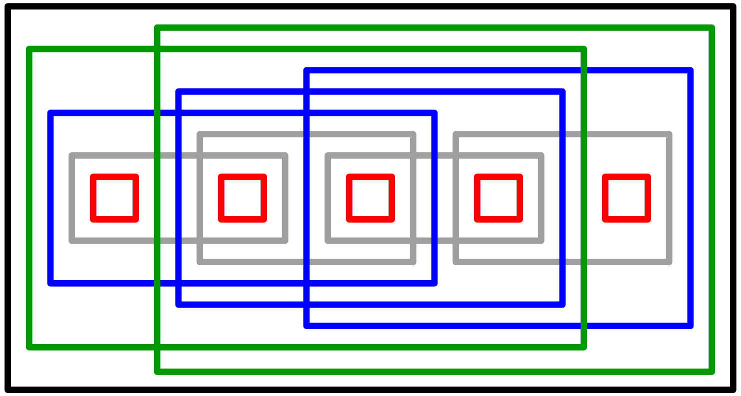
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.

Vergleich





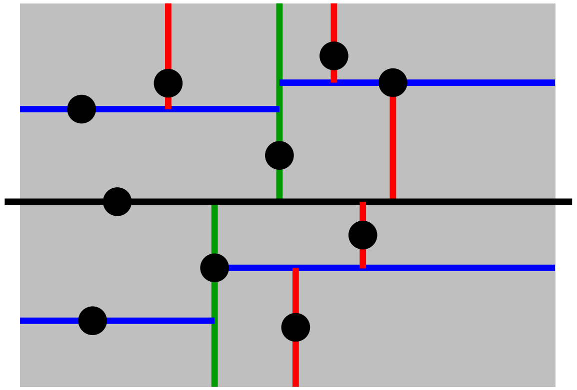
Teile und Herrsche

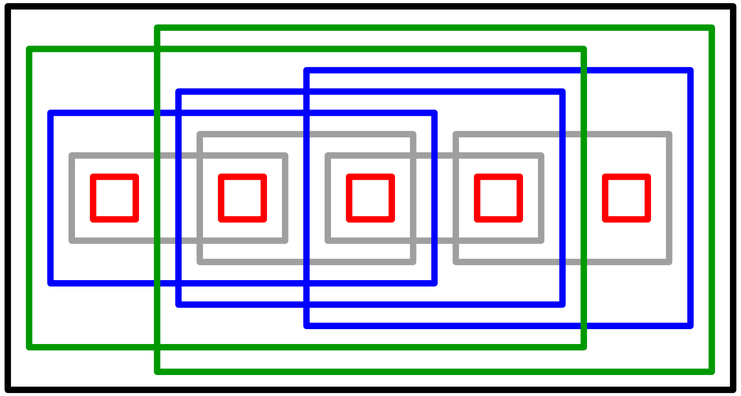
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.
- meist bottom-up

Vergleich





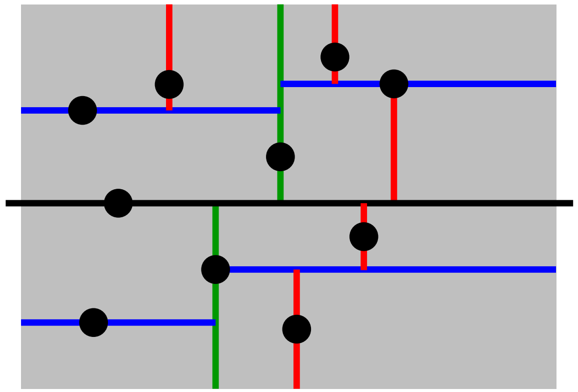
Teile und Herrsche

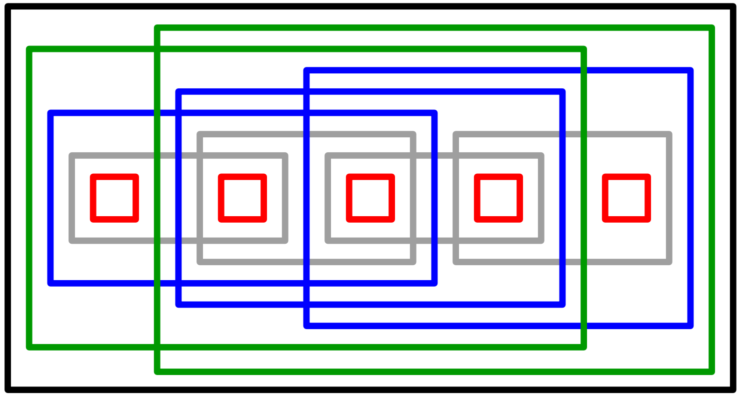
- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down
- eher für Entscheidungs- oder Berechnungsprobleme

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.
- meist bottom-up

Vergleich





Teile und Herrsche

- zerlegt Instanz rekursiv in *disjunkte* Teilinstanzen
- top-down
- eher für Entscheidungs- oder Berechnungsprobleme

Dynamisches Programmieren

- zerlegt Instanz in *überlappende* Teilinstanzen, d.h. Teilinstanzen haben z.T. dieselben Teilteilinstanzen. Lösungen von Teilinstanzen werden zwischengespeichert, nicht neu berechnet.
- meist bottom-up
- meist für Optimierungsprobleme

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)
4. Optimale Lösung aus berechneter Information konstruieren

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)
4. Optimale Lösung aus berechneter Information konstruieren

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

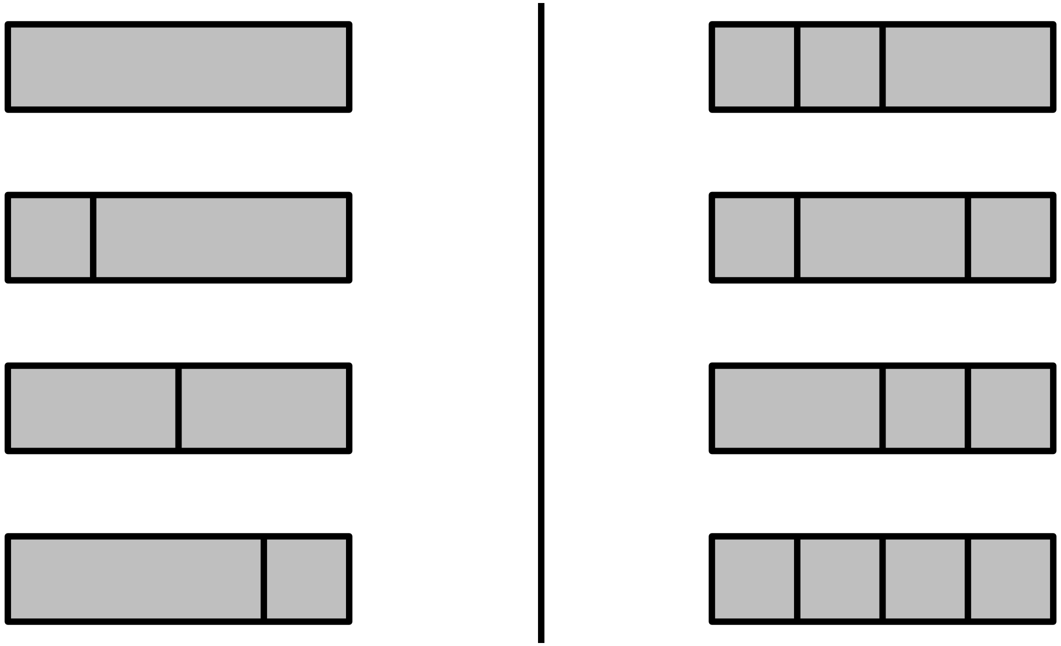
Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?

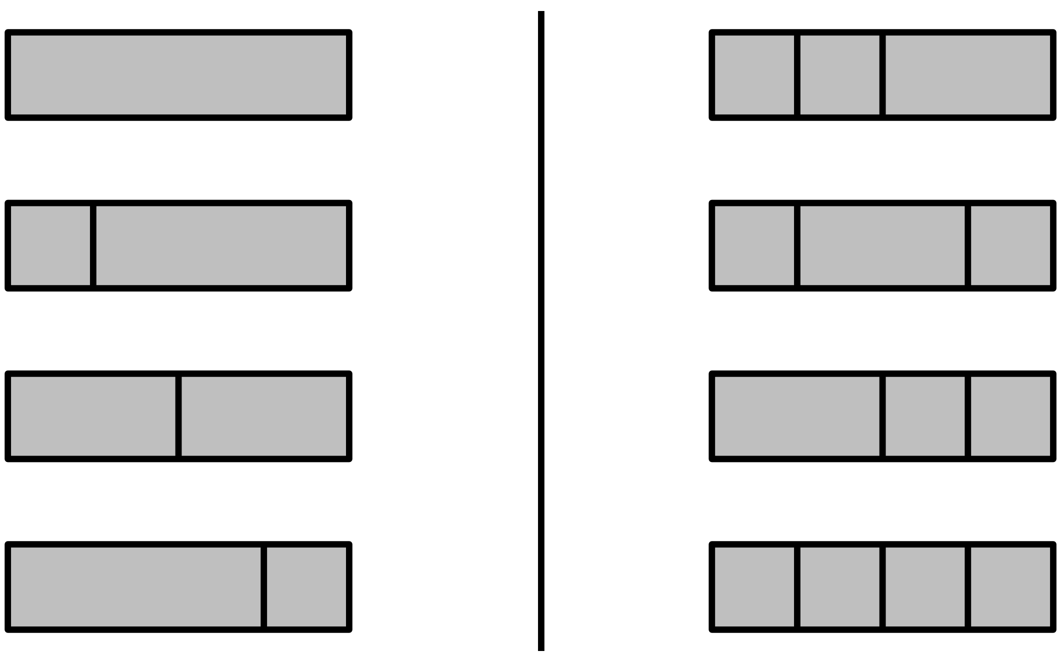


Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?



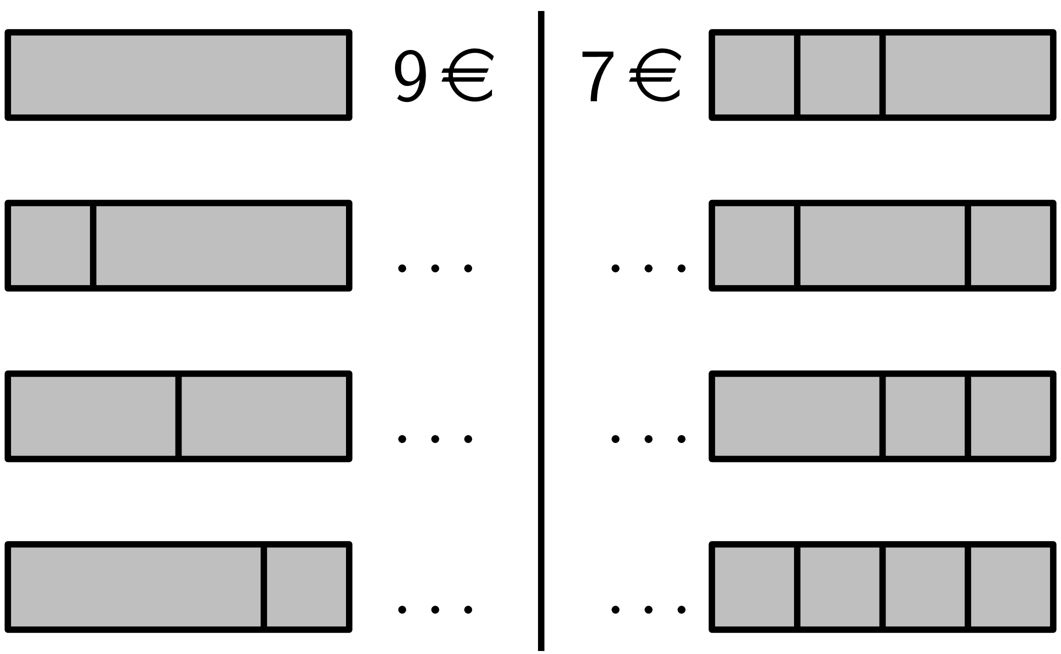
Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?



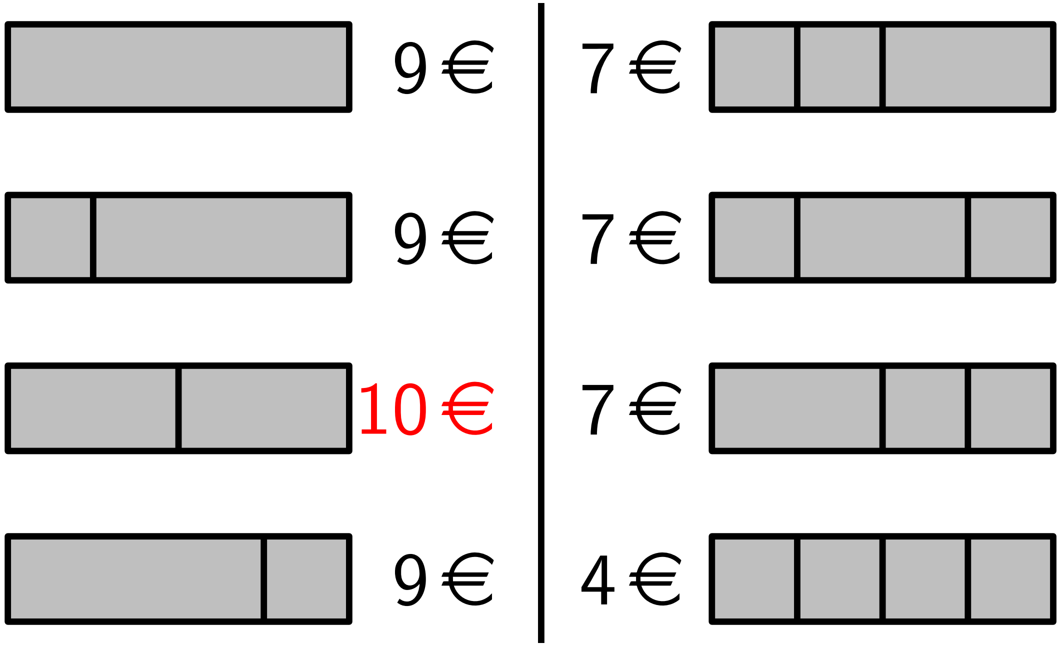
Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Ein Beispiel

Zerlegungsproblem

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \dots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \dots, n$.

Durch welche Zerlegung unseres Stabs können wir unseren Ertrag maximieren?



Länge i	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9
Quotient [€/m]	1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Ein ADSler schlägt folgenden Greedy-Algorithmus vor:

- Berechne für $i = 1, \ldots, n$ den Preis pro Meter $q_i = p_i / i$.
- Zerlege Stab in möglichst viele Stücke der Länge i mit q_i max.
- Streiche alle Stablängen $\geq i$ aus der Tabelle und wiederhole den Prozess mit dem Stabrest (falls > 0).

