Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Algorithmen & Komplexität

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

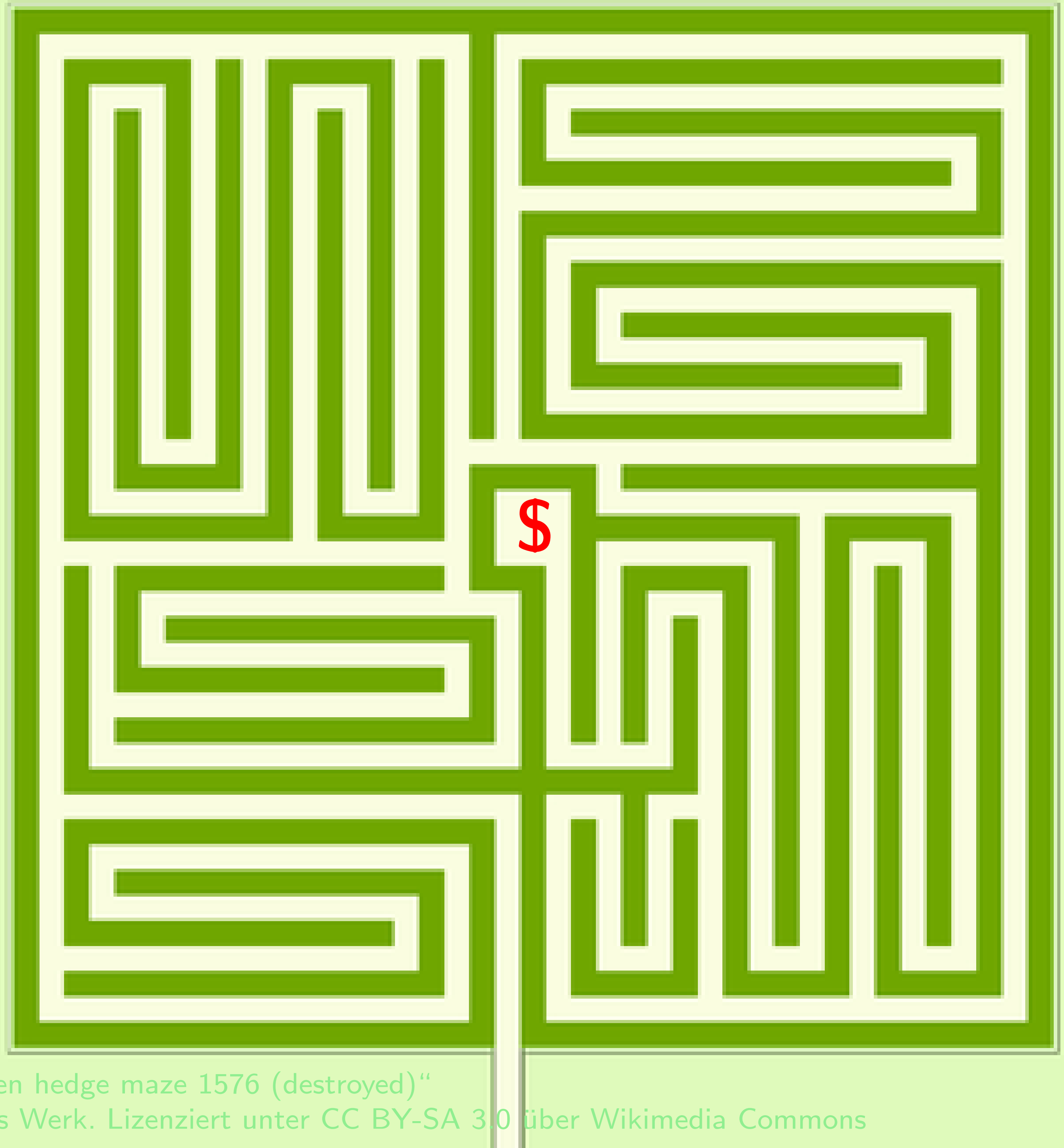