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9
Quotient [€/m]	1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Ein ADSler schlägt folgenden Greedy-Algorithmus vor:

- Berechne für $i = 1, \ldots, n$ den Preis pro Meter $q_i = p_i / i$.
- Zerlege Stab in möglichst viele Stücke der Länge i mit q_i max.
- Streiche alle Stablängen $\geq i$ aus der Tabelle und wiederhole den Prozess mit dem Stabrest (falls > 0).

Liefert dieser Greedy-Algorithmus immer das Optimum?

Ein erster Versuch

Wir haben einen Stab der Länge n und kennen die Preise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für Stäbe der Längen $1, 2, \ldots, n$.

Beispiel: $n = 4$

Länge i [in m]	1	2	3	4
Preis p_i [in €]	1	5	8	9
Quotient [€/m]	1	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$

Welche Stabzerlegung maximiert den Ertrag?

Ein ADSler schlägt folgenden Greedy-Algorithmus vor:

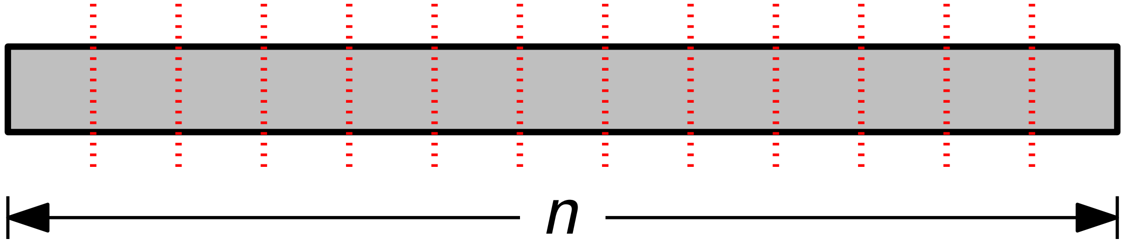
- Berechne für $i = 1, \ldots, n$ den Preis pro Meter $q_i = p_i / i$.
- Zerlege Stab in möglichst viele Stücke der Länge i mit q_i max.
- Streiche alle Stablängen $\geq i$ aus der Tabelle und wiederhole den Prozess mit dem Stabrest (falls > 0).

Liefert dieser Greedy-Algorithmus immer das Optimum?

Ja? Beweisen! Nein? Gegenbeispiel!

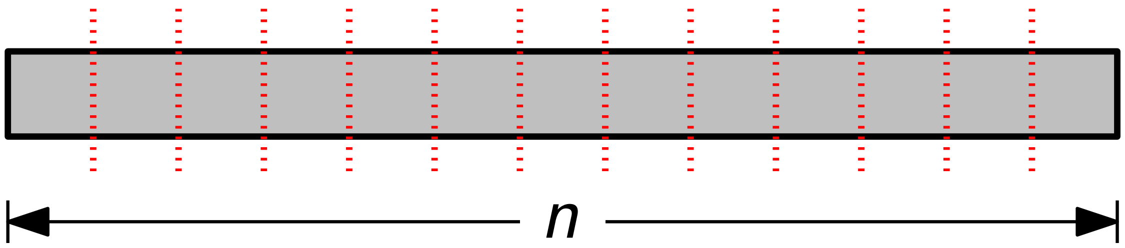
Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Rohe Gewalt

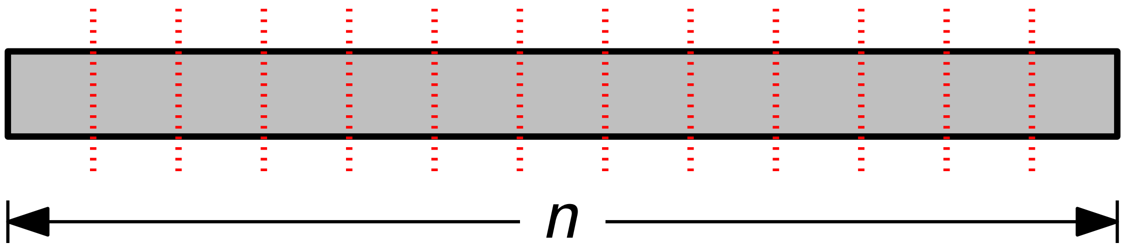
Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.

Rohe Gewalt

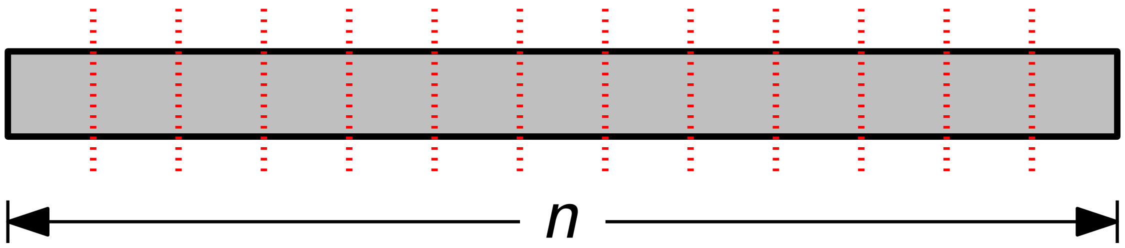
Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n-1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow$ 2^{n-1} verschiedene Zerlegungen

Rohe Gewalt

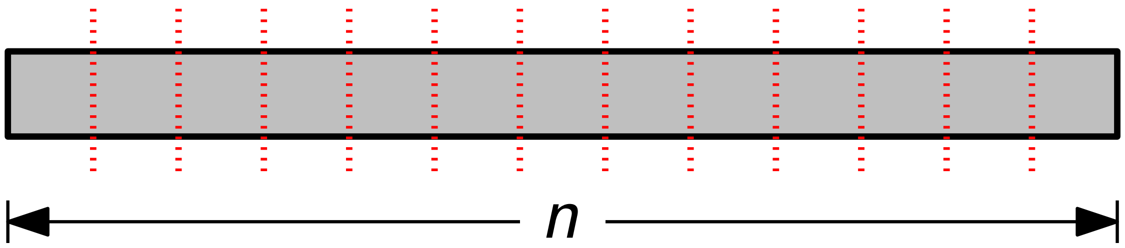
Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n-1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow$ 2^{n-1} verschiedene Zerlegungen

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?

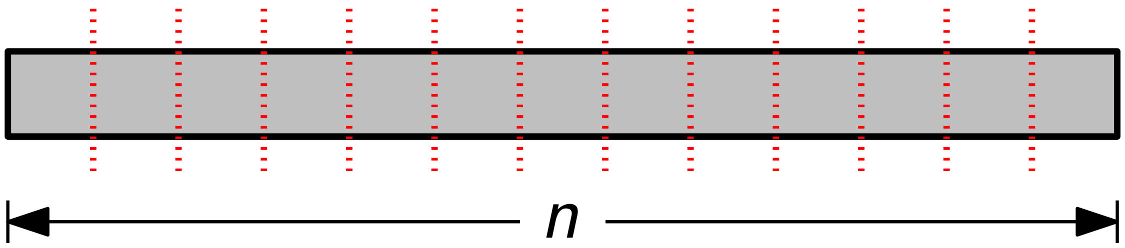


Antw.: Können $n-1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow$ 2^{n-1} verschiedene Zerlegungen

Oh, mein Gott!
Das ist ja **exponentiell!**

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?

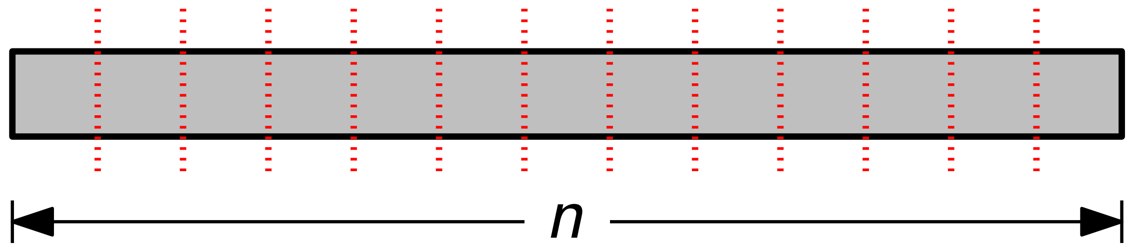


Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow$ 2^{n-1} verschiedene Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



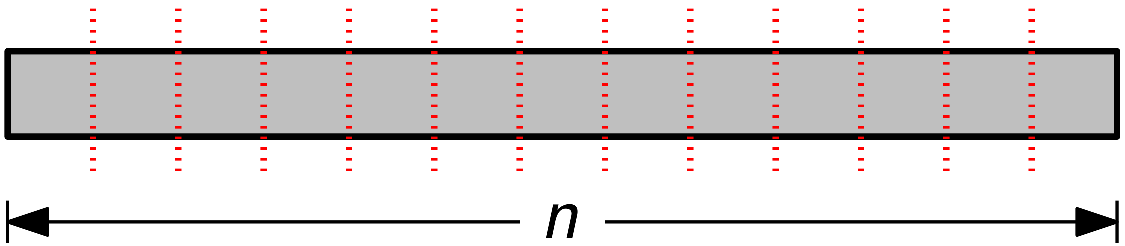
Antw.: Können $n - 1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow 2^{n-1}$ verschiedene* Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

*) Genauer: die gesuchte Anzahl ist die Anzahl $p(n)$ der *Partitionen* der Zahl n, die angibt, auf wie viele Arten man n als Summe von natürlichen Zahlen schreiben kann. Es gilt $p(n) \approx e^{\pi\sqrt{2n/3}} \big/ (4n\sqrt{3})$

Rohe Gewalt

Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es einen Stab der Länge n zu zerlegen?



Antw.: Können $n-1$ mal entscheiden: *schneiden* oder *nicht*.
$\Rightarrow$ 2^{n-1} verschiedene* Zerlegungen

Also können wir es uns nicht leisten alle Zerlegungen durchzugehen und für jede ihren Ertrag zu berechnen.

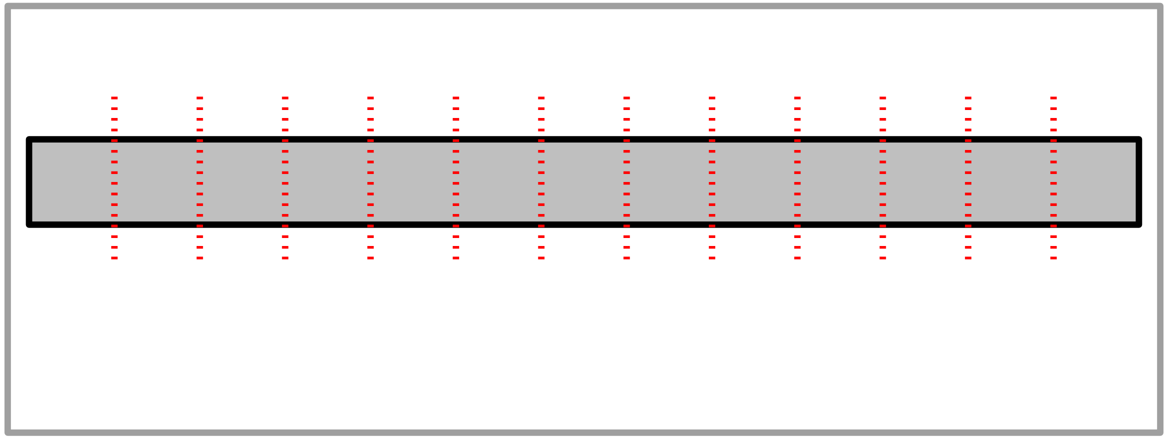
*) Genauer: die gesuchte Anzahl ist die Anzahl $p(n)$ der *Partitionen* der Zahl n, die angibt, auf wie viele Arten man n als Summe von natürlichen Zahlen schreiben kann. Es gilt $p(n) \approx e^{\pi\sqrt{2n/3}} \big/ (4n\sqrt{3}) \in \Theta^*\big((13{,}00195\ldots)^{\sqrt{n}}\big)$.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.

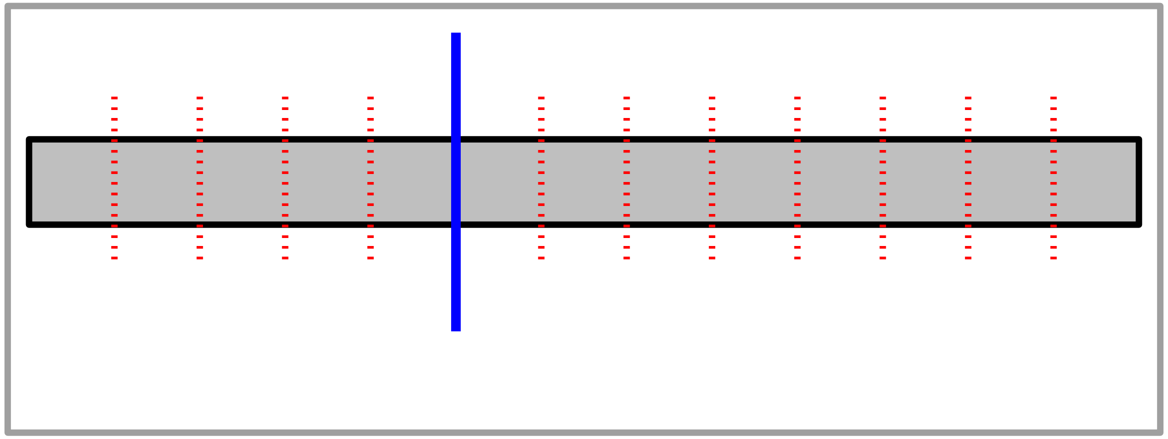
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



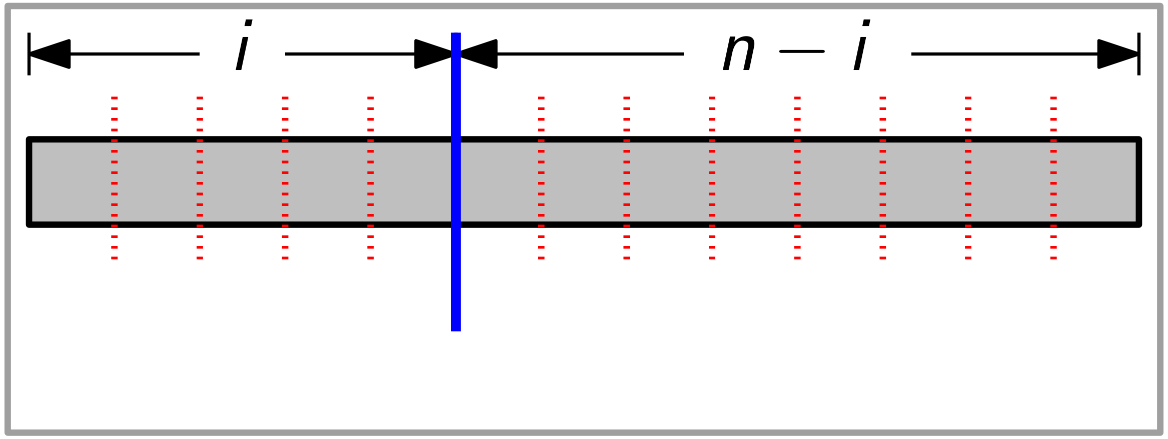
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



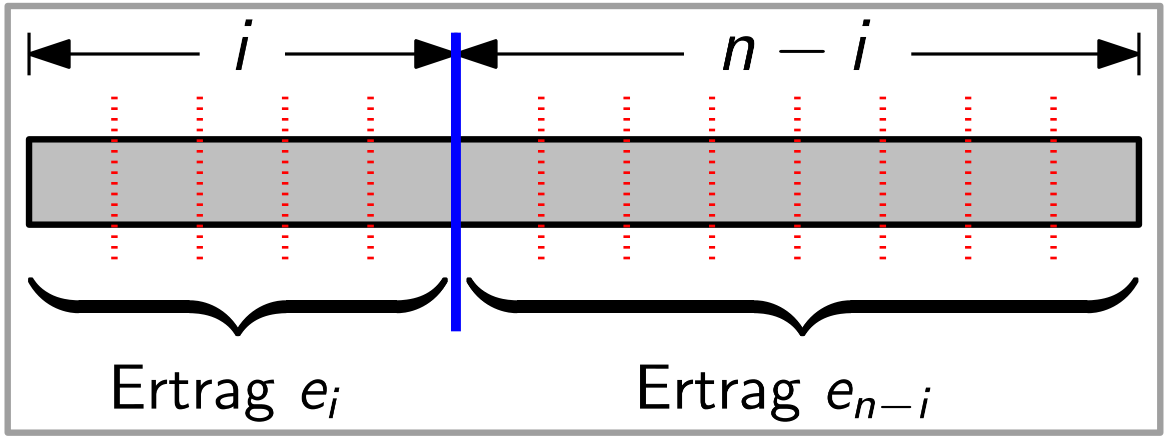
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



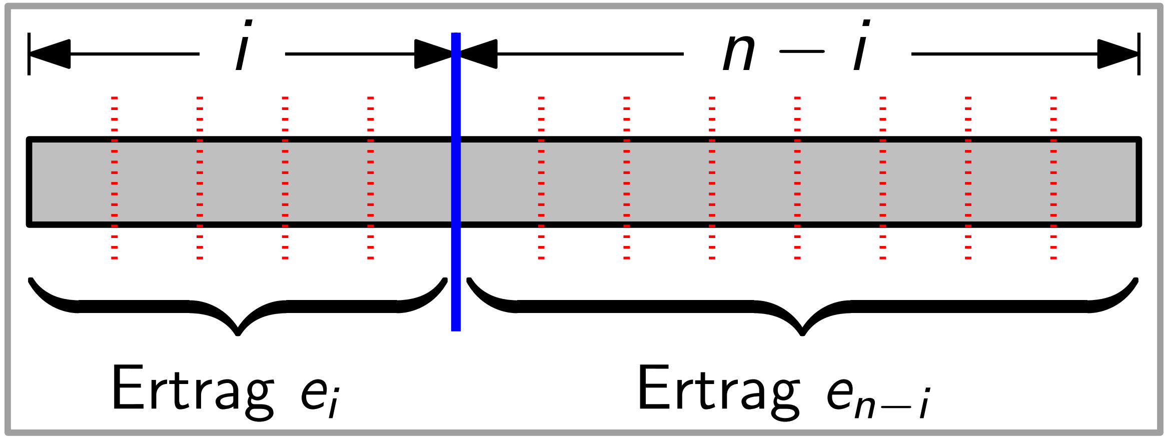
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

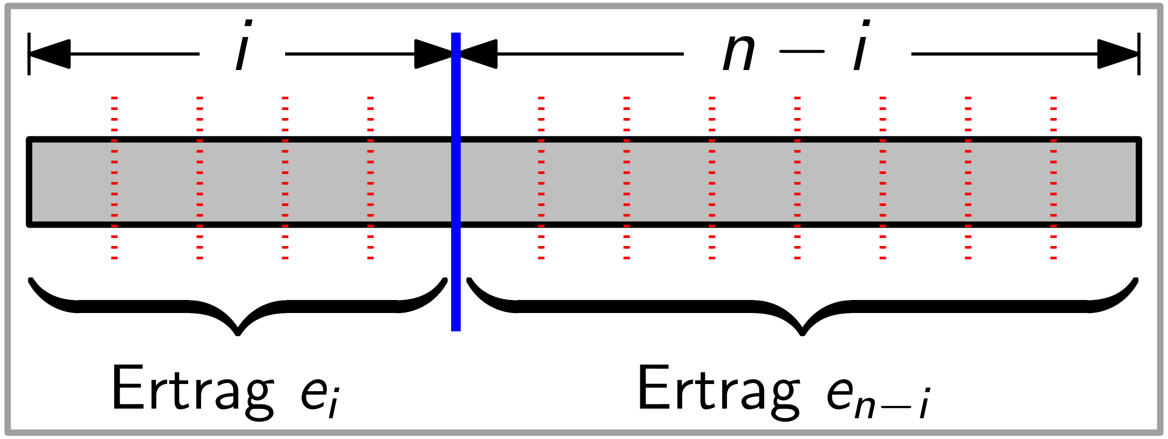
Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.

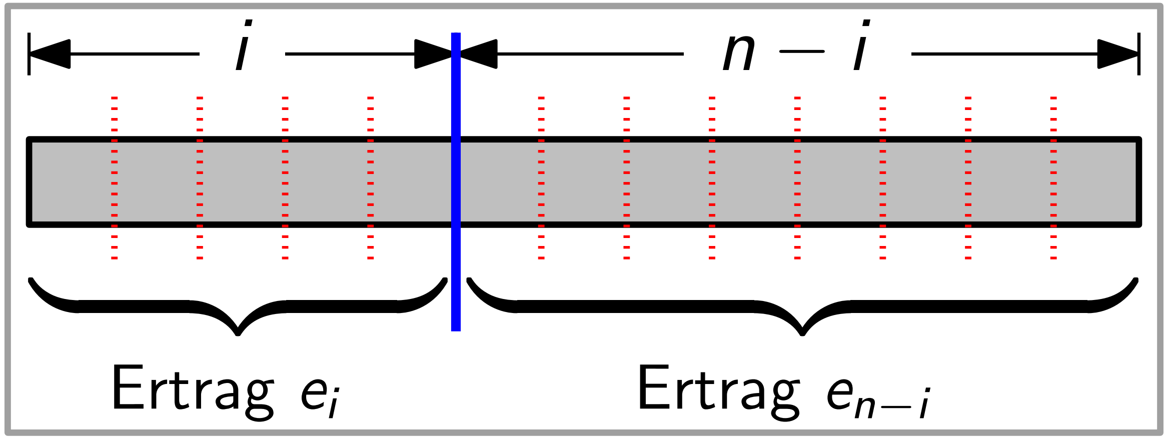


Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



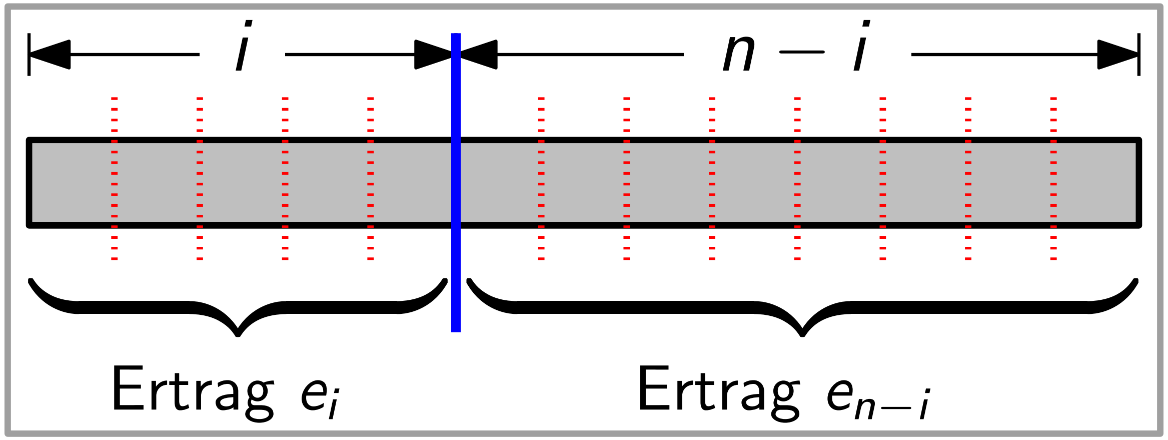
Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

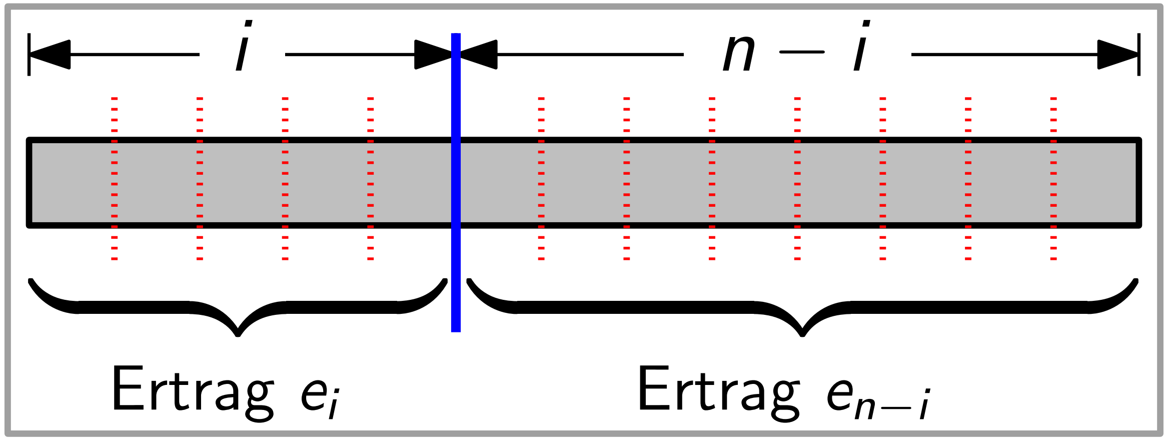
Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

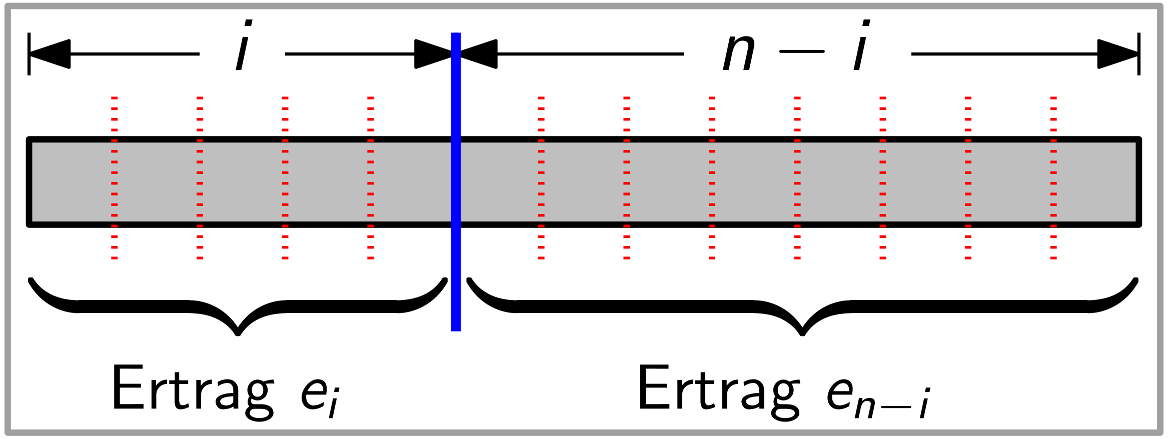
Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

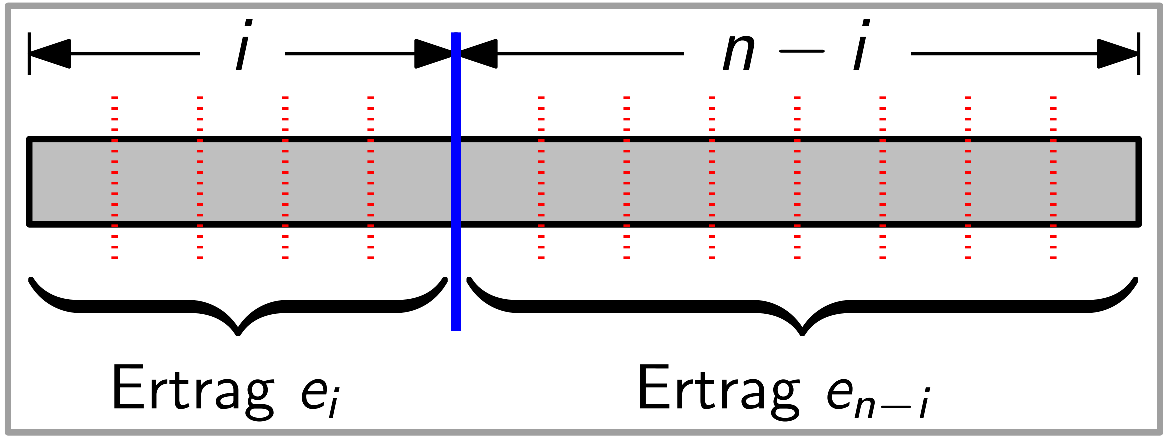
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

$e_n =$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

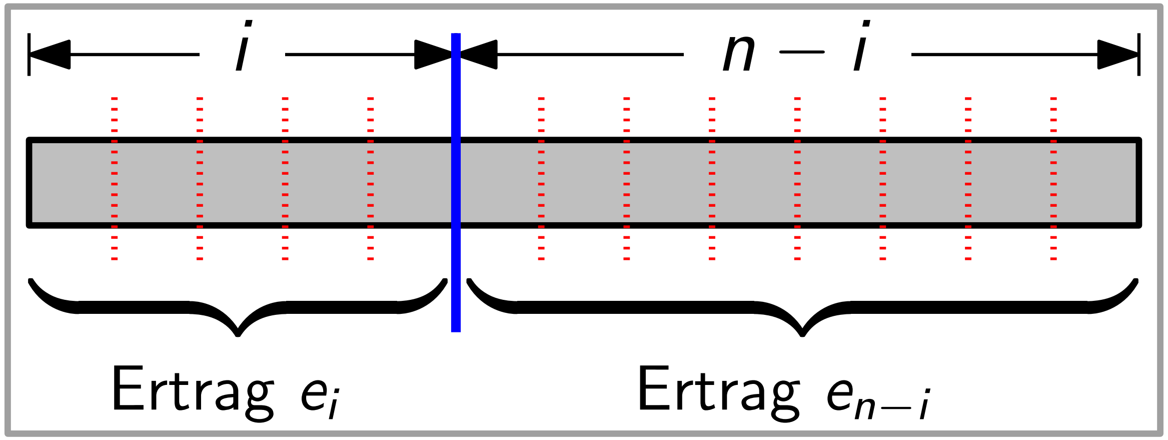
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max\{ \qquad \}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