Wintersemester 2020/21

20. Vorlesung

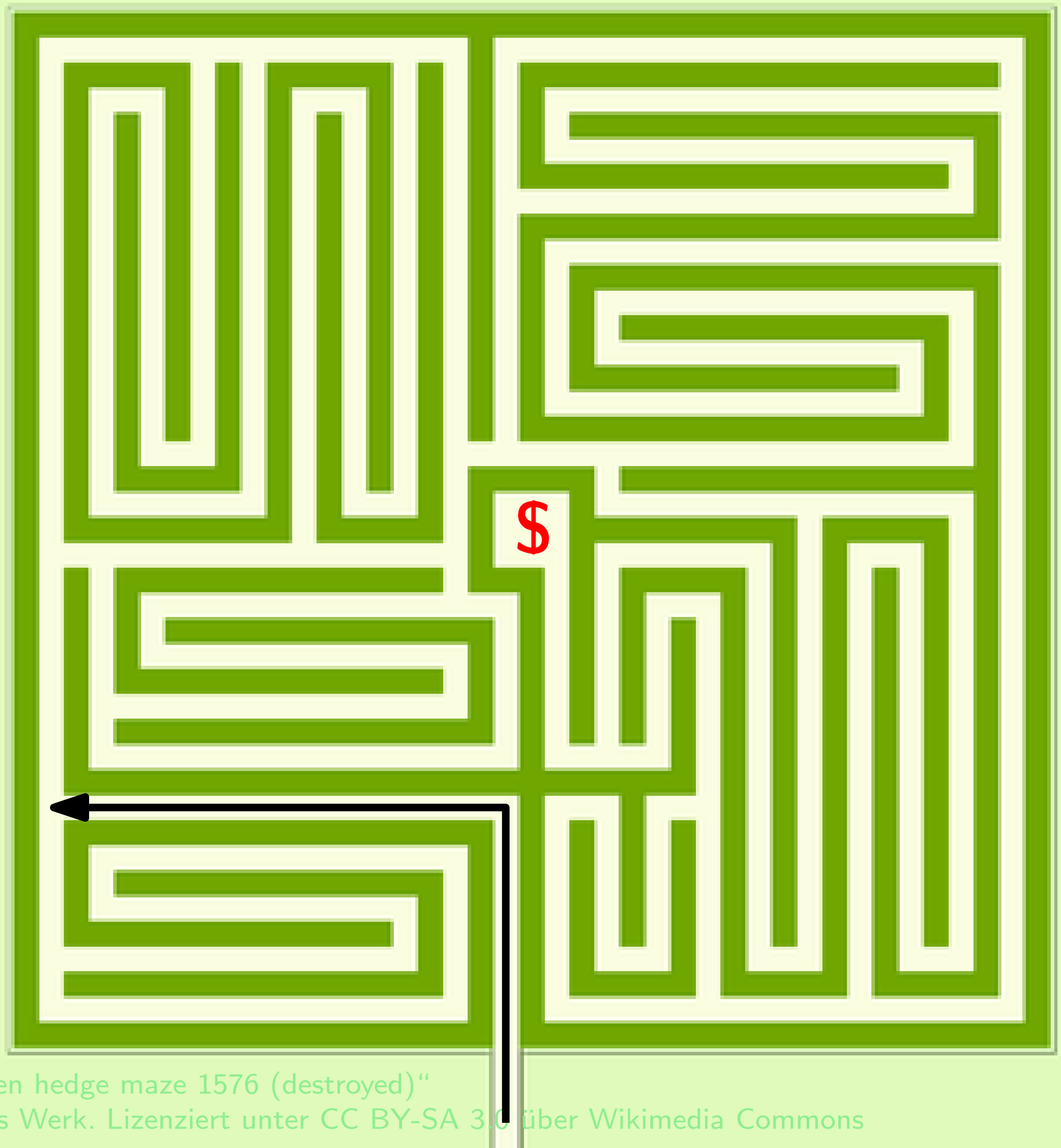
Tiefensuche und topologische Sortierung

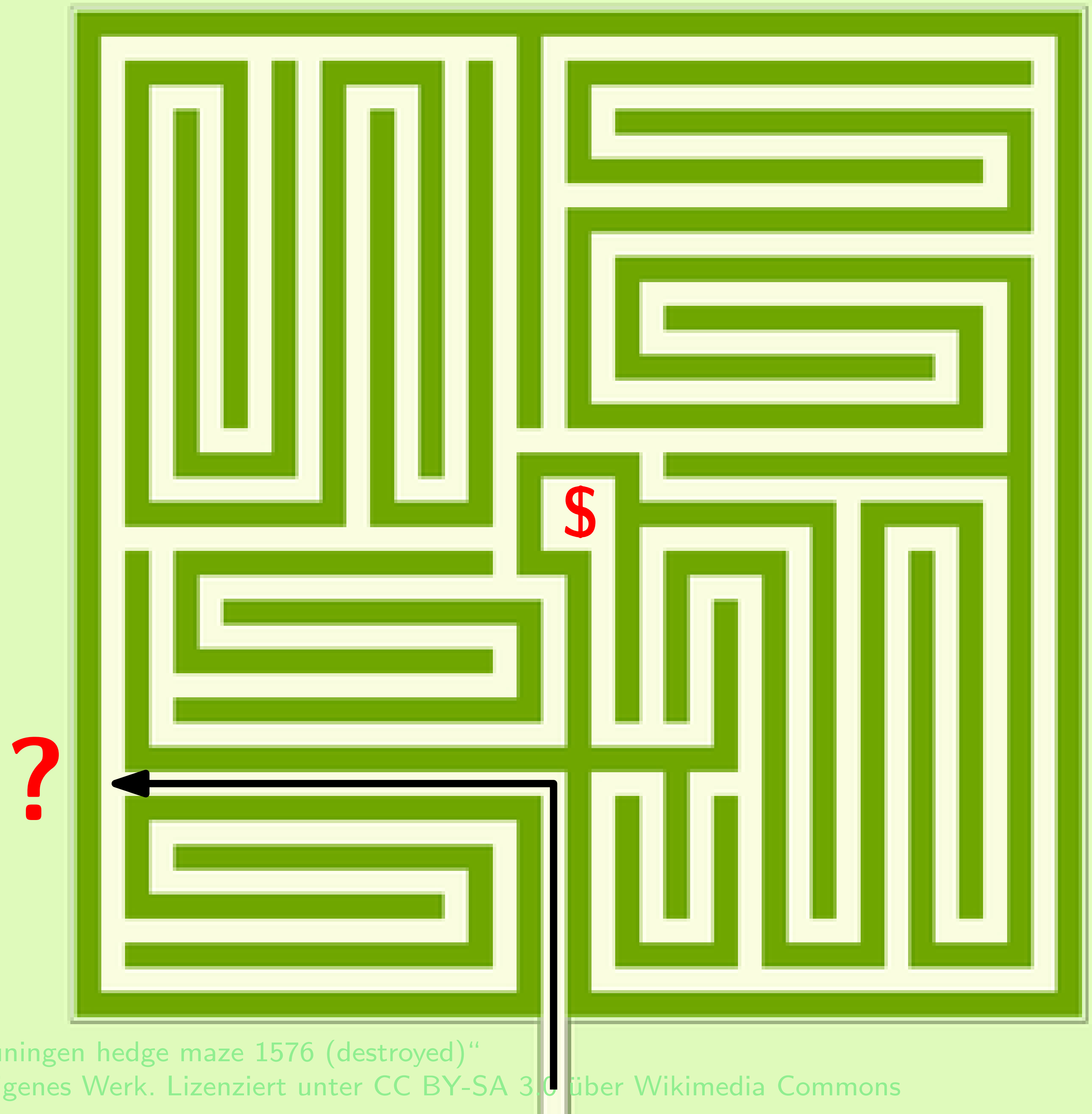
Prof. Dr. Alexander Wolff

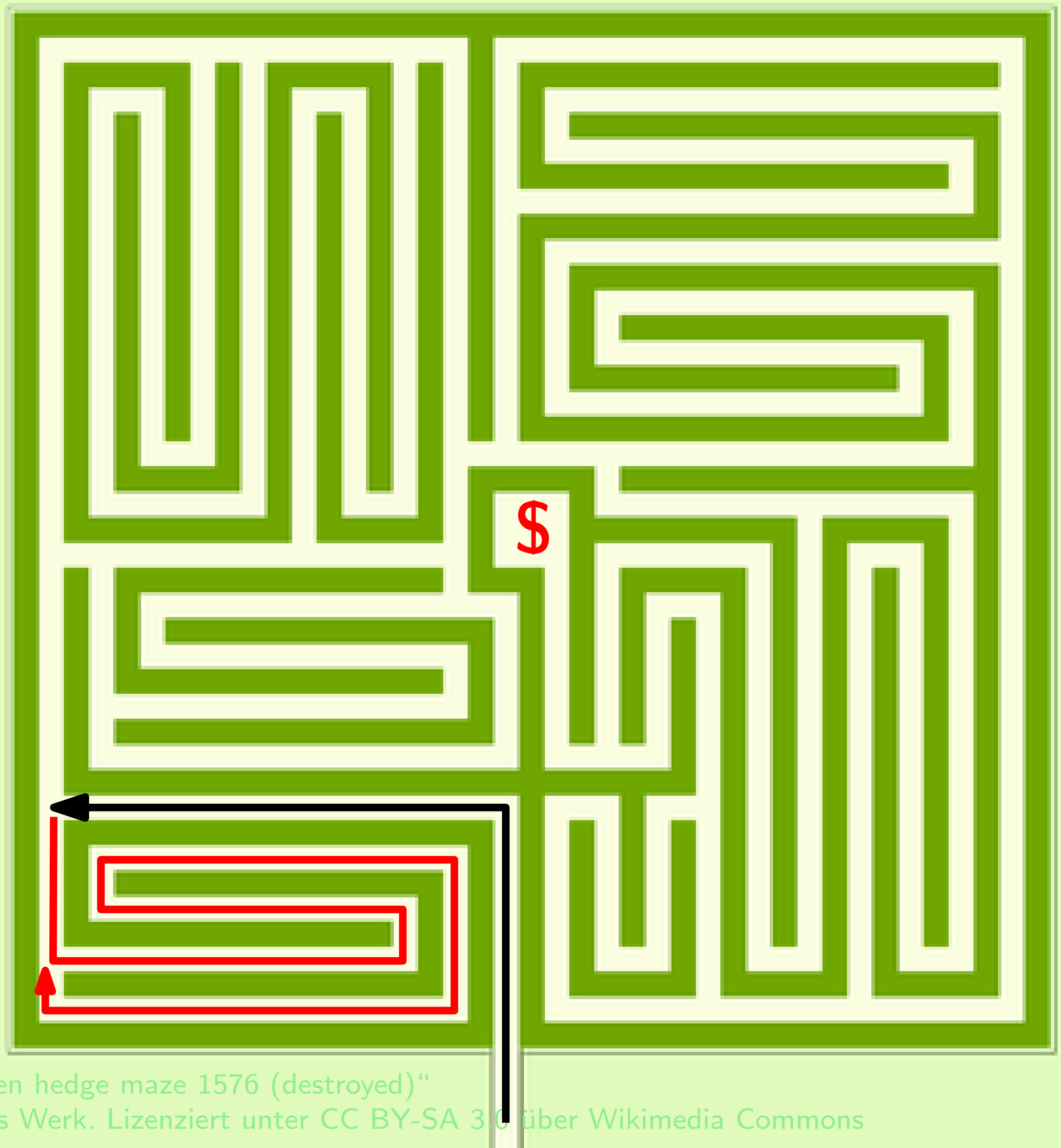
Lehrstuhl für Informatik I



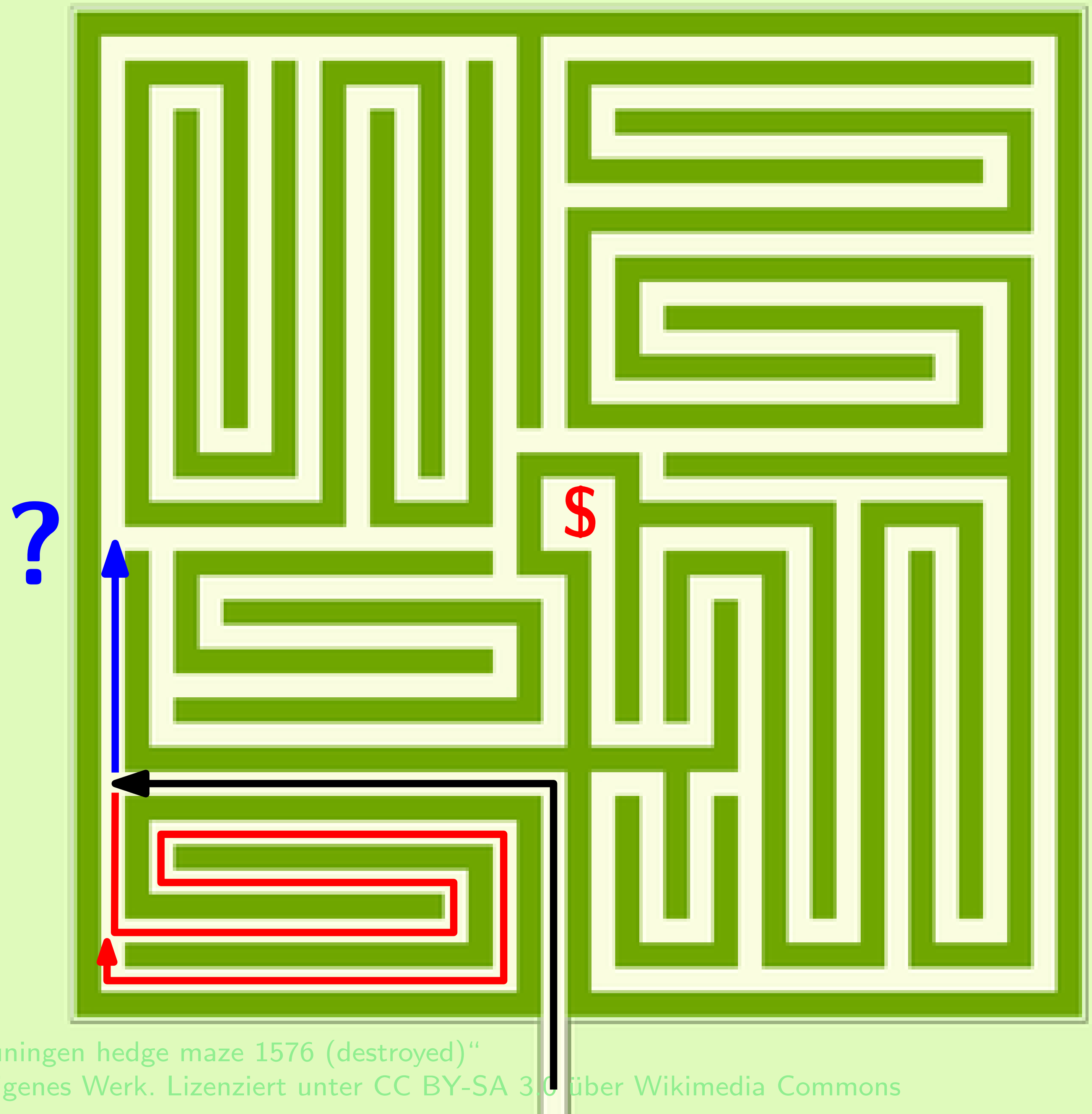
„Maze-01 Grüningen hedge maze 1576 (destroyed)“