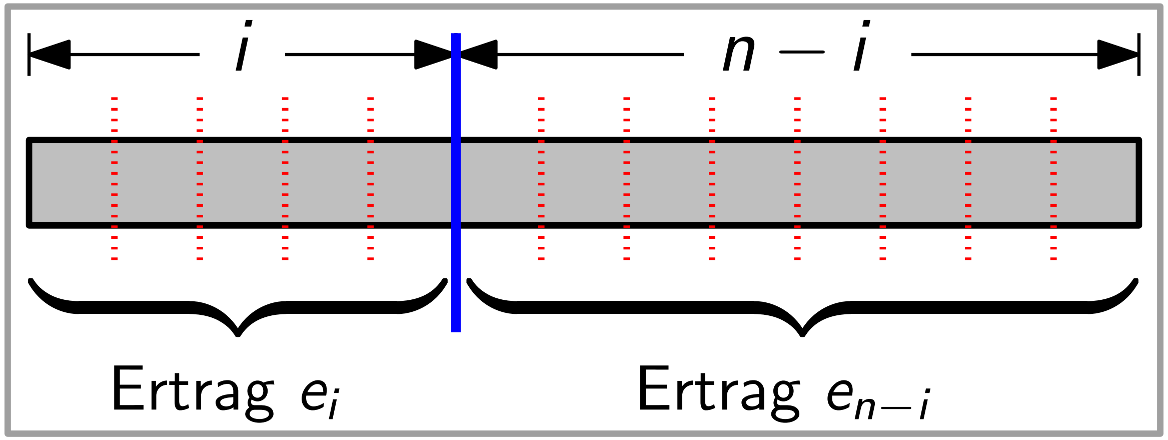
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max\{\ p_n, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

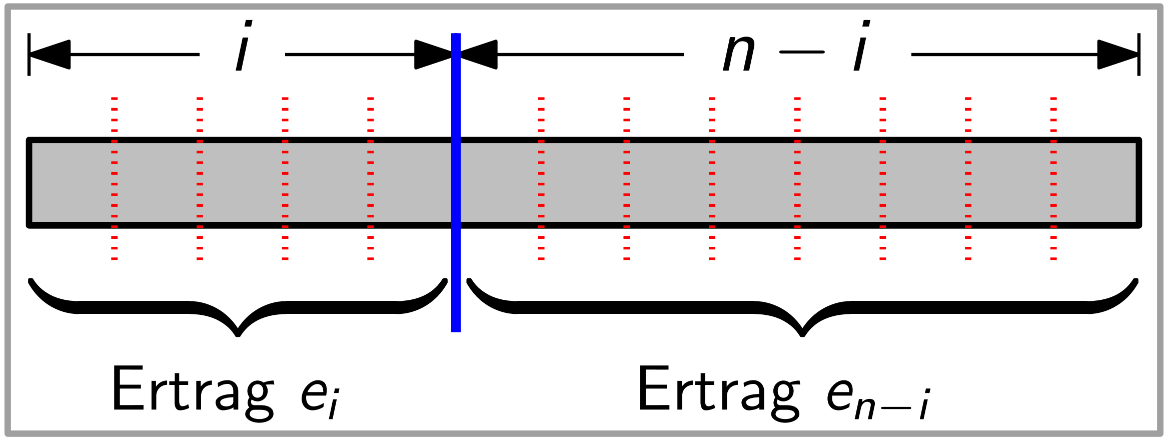
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1}, \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

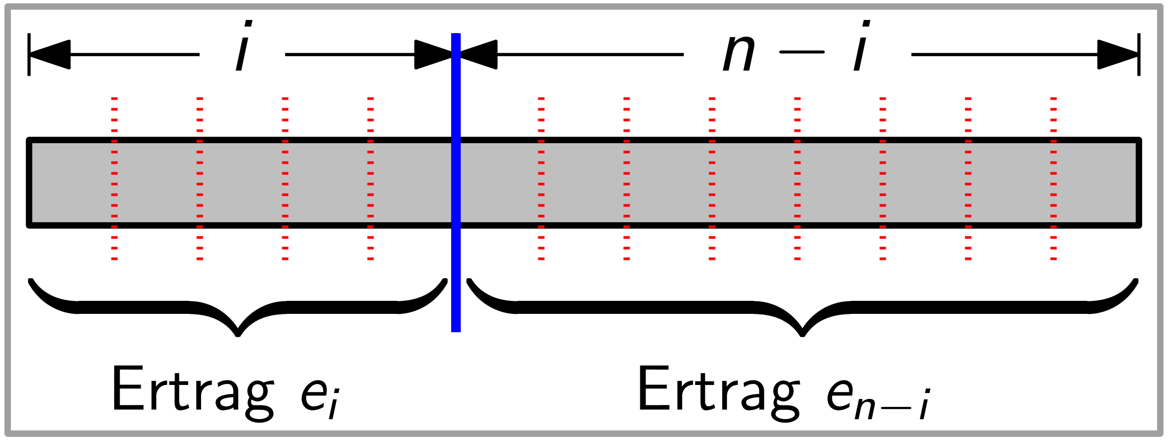
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \dots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

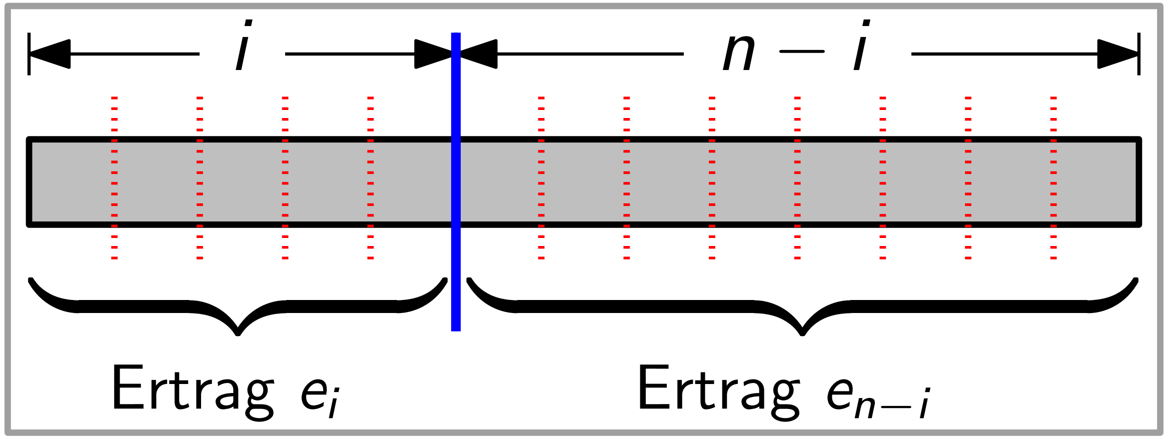
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max\{\ p_n,\quad e_1 + e_{n-1},\quad e_2 + e_{n-2},\quad \dots, \qquad\qquad \}$$

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren

Def. Für $i = 1, \ldots, n$
sei e_i der maximale Ertrag für einen Stab der Länge i.



Phänomen der *optimalen Teilstruktur*!

Beob. Ein Schnitt zerlegt das Problem in *unabh.* Teilprobleme.

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Wissen nicht, *welcher* Schnitt in einer opt. Lösung vorkommt.
Also probieren wir einfach *alle* möglichen Schnitte aus:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

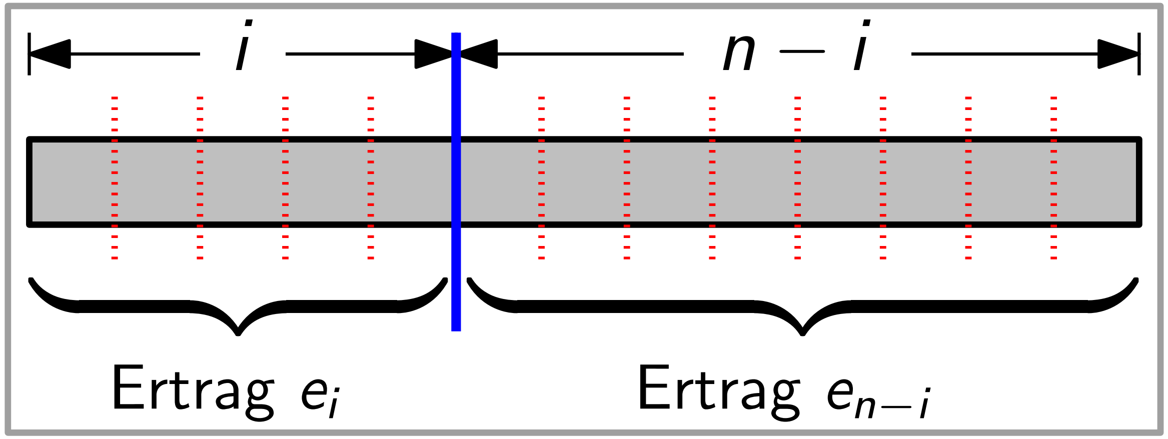
$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

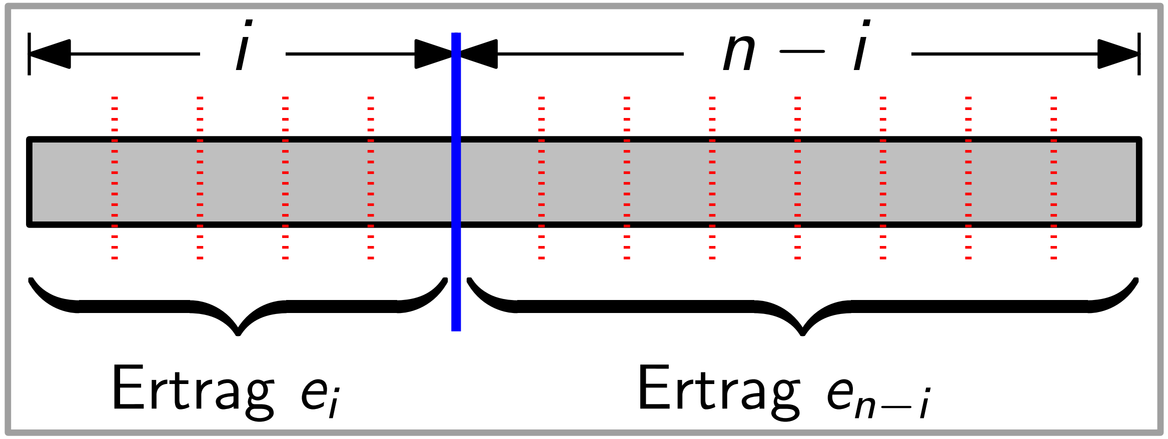


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!

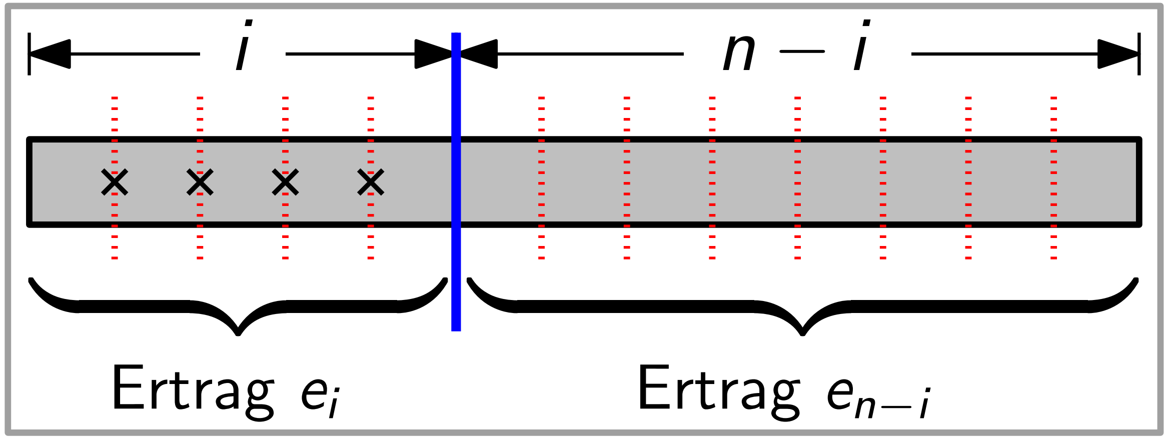


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\; p_n,\quad e_1 + e_{n-1},\quad e_2 + e_{n-2},\quad \dots,\quad e_{n-1} + e_1 \;\}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!

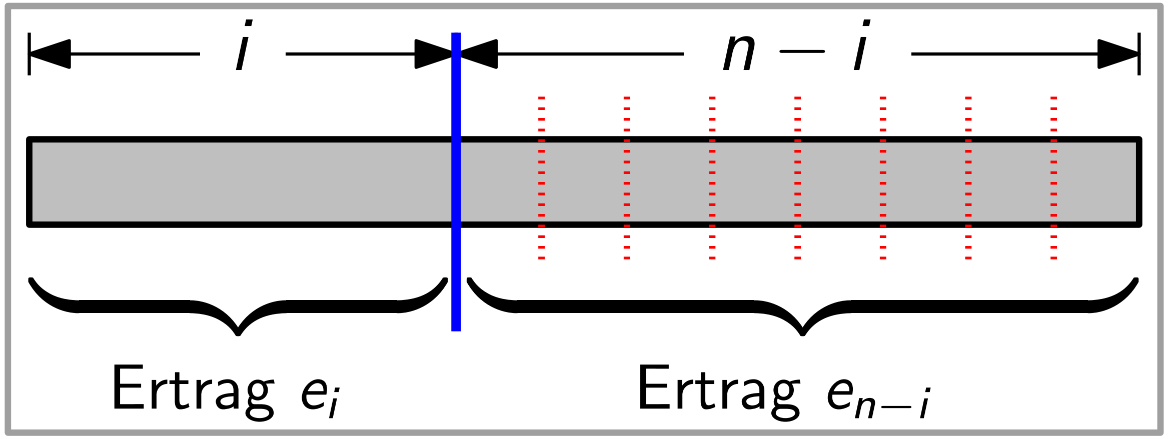


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\quad e_1 + e_{n-1},\quad e_2 + e_{n-2},\quad \ldots,\quad e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!

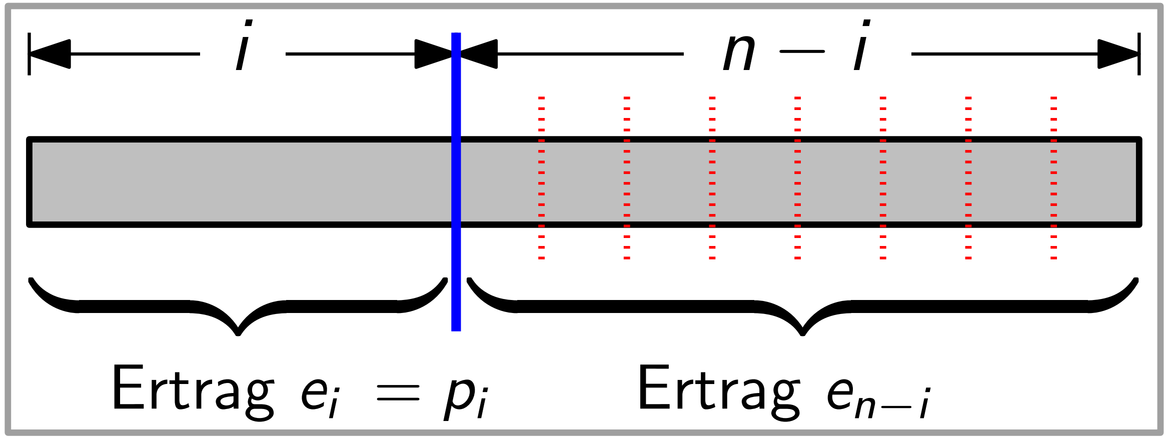


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!