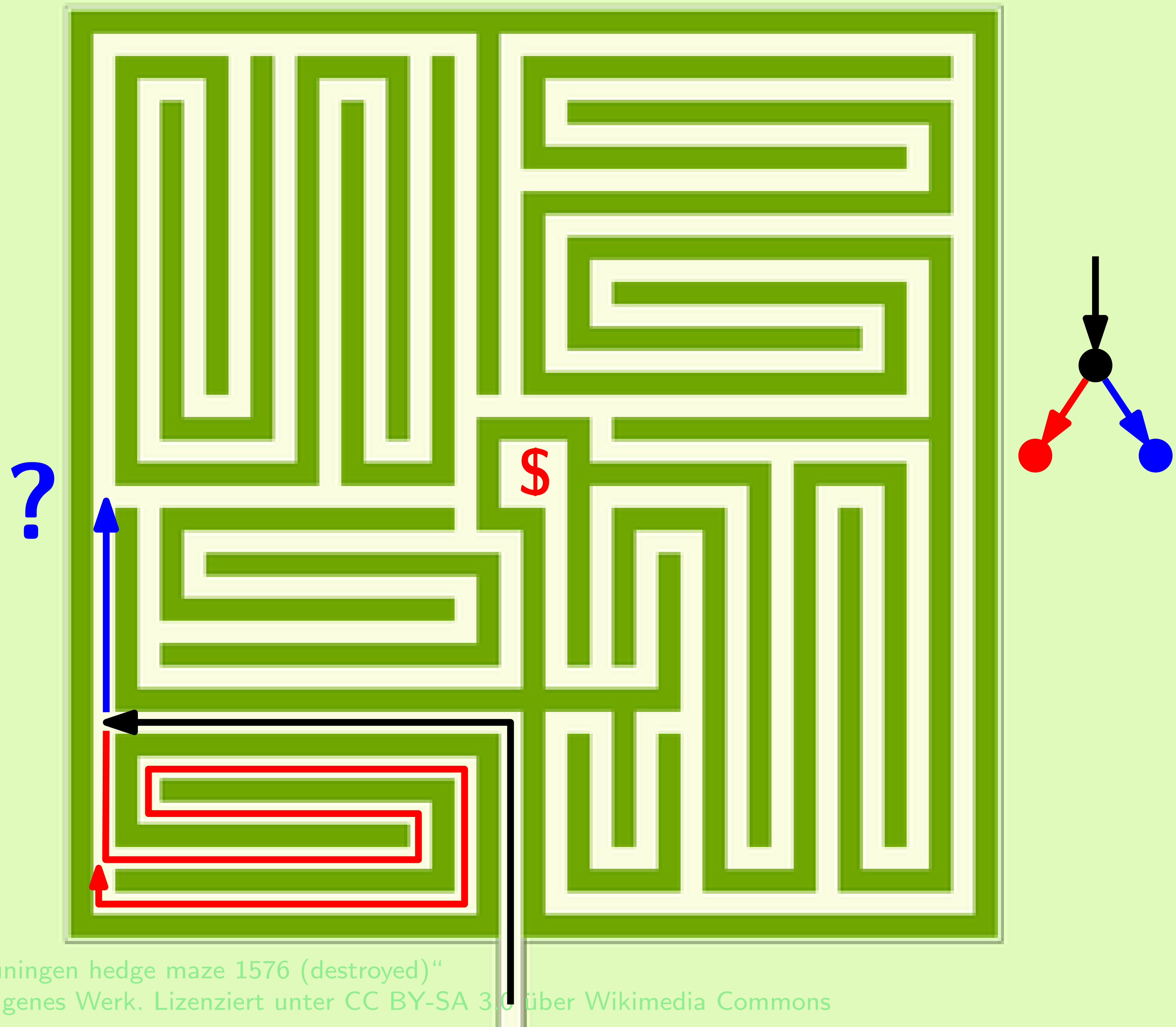


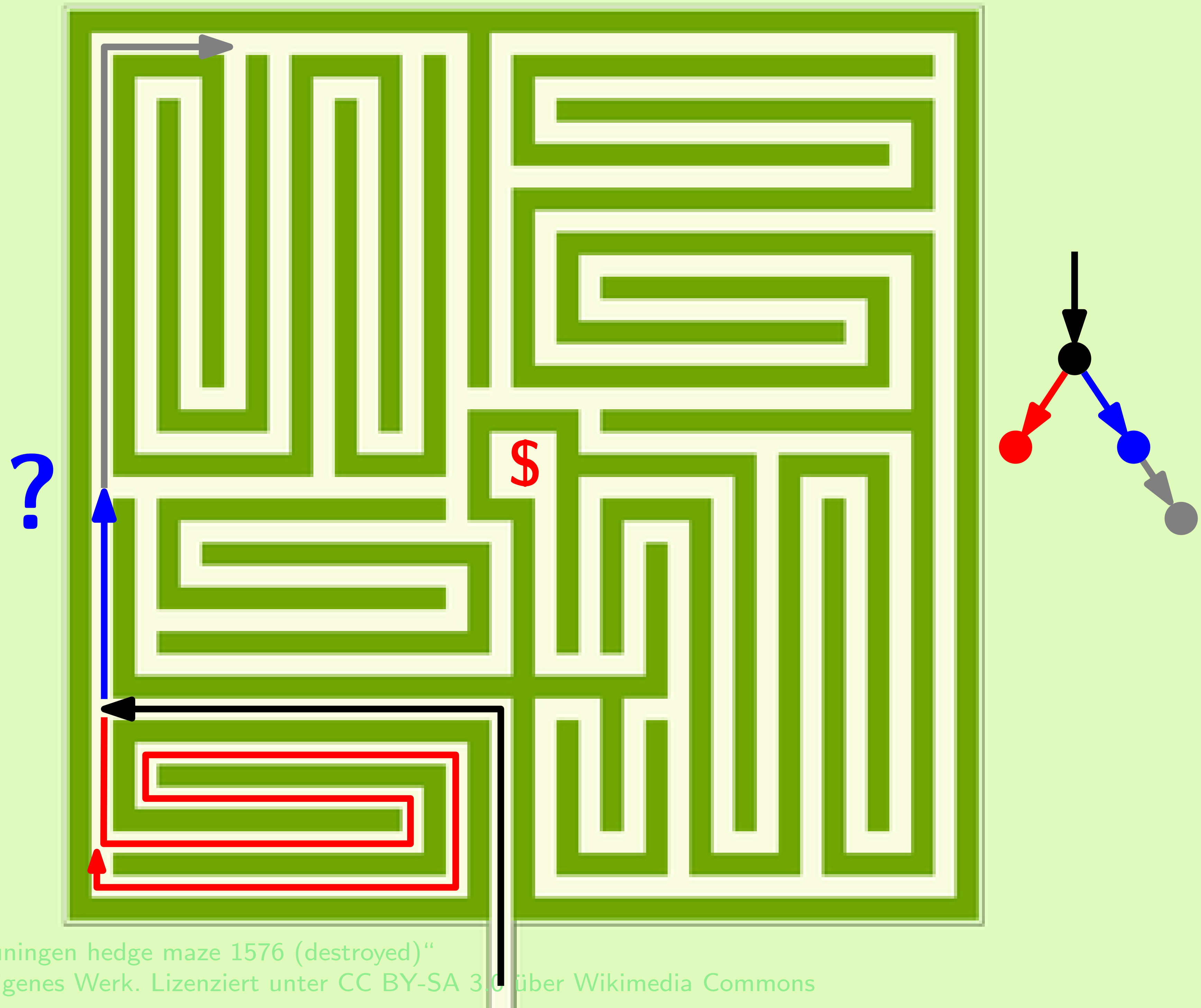


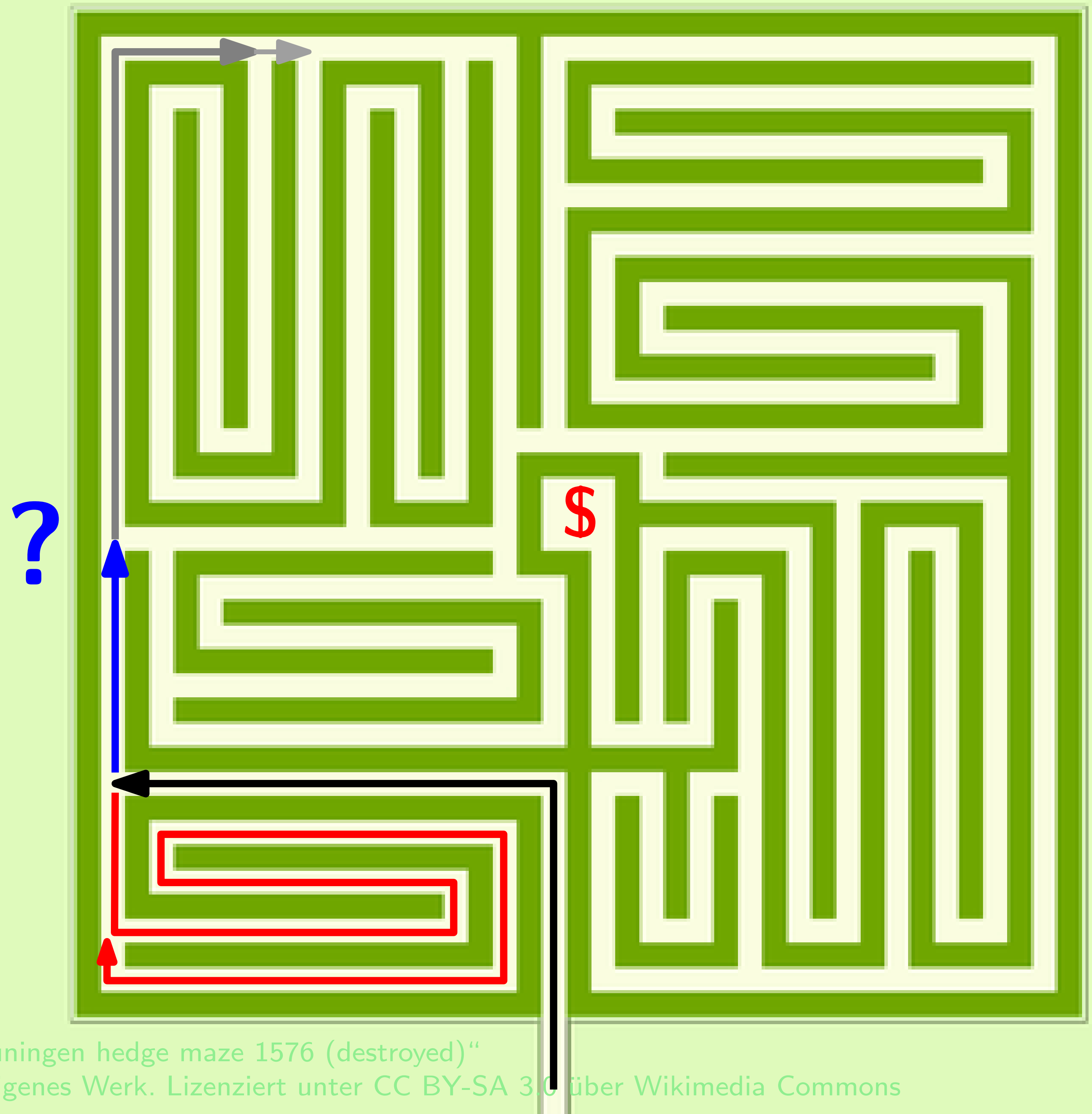


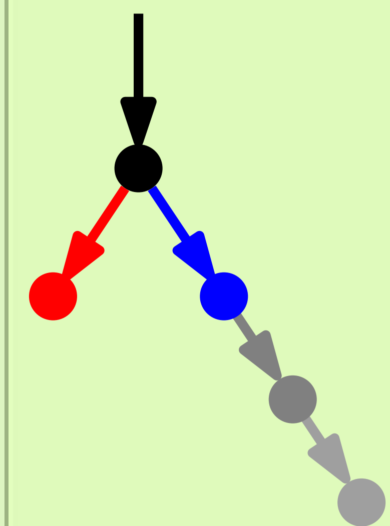
„Maze-01 Grüningen hedge maze 1576 (destroyed)“