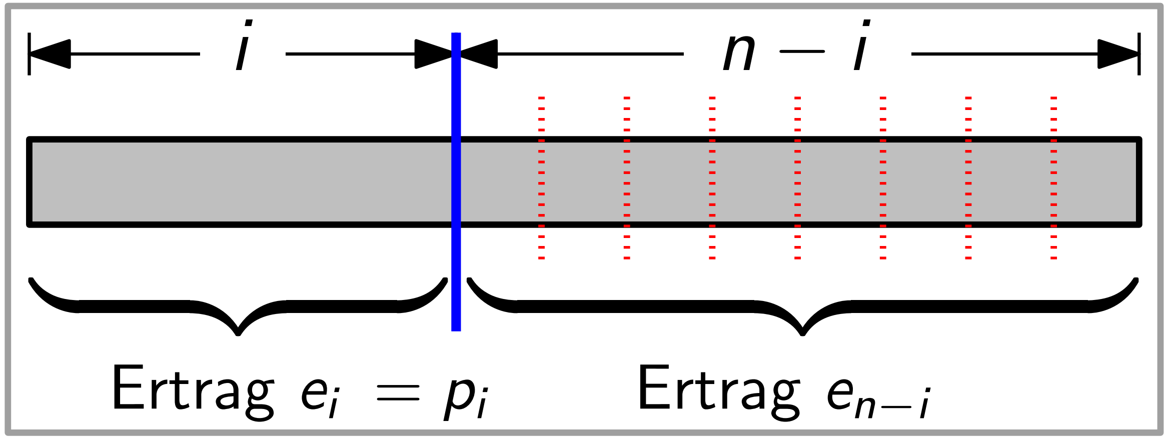


2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\quad e_1 + e_{n-1},\quad e_2 + e_{n-2},\quad \ldots,\quad e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

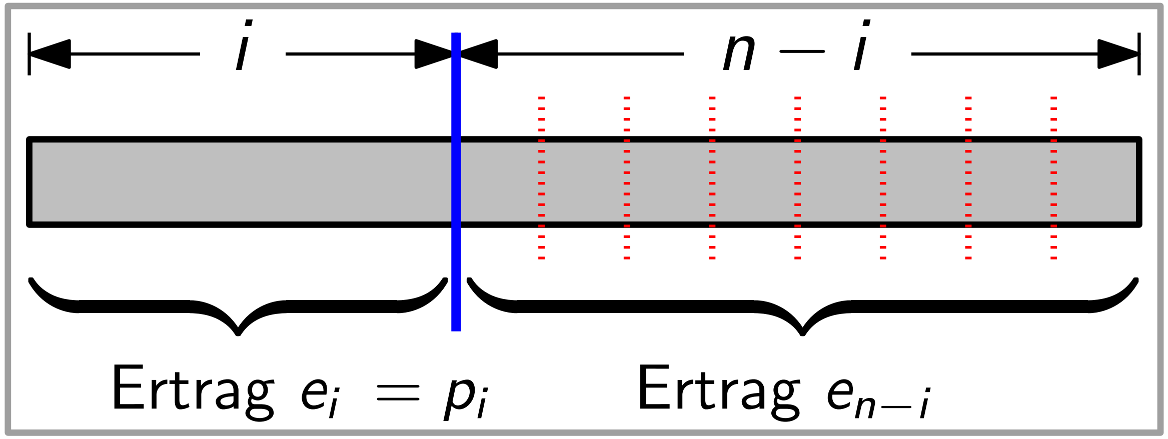
$e_n =$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

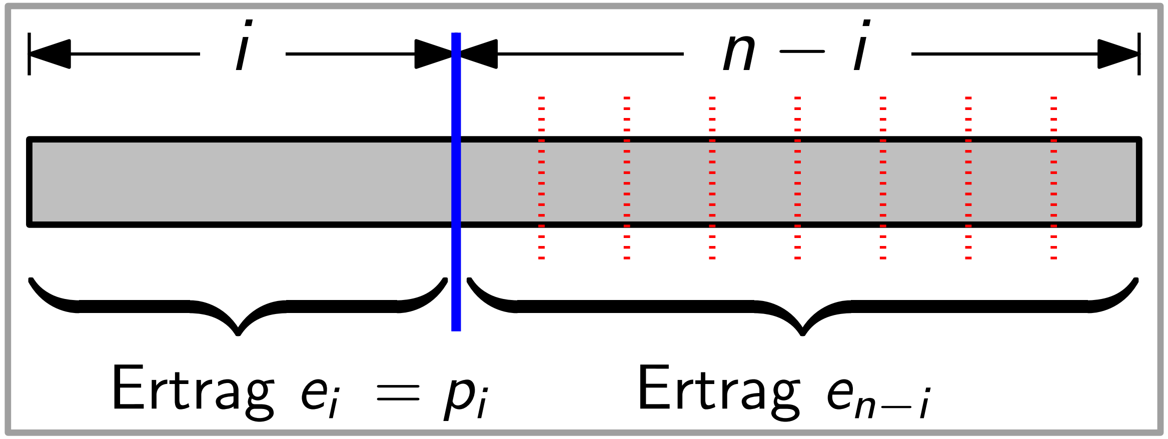
$$e_n = \max\{ \qquad \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\quad e_1 + e_{n-1},\quad e_2 + e_{n-2},\quad \ldots,\quad e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

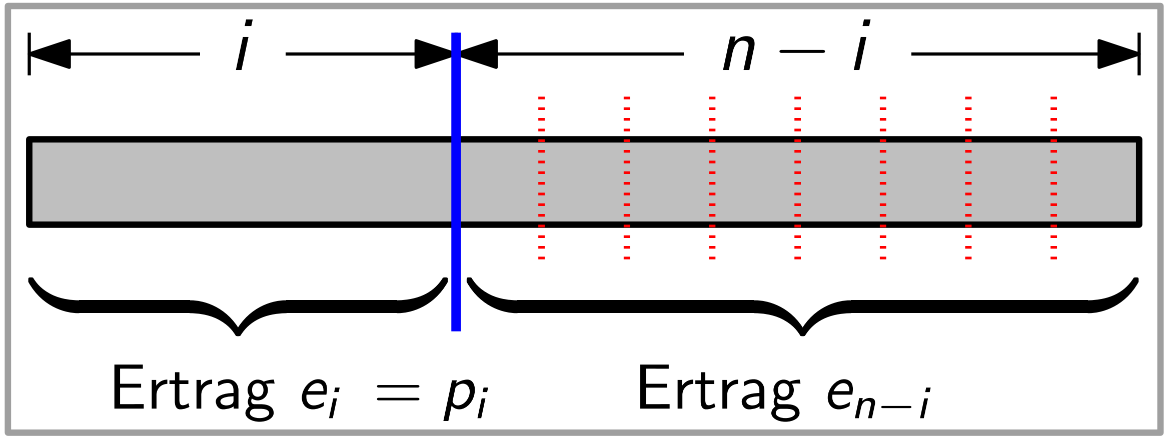
$$e_n = \max\{\ p_n, \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

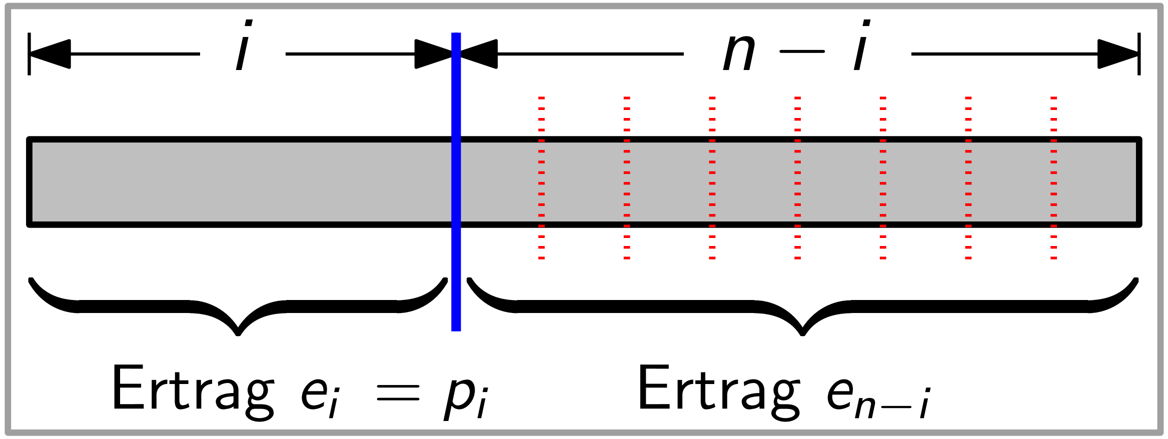
$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

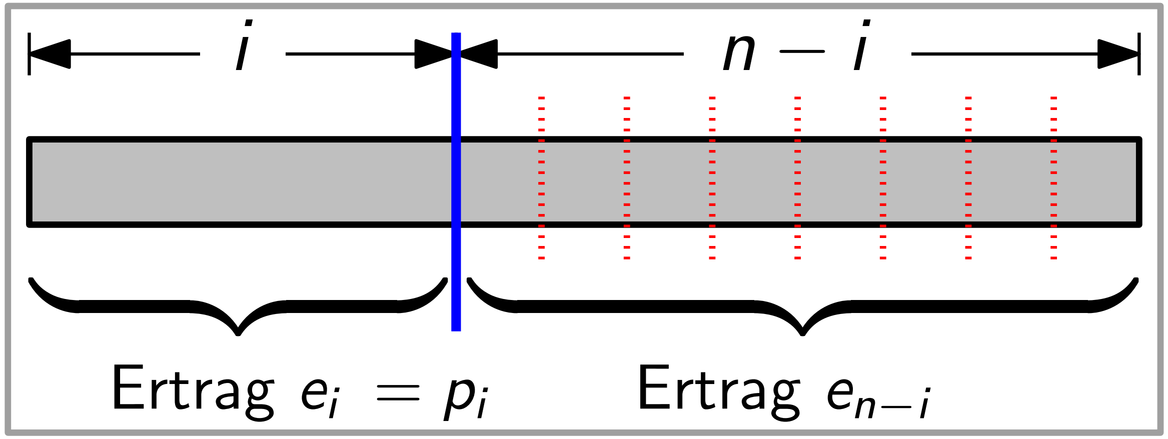
$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ p_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

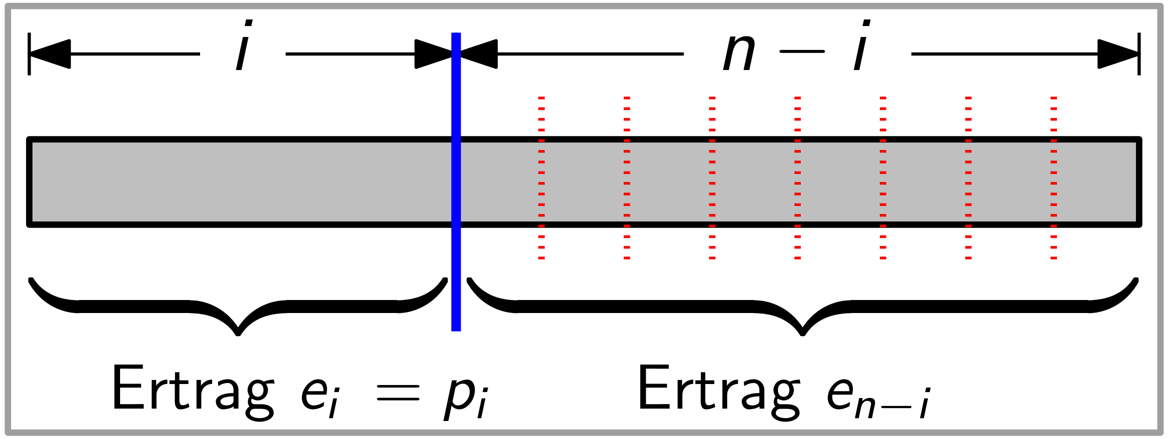
$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ p_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ p_{n-1} + e_1\ \}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ p_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ p_{n-1} + e_1\ \}$$

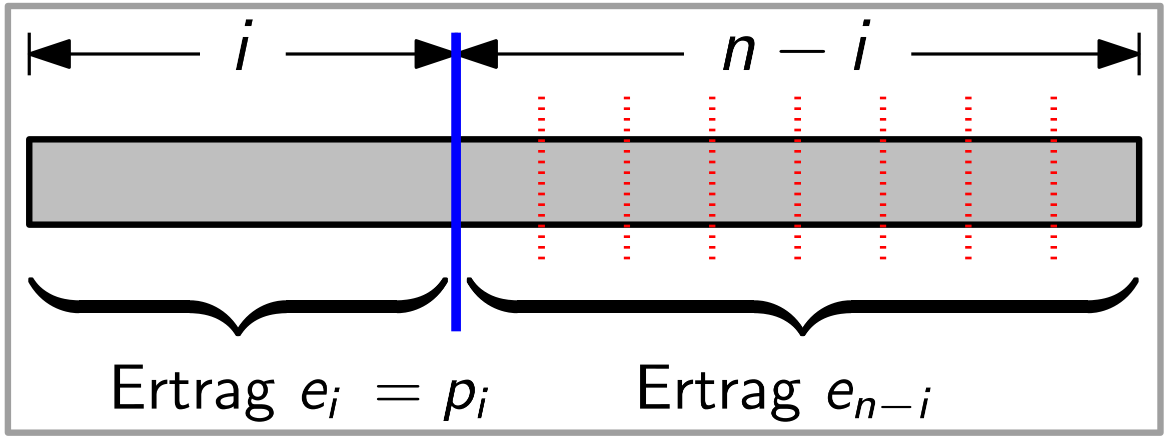
$$= \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ p_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ p_{n-1} + e_1\ \}$$

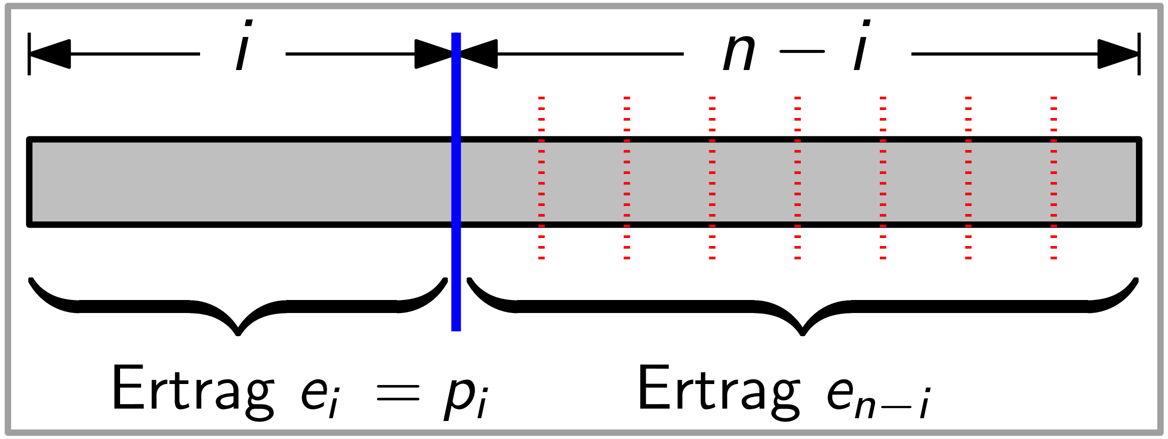
$$= \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}, \quad \text{wobei } e_0 := 0.$$

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ e_1 + e_{n-1},\ \ e_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ e_{n-1} + e_1\ \}$$

Kleine Verbesserung:

Verbiete weitere Schnitte im linken Teilstück!