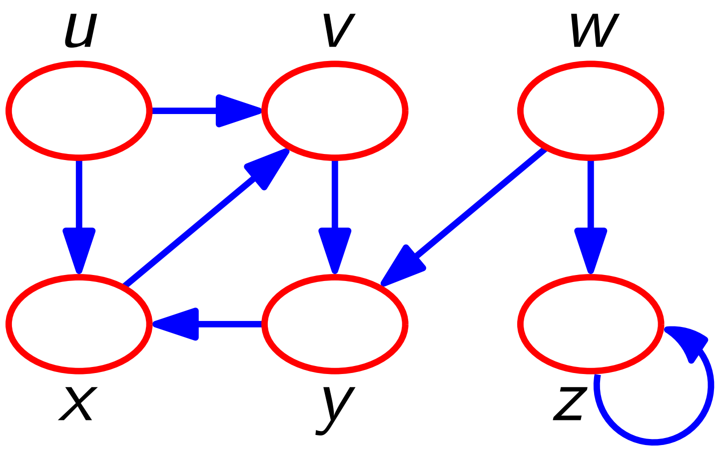






Tiefensuche

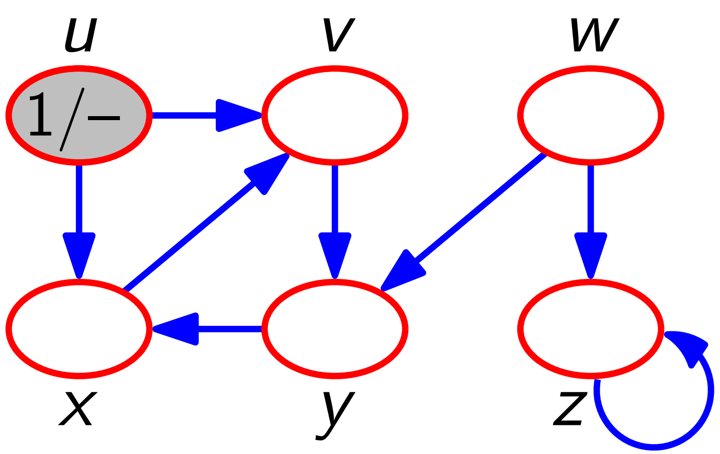
Eingabe: (un)gerichteter Graph G



Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d/u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)

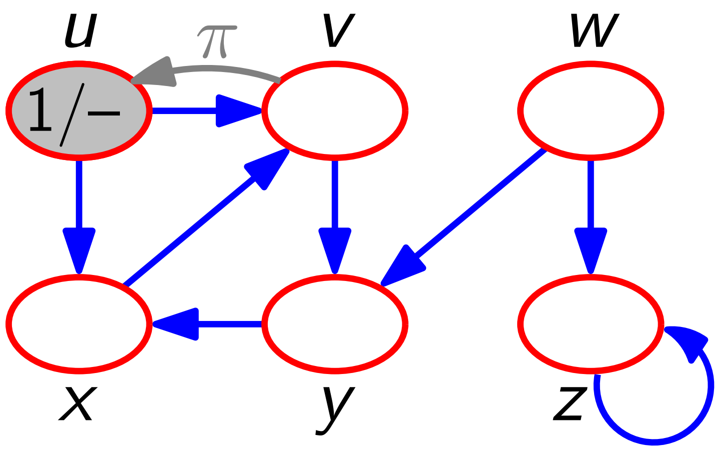


Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d / u.f)$ *discovery time* / *finish time*

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

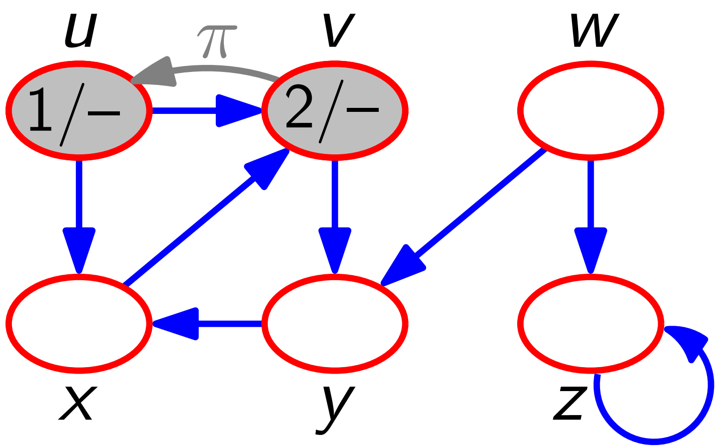


Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d \,/\, u.f)$ *discovery time* / *finish time*

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

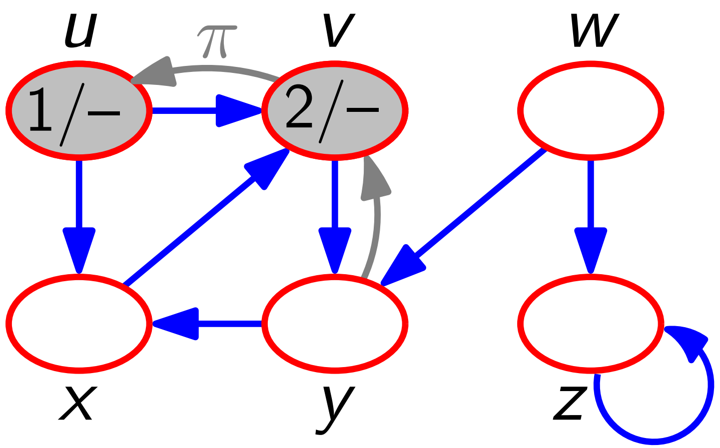


Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

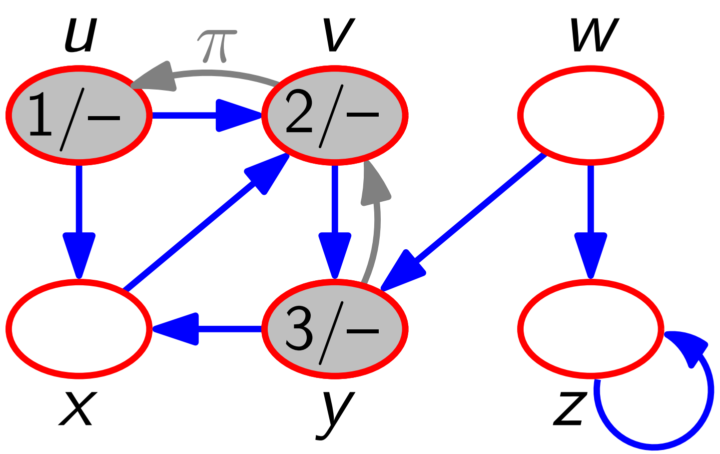


Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $\big(\overset{\textit{discovery time}}{u.d}\,/\,\overset{\textit{finish time}}{u.f}\big)$

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

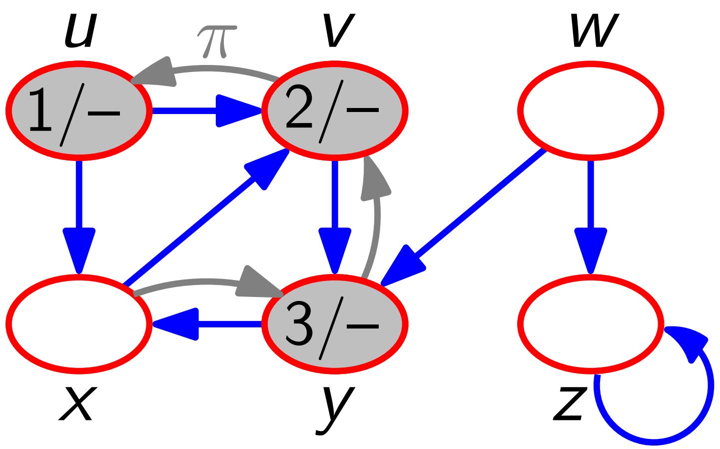


Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d \,/\, u.f)$ *discovery time* / *finish time*