Also gilt:

$$e_n = \max\{\ p_n,\ \ p_1 + e_{n-1},\ \ p_2 + e_{n-2},\ \ \ldots,\ \ p_{n-1} + e_1\ \}$$

$$= \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}, \quad \text{wobei } e_0 := 0.$$

Vorteil: Wert einer opt. Lösung ist Summe aus einer Zahl der Eingabe und *einem* Wert einer opt. Teillösung.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0

  for i = 1 to n do
  └ q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

StangenZerlegung(int[] p, int $n = p.length$)
- **if** $n == 0$ **then return** 0
- $q = -\infty$
- **for** $i = 1$ **to** n **do**
  - $q = \max\{q,\ p[i] + \text{StangenZerlegung}(p, n - i)\}$
- **return** q

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit:

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

StangenZerlegung(int[ ] p, int $n = p.\mathit{length}$)
  if $n == 0$ **then return** 0
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $q = \max\{q,\ p[i] + \text{StangenZerlegung}(p, n - i)\}$
  return q

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$\Rightarrow A(0) =$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl
von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$
beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$\Rightarrow A(0) = 1$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

StangenZerlegung(int[ ] p, int $n = p.length$)
  if $n == 0$ **then return** 0
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $q = \max\{q,\ p[i] + \text{StangenZerlegung}(p, n - i)\}$
  return q

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$\Rightarrow A(0) = 1$

und $A(n) =$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

StangenZerlegung(int[] p, int $n = p.length$)
  if $n == 0$ **then return** 0
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $q = \max\{q,\ p[i] + \text{StangenZerlegung}(p, n-i)\}$
  return q

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(n-i)$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und } A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(n-i)$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$\Rightarrow A(0) = 1$

und $A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j)$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

```
StangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  if n == 0 then return 0
  q = −∞
  for i = 1 to n do
    q = max{q, p[i] + StangenZerlegung(p, n − i)}
  return q
```

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$$\Rightarrow A(0) = 1$$

$$\text{und} \quad A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j) = 2^n$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

StangenZerlegung(int[] p, int $n = p.\mathit{length}$)
- **if** $n == 0$ **then return** 0
- $q = -\infty$
- **for** $i = 1$ **to** n **do**
  - $q = \max\{q,\ p[i] + \text{StangenZerlegung}(p, n - i)\}$
- **return** q

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$\Rightarrow A(0) = 1$

und $A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j) = 2^n$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *top-down*

Wir wissen: $e_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \{p_i + e_{n-i}\}$, wobei $e_0 := 0$.

StangenZerlegung(int[] p, int $n = p.length$)
- **if** $n == 0$ **then return** 0
- $q = -\infty$
- **for** $i = 1$ **to** n **do**
  - $q = \max\{q,\ p[i] + \text{StangenZerlegung}(p, n - i)\}$
- **return** q

Laufzeit: Sei $A(n)$ die Gesamtzahl von Aufrufen von StangenZerlegung$(p, \cdot)$ beim Ausführen von StangenZerlegung(p, n)

$\Rightarrow A(0) = 1$

und $A(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} A(n-i) = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} A(j) \overset{\text{Beweis?!}}{=} 2^n$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

3. **Wert einer optimalen Lösung berechnen:** *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

MemoStangenZerlegung(int[ ] p, int $n = p.length$)

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

MemoStangenZerlegung(int[ ] p, int $n = p.length$)
  $e =$ **new** int[0..n]
  $e[0] = 0$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $e[i] = -\infty$
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

```
MemoStangenZerlegung(int[] p, int n = p.length)
  e = new int[0..n]
  e[0] = 0
  for i = 1 to n do
    e[i] = −∞
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)
```

```
HauptStangenZerlegung(int[] p, int n, int[] e)
```

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

MemoStangenZerlegung(int[] p, int $n = p.length$)
  e = **new** int[0..n]
  $e[0] = 0$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $e[i] = -\infty$
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)

HauptStangenZerlegung(int[] p, int n, int[] e)
  if $e[n] > -\infty$ **then return** $e[n]$
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $q = \max\{q,\ p[i] + \text{HauptStangenZerlegung}(p, n - i, e)\}$
  $e[n] = q$; **return** q

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *mit Tabelle*

Zeit-Speicher-Tausch (engl. *time-memory trade-off*)

MemoStangenZerlegung(int[ ] p, int $n = p.length$)
  e = **new** int[0..n]
  $e[0] = 0$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $e[i] = -\infty$
  return HauptStangenZerlegung(p, n, e)

HauptStangenZerlegung(int[ ] p, int n, int[ ] e)
  if $e[n] > -\infty$ **then return** $e[n]$
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $q = \max\{q,\ p[i] + \text{HauptStangenZerlegung}(p, n - i, e)\}$
  $e[n] = q$; **return** q

Laufzeit? – Wie letzte Folie? – Asymptotisch schneller?

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[ ] p, int n)

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[ ] p, int n)

$e =$ **new** int$[0..n]$
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q,\ p[i] + e[j-i]\}$
  $e[j] = q$
return q

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

```
BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)
  e = new int[0..n]
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
      q = −∞
      for i = 1 to j do
          q = max{q, p[i] + e[j − i]}
      e[j] = q
  return q
```

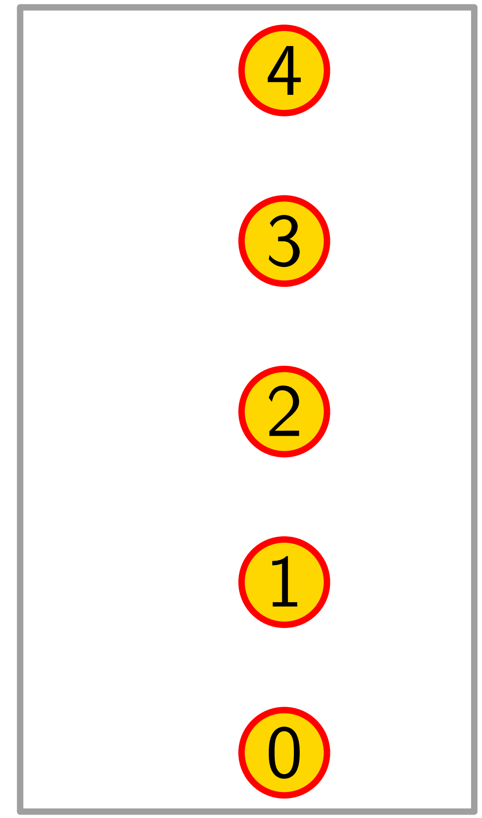
Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

3. **Wert einer optimalen Lösung berechnen:** *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[ ] p, int n)

$e =$ **new** int$[0..n]$
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

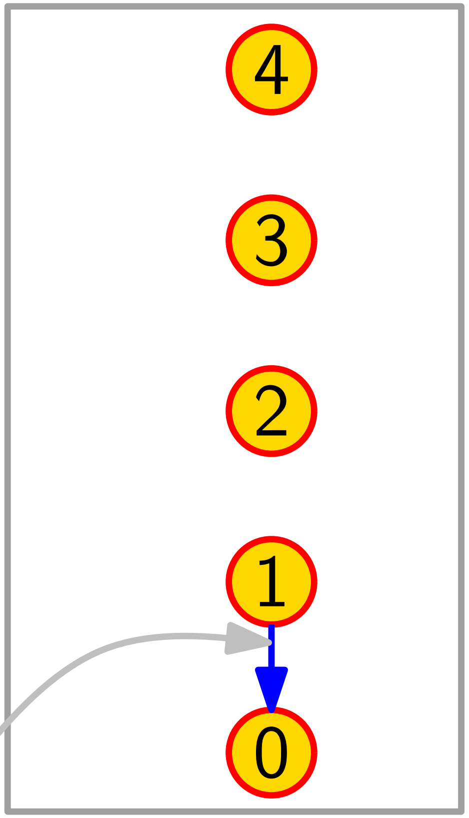


Graph der Teilinstanzen

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

```
BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)
  e = new int[0..n]
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
    q = −∞
    for i = 1 to j do
      q = max{q, p[i] + e[j − i]}
    e[j] = q
  return q
```

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

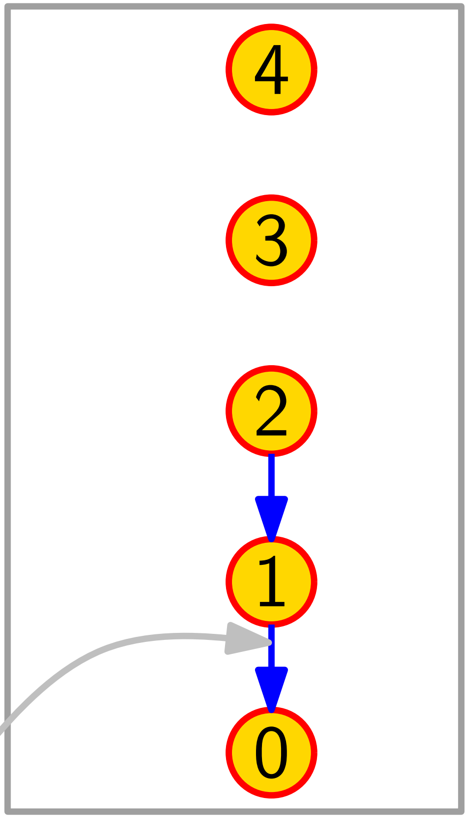
Graph der Teilinstanzen

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

e = **new** int[0..n]
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

Graph der Teilinstanzen

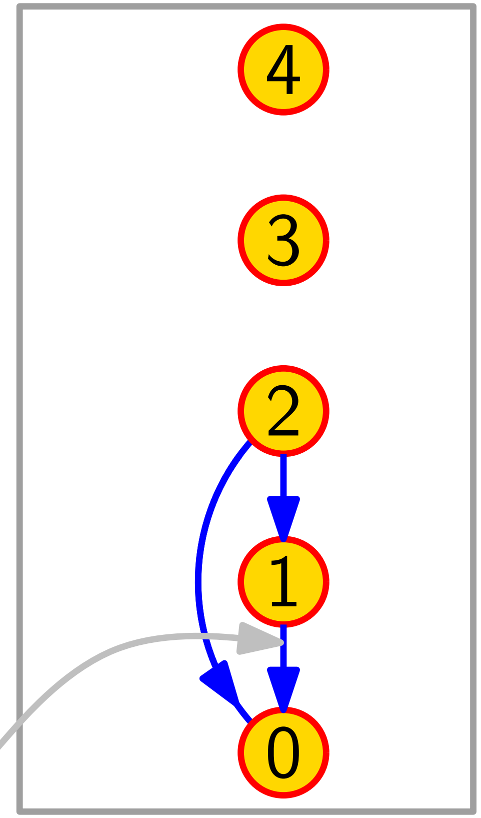
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

- $e = \textbf{new}$ int$[0..n]$
- $e[0] = 0$
- **for** $j = 1$ **to** n **do**
  - $q = -\infty$
  - **for** $i = 1$ **to** j **do**
    - $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  - $e[j] = q$
- **return** q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.



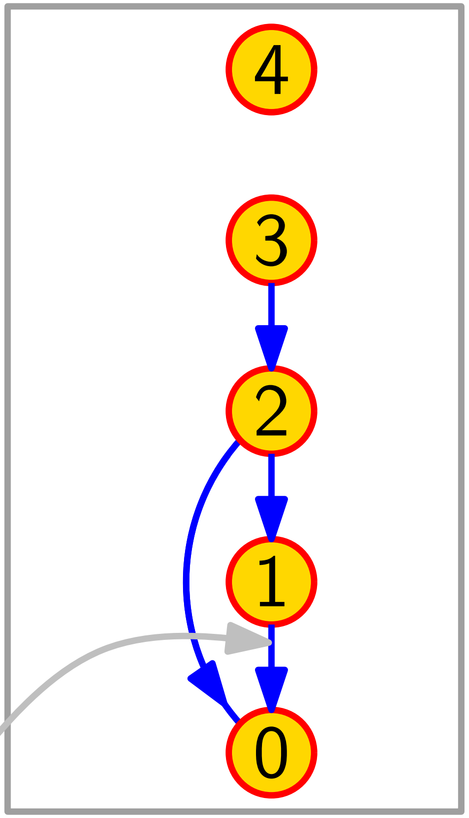
Graph der Teilinstanzen

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

$e = \textbf{new}\ \text{int}[0..n]$
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

Graph der Teilinstanzen

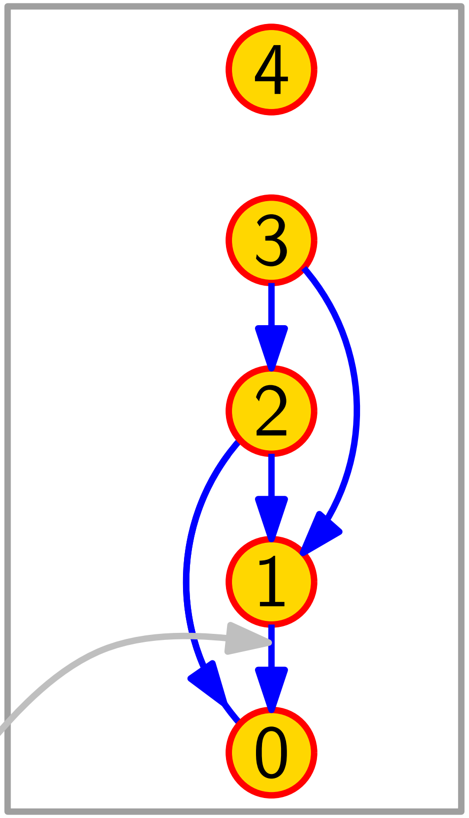
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

  $e =$ **new** int$[0..n]$
  $e[0] = 0$
  for $j = 1$ **to** n **do**
    $q = -\infty$
    for $i = 1$ **to** j **do**
      $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
    $e[j] = q$
  return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.