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi} \right)$

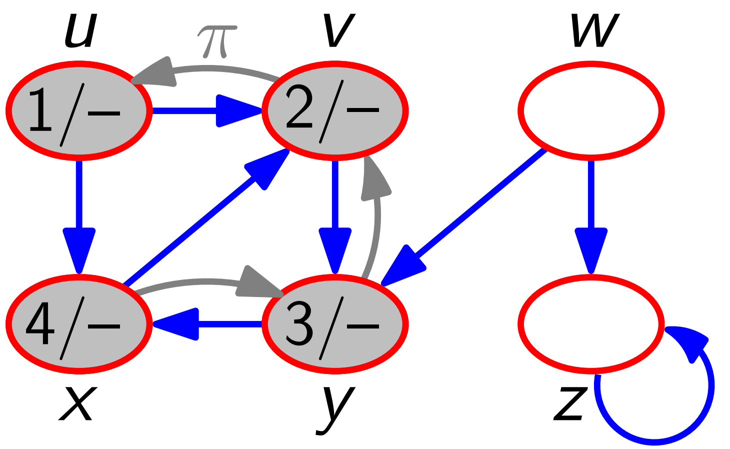


Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

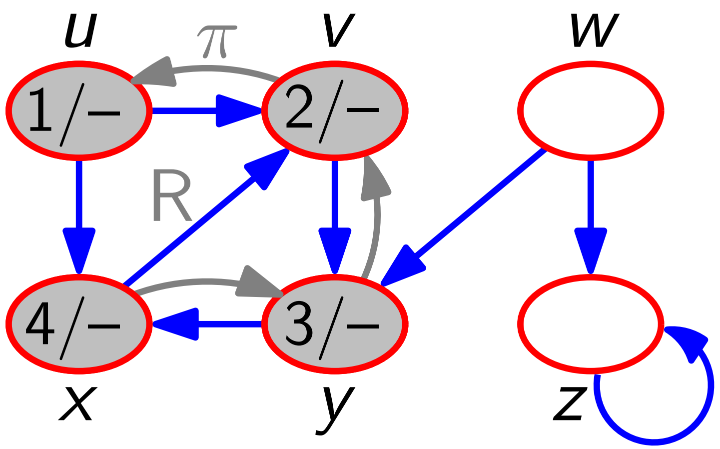


Tiefensuche

Eingabe: (un)gerichteter Graph G

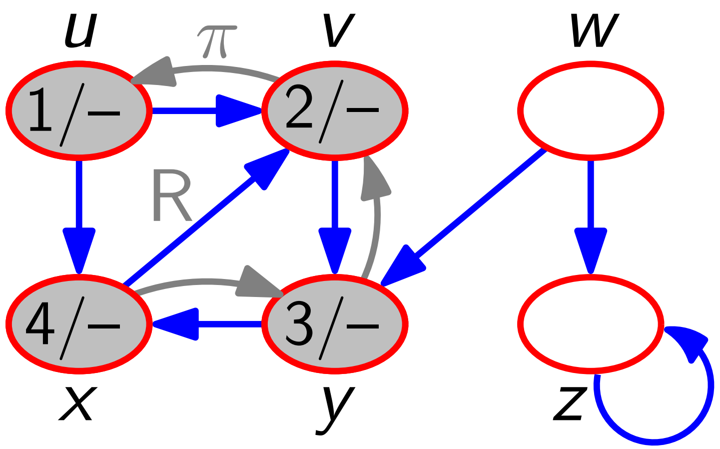
Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d/u.f)$ (discovery time / finish time)

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$



Tiefensuche

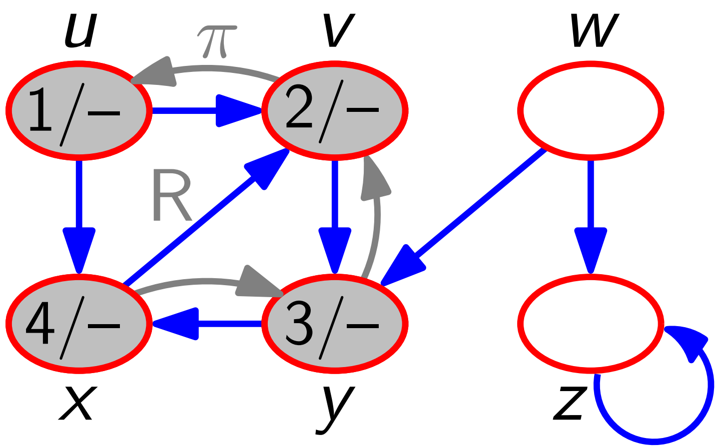
Eingabe: (un)gerichteter Graph G



Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d/u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:
  - Baumkanten (Kanten von G_π)
  - Rückwärtskanten (R)

Farbe Zielknoten:

Tiefensuche

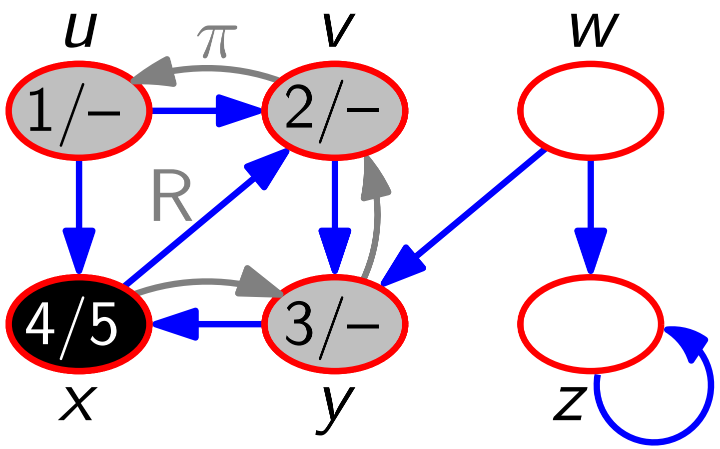


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle ($u.d$ / $u.f$) — *discovery time* / *finish time*
- DFS-Wald ($\xleftarrow{\pi}$)
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*

Tiefensuche

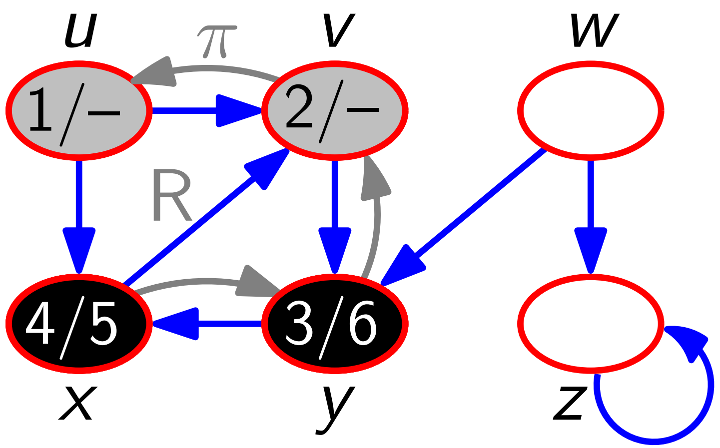


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
– Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (discovery time / finish time)
– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*