Graph der Teilinstanzen

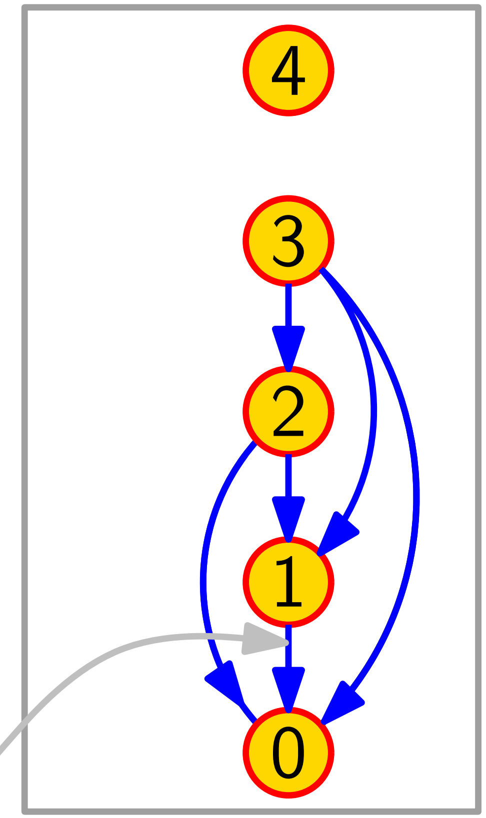
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

$e =$ **new** int$[0..n]$
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.



Graph der Teilinstanzen

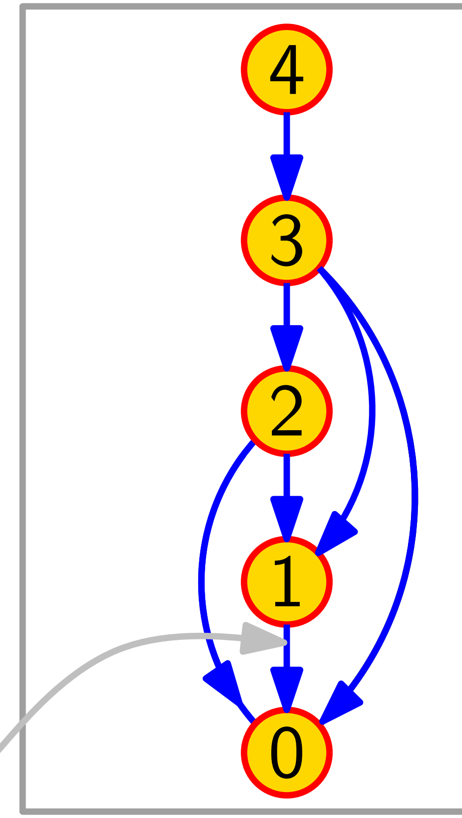
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

$e =$ **new** int$[0..n]$
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.



Graph der Teilinstanzen

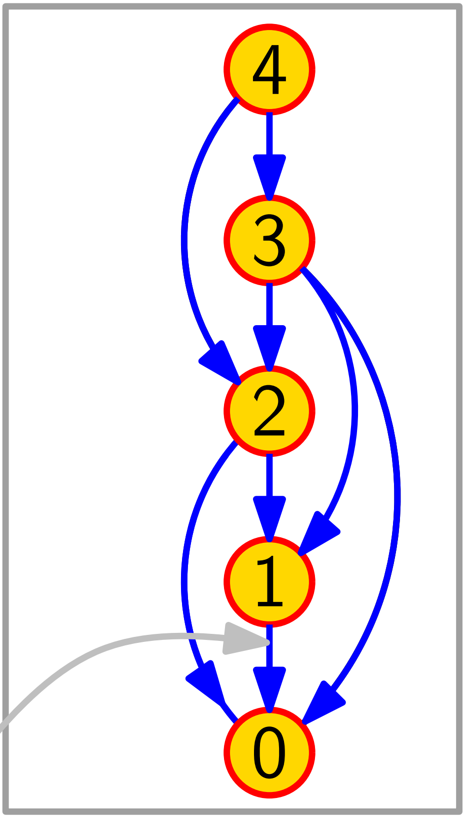
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

e = **new** int[0..n]
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.



Graph der Teilinstanzen

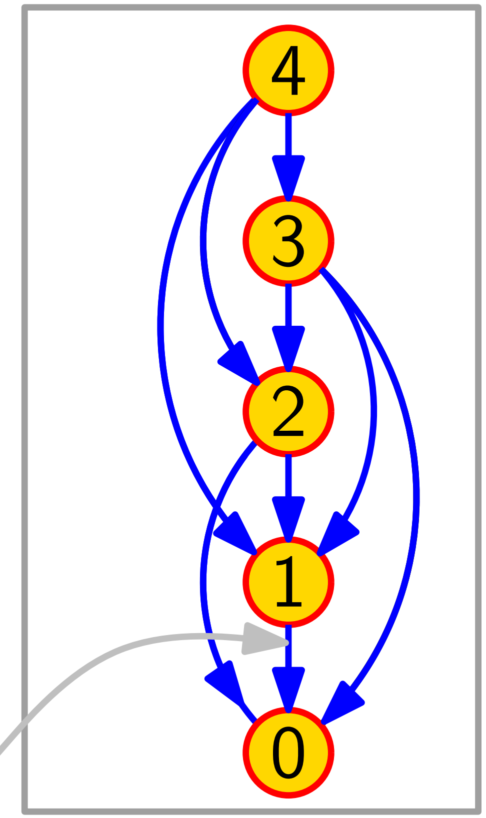
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

$e =$ **new** int$[0..n]$
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j - i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.



Graph der Teilinstanzen

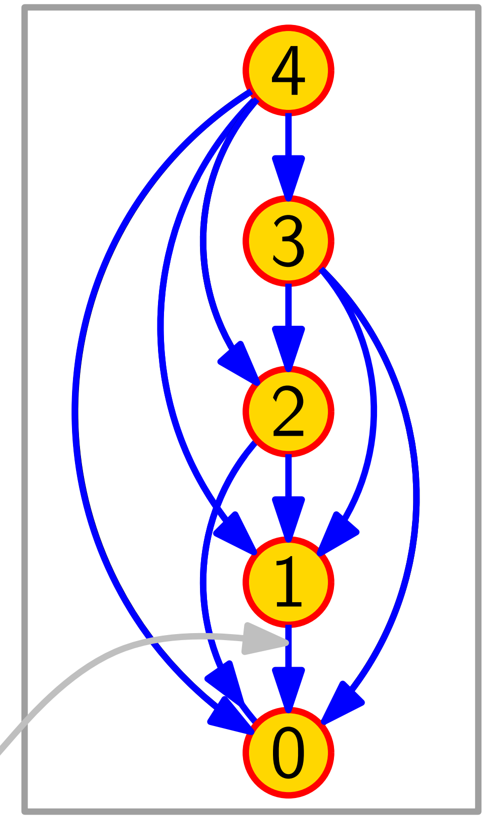
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

$e =$ **new** int[0..n]
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!

Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.



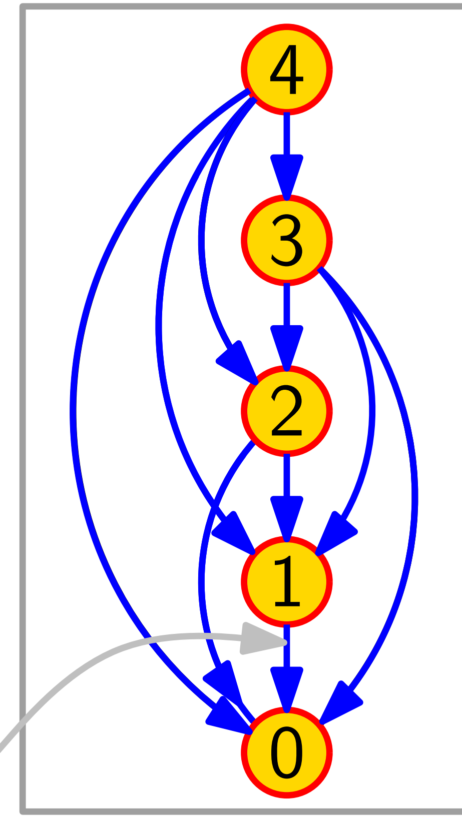
Graph der Teilinstanzen

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

$e =$ **new** int$[0..n]$
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet:
Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

Graph der Teilinstanzen

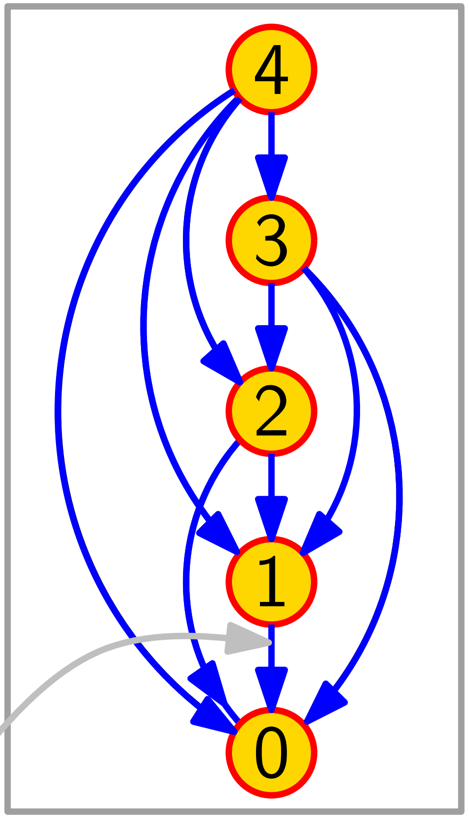
Beob. Die Anzahl der Kanten im Graphen ist proportional zur Laufzeit des DP (Anz. Additionen).

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

e = **new** int[0..n]
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

Graph der Teilinstanzen

Beob. Die Anzahl der Kanten im Graphen ist proportional zur Laufzeit des DP (Anz. Additionen).

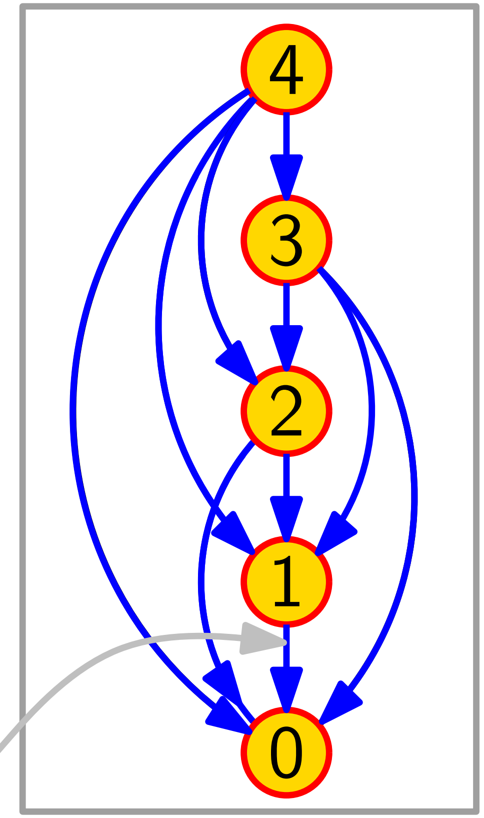
Satz. BottUpSZerl() und MemoSZerl() laufen in $O(\quad)$ Zeit.

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen: *bottom-up*

BottomUpStangenZerlegung(int[] p, int n)

$e =$ **new** int[0..n]
$e[0] = 0$
for $j = 1$ **to** n **do**
  $q = -\infty$
  for $i = 1$ **to** j **do**
    $q = \max\{q, \boxed{p[i] + e[j-i]}\}$
  $e[j] = q$
return q

Neu: *kein* rekursiver Aufruf!



Kante (j, i) bedeutet: Teilinstanz j benützt Wert einer opt. Lösung von Teilinstanz i.

Graph der Teilinstanzen

Beob. Die Anzahl der Kanten im Graphen ist proportional zur Laufzeit des DP (Anz. Additionen).

Satz. BottUpSZerl() und MemoSZerl() laufen in $O\left(n^2\right)$ Zeit.

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e,            int n)
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
      q = −∞
      for i = 1 to j do
          q = max{q, p[i] + e[j−i]}
      e[j] = q
```

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[ ] p, int[ ] e, int n)

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

  $q = -\infty$

  for $i = 1$ **to** j **do**

    $\Big\}$ $q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$

  $e[j] = q$

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[ ] p, int[ ] e, int[ ] ℓ, int n)
  $e[0] = 0$
  for $j = 1$ **to** n **do**
    $q = -\infty$
    for $i = 1$ **to** j **do**
      if $q < p[i] + e[j - i]$ **then**
        $q = p[i] + e[j - i]$
        $\ell[j] = i$
    $e[j] = q$

$$q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$$

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[ ] p, int[ ] e, int[ ] ℓ, int n)

  $e[0] = 0$
  for $j = 1$ **to** n **do**
    $q = -\infty$
    for $i = 1$ **to** j **do**
      if $q < p[i] + e[j-i]$ **then**
        $q = p[i] + e[j-i]$
        $\ell[j] = i$ // merke Länge des 1. Teilstücks
    $e[j] = q$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{if } q < p[i] + e[j-i] \textbf{ then}\\ \quad q = p[i] + e[j-i]\\ \quad \ell[j] = i\end{array}\right\} q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$$

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
    q = −∞
    for i = 1 to j do
      if q < p[i] + e[j − i] then      ⎫
        q = p[i] + e[j − i]            ⎬ q = max{q, p[i] + e[j−i]}
        ℓ[j] = i                       ⎭  // merke Länge des 1. Teilstücks
    e[j] = q
```

```
GibZerlegungAus(int[] p, int n)
  ℓ = new int[0..n]; e = new int[0..n]
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
```

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[ ] p, int[ ] e, int[ ] ℓ, int n)

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

  $q = -\infty$

  for $i = 1$ **to** j **do**

    if $q < p[i] + e[j-i]$ **then**

      $q = p[i] + e[j-i]$

      $\ell[j] = i$ // merke Länge des 1. Teilstücks

  $e[j] = q$

$\left.\right\}$ $q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$

GibZerlegungAus(int[ ] p, int n)

$\ell =$ **new** int$[0..n]$; $e =$ **new** int$[0..n]$

ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)

while $n > 0$ **do**

  print $\ell[n]$; $n = n - \ell[n]$

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[ ] p, int[ ] e, int[ ] ℓ, int n)
  $e[0] = 0$
  for $j = 1$ **to** n **do**
    $q = -\infty$
    for $i = 1$ **to** j **do**
      if $q < p[i] + e[j-i]$ **then**
        $q = p[i] + e[j-i]$
        $\ell[j] = i$ // merke Länge des 1. Teilstücks
    $e[j] = q$

$\left.\right\}$ $q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$

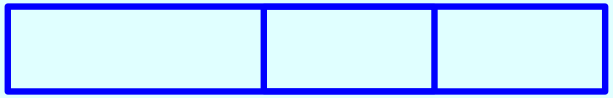
GibZerlegungAus(int[ ] p, int n)
  $\ell =$ **new** int$[0..n]$; $e =$ **new** int$[0..n]$
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
  while $n > 0$ **do** // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus
    print $\ell[n]$; $n = n - \ell[n]$

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[ ] p, int[ ] e, int[ ] ℓ, int n)
- $e[0] = 0$
- **for** $j = 1$ **to** n **do**
  - $q = -\infty$
  - **for** $i = 1$ **to** j **do**
    - **if** $q < p[i] + e[j-i]$ **then**
      - $q = p[i] + e[j-i]$
      - $\ell[j] = i$ // merke Länge des 1. Teilstücks
  - $e[j] = q$

$q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$

GibZerlegungAus(int[ ] p, int n)



- $\ell =$ **new** int$[0..n]$; $e =$ **new** int$[0..n]$
- ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
- **while** $n > 0$ **do** // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus
  - print $\ell[n]$; $n = n - \ell[n]$

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

$\quad q = -\infty$

$\quad$ **for** $i = 1$ **to** j **do**

$\quad\quad$ **if** $q < p[i] + e[j-i]$ **then**

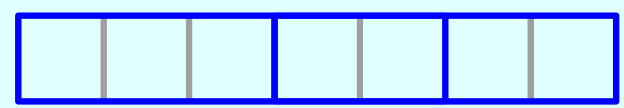
$\quad\quad\quad q = p[i] + e[j-i]$

$\quad\quad\quad \ell[j] = i$ // merke Länge des 1. Teilstücks

$\quad e[j] = q$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{if } q < p[i] + e[j-i] \textbf{ then}\\ \quad q = p[i] + e[j-i]\\ \quad \ell[j] = i\end{array}\right\} q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$$

GibZerlegungAus(int[] p, int n)



$\ell =$ **new** int$[0..n]$; $e =$ **new** int$[0..n]$

ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)

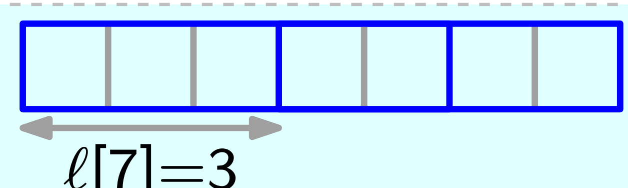
while $n > 0$ **do** // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus

$\quad$ print $\ell[n]$; $n = n - \ell[n]$

4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

```
ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)
  e[0] = 0
  for j = 1 to n do
    q = −∞
    for i = 1 to j do
      if q < p[i] + e[j − i] then      ⎫
        q = p[i] + e[j − i]            ⎬ q = max{q, p[i] + e[j−i]}
        ℓ[j] = i                       ⎭
                           // merke Länge des 1. Teilstücks
    e[j] = q
```

```
GibZerlegungAus(int[] p, int n)
  ℓ = new int[0..n]; e = new int[0..n]
  ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
  while n > 0 do          // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus
    print ℓ[n]; n = n − ℓ[n]
```



4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)

$e[0] = 0$

for $j = 1$ **to** n **do**

  $q = -\infty$

  for $i = 1$ **to** j **do**

    if $q < p[i] + e[j-i]$ **then**

      $q = p[i] + e[j-i]$

      $\ell[j] = i$ // merke Länge des 1. Teilstücks

  $e[j] = q$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{if } q < p[i] + e[j-i] \textbf{ then}\\ \quad q = p[i] + e[j-i]\\ \quad \ell[j] = i\end{array}\right\} q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$$

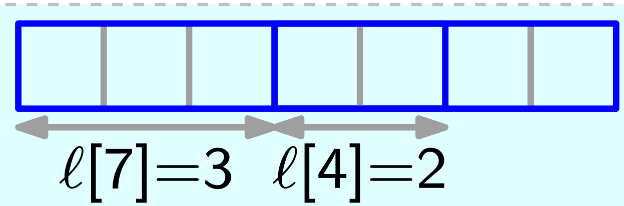
GibZerlegungAus(int[] p, int n)

$\ell =$ **new** int$[0..n]$; $e =$ **new** int$[0..n]$

ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)

while $n > 0$ **do** // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus

  print $\ell[n]$; $n = n - \ell[n]$

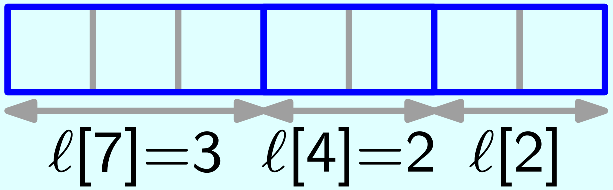


4. Optimale Lösung aus berechneter Info. konstruieren

ErweiterteBottomUpZerlegung(int[] p, int[] e, int[] ℓ, int n)
- $e[0] = 0$
- **for** $j = 1$ **to** n **do**
  - $q = -\infty$
  - **for** $i = 1$ **to** j **do**
    - **if** $q < p[i] + e[j-i]$ **then**
      - $q = p[i] + e[j-i]$
      - $\ell[j] = i$ // merke Länge des 1. Teilstücks
  - $e[j] = q$

$\left.\right\}$ $q = \max\{q, p[i] + e[j-i]\}$

GibZerlegungAus(int[] p, int n)
- $\ell = $ **new** int$[0..n]$; $e = $ **new** int$[0..n]$
- ErweiterteBottomUpZerlegung(p, e, ℓ, n)
- **while** $n > 0$ **do** // gib wiederholt Länge des 1. Teilstücks aus
  - print $\ell[n]$; $n = n - \ell[n]$



Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,
d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,
d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.

Fahrplan

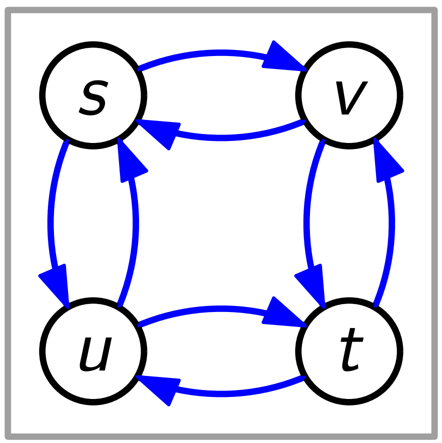
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



Fahrplan

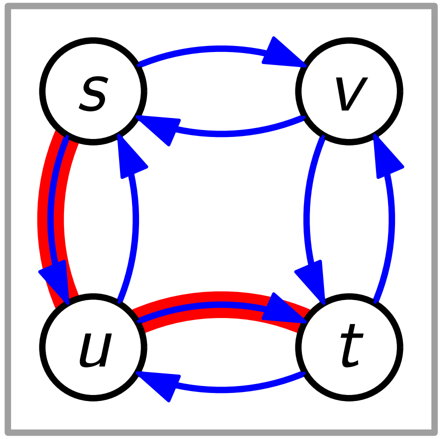
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Fahrplan

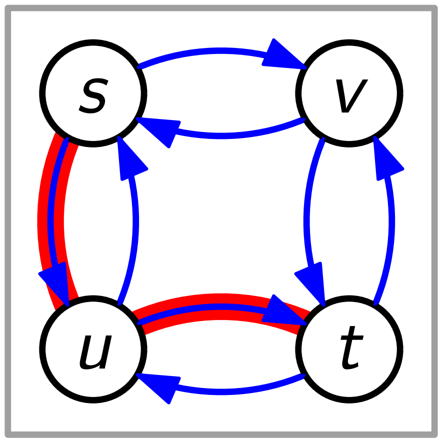
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0v_1, \ldots, v_{k-1}v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Aber:

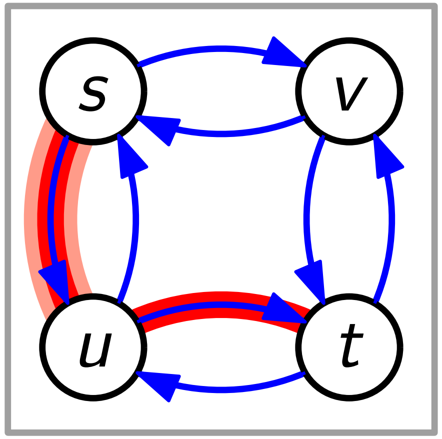
Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,
d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \ldots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \ldots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s-u-Weg;

Fahrplan

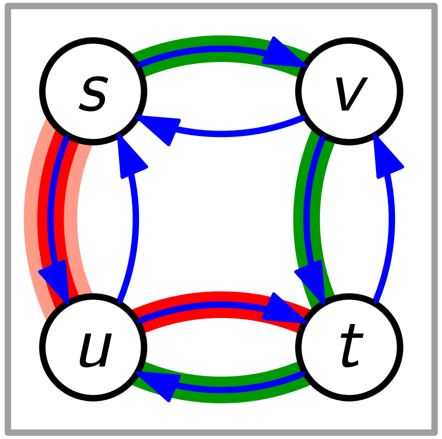
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s-u-Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s-u-Weg!

Fahrplan

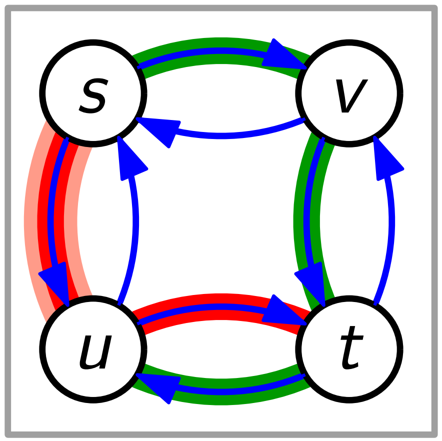
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s-u-Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s-u-Weg!

Fahrplan

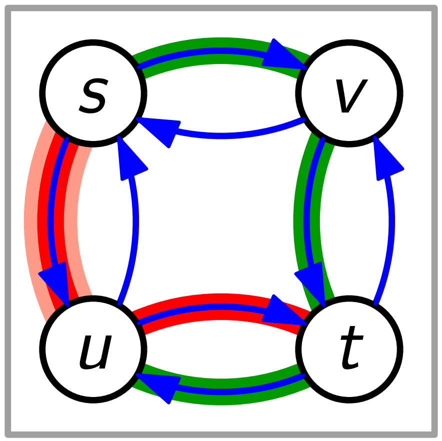
1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ϟ
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

Längste Wege

Gegeben: ungewichteter gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster einfacher s-t-Weg,

d.h. eine Folge $\langle s = v_0, v_1, \dots, v_k = t \rangle$ mit $v_0v_1, \dots, v_{k-1}v_k \in E$, $v_i \neq v_j$ (für $i \neq j$) und k maximal.



$\langle s, u, t \rangle$ ist ein längster einfacher s-t-Weg.

Aber:

$\langle s, u \rangle$ ist *kein* längster einfacher s-u-Weg;

$\langle s, v, t, u \rangle$ ist ein längster einfacher s-u-Weg!

Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ↯*
2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren
3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (meist bottom-up)

*) Es ist NP-schwer für (G, s, t, k) zu entscheiden, ob G einen einfachen s-t-Weg der Länge k enthält. (Vgl. Hamilton-Weg!)

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beob$_1$ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$
mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beob$_1$ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob$_2$ *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn:

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beob$_1$ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob$_2$ *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn: Ein längster s-t-Weg π gehe durch u, d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G = (V, E; w)$ mit $s, t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beob$_1$ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob$_2$ *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s-t-Weg π gehe durch u, d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Dann gilt:
π_{su} ist längster s-u-Weg; π_{ut} ist längster u-t-Weg –

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G=(V,E;w)$ mit $s,t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beob$_1$ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob$_2$ *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s-t-Weg π gehe durch u, d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Dann gilt:
π_{su} ist längster s-u-Weg; π_{ut} ist längster u-t-Weg – sonst wäre π kein längster s-t-Weg.

Längste Wege in azyklischen Graphen

Gegeben: gewichteter gerichteter *kreisfreier* Graph $G=(V,E;w)$ mit $s,t \in V$, $s \neq t$ und t von s erreichbar.

Gesucht: ein längster s-t-Weg.

Beob$_1$ In kreisfreien Graphen sind alle Wege einfach.

Beob$_2$ *Dieses* Problem hat optimale Teilstruktur, denn:
Ein längster s-t-Weg π gehe durch u, d.h.

$$\pi = s \xrightarrow{\pi_{su}} u \xrightarrow{\pi_{ut}} t.$$

Dann gilt:
π_{su} ist längster s-u-Weg; π_{ut} ist längster u-t-Weg – sonst wäre π kein längster s-t-Weg.

Außerdem gilt $V(\pi_{su}) \cap V(\pi_{ut}) = \{u\}$;
sonst gäbe es einen Kreis!

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

   $d_v \;=$ // Länge eines längsten s-v-Wegs

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{u\colon uv \in E} d_u + w(u, v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v \;=\; \max_{u\colon\, uv \in E} d_u + w(u,v) \qquad \text{// Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

   $$d_v = \max_{u\colon\, uv \in E} d_u + w(u, v) \quad \text{// Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

   – G topologisch sortieren

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

   $$d_v \;=\; \max_{u\colon\, uv\in E} d_u + w(u,v) \qquad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

   – G topologisch sortieren

   – d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{u\colon uv \in E} d_u + w(u, v) \quad \text{// Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

   – G topologisch sortieren

   – d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

   – for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d-Werte berechnen

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{u\colon uv \in E} d_u + w(u,v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

so!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)
   - G topologisch sortieren
   - d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$
   - for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d-Werte berechnen

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v \;=\; \max_{u\colon\, uv \in E} \; d_u + w(u,v) \qquad \text{// Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

so!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

   – G topologisch sortieren

   – d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

   – for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d-Werte berechnen

Übrigens: *Kürzeste* Wege in kreisfreien Graphen

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

   $$d_v = \max_{u\colon uv \in E} d_u + w(u,v) \quad // \text{ Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

   so!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

   – G topologisch sortieren

   – d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

   – for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d-Werte berechnen

Übrigens: *Kürzeste* Wege in kreisfreien Graphen kann man genauso berechnen (mit min statt max und $+\infty$ statt $-\infty$).

Algorithmus nach Fahrplan

1. Struktur einer optimalen Lösung charakterisieren ✓

2. Wert einer optimalen Lösung rekursiv definieren

$$d_v = \max_{u \colon uv \in E} d_u + w(u, v) \quad \text{// Länge eines längsten } s\text{-}v\text{-Wegs}$$

so!

3. Wert einer optimalen Lösung berechnen (hier bottom-up)

   – G topologisch sortieren

   – d-Werte initialisieren: $d_s = 0$ und $d_v = -\infty$ für alle $v \neq s$

   – for-Schleife durch Knoten v.l.n.r. d-Werte berechnen

Übrigens: *Kürzeste* Wege in kreisfreien Graphen kann man genauso berechnen (mit min statt max und $+\infty$ statt $-\infty$).

Genauso kann man auch das SMS-Problem lösen ($\cdot$ statt $+$).

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

- Ketten von Matrixmultiplikationen
- Längste gemeinsame Teilfolge (in Zeichenketten)
- Optimale binäre Suchbäume

Und jetzt?

Im Buch [CLRS] werden weitere, praxisrelevante Probleme mit dynamischem Programmieren gelöst:

- Ketten von Matrixmultiplikationen
- Längste gemeinsame Teilfolge (in Zeichenketten)
- Optimale binäre Suchbäume

Lesen Sie Kapitel 15.2–5 !!!