Tiefensuche



Eingabe: (un)gerichteter Graph G

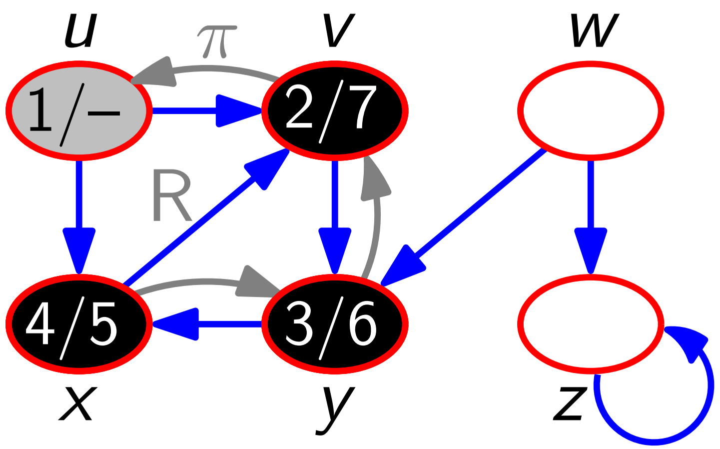
Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d / u.f)$ (discovery time / finish time)

– DFS-Wald $(\xleftarrow{\pi})$

– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*

Tiefensuche



Eingabe: (un)gerichteter Graph G

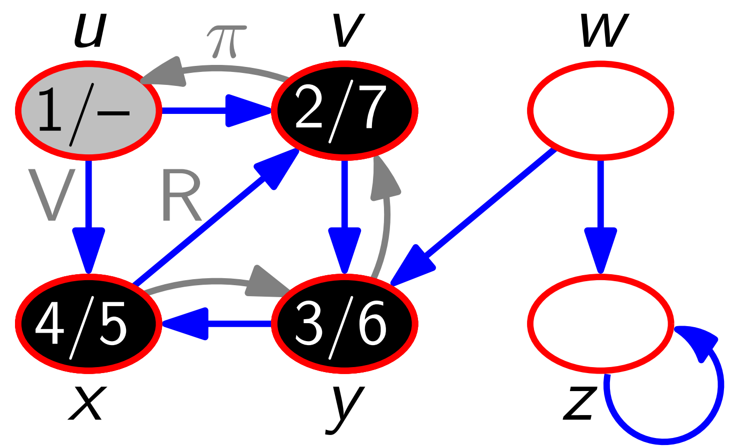
Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d \,/\, u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*

Tiefensuche



Eingabe: (un)gerichteter Graph G

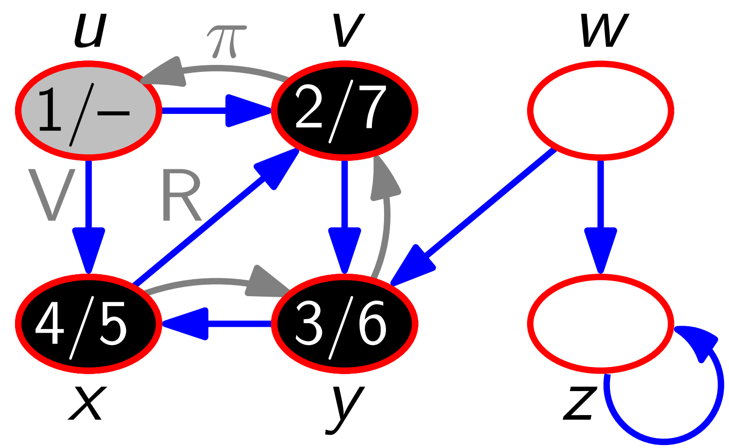
Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ *discovery time* *finish time*

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	weiss
• Rückwärtskanten (R)	grau

Tiefensuche



Eingabe: (un)gerichteter Graph G

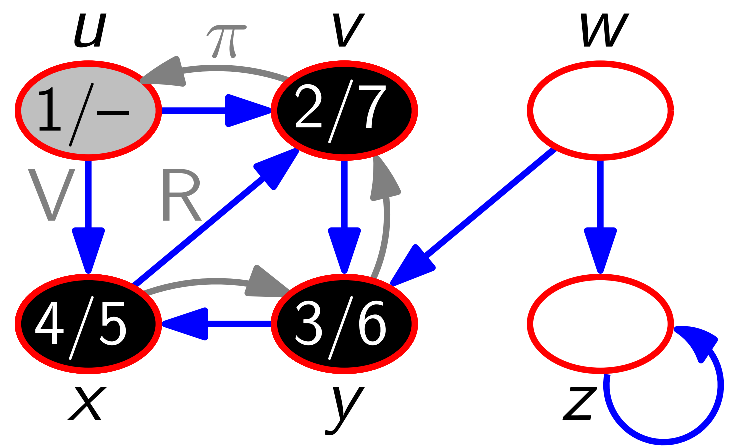
Ausgabe: – Besuchsintervalle ($\underbrace{u.d}_{\text{discovery time}}/\underbrace{u.f}_{\text{finish time}}$)

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	

Tiefensuche

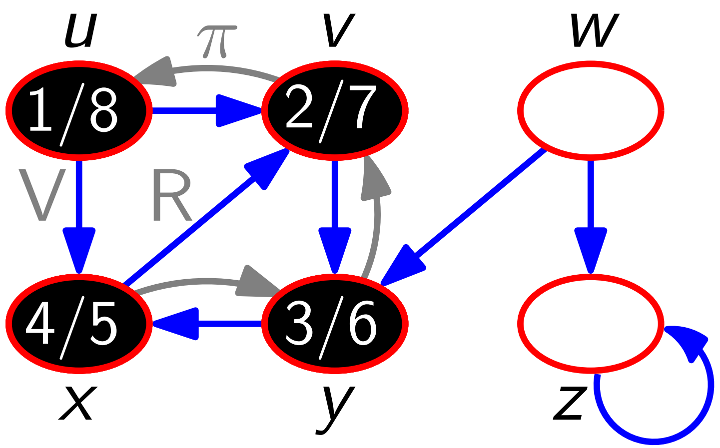


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
– Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz*

Tiefensuche



Eingabe: (un)gerichteter Graph G

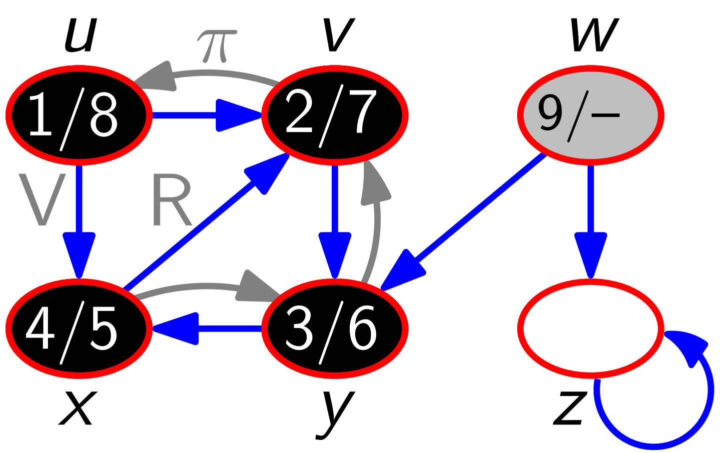
Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (discovery time / finish time)

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz*

Tiefensuche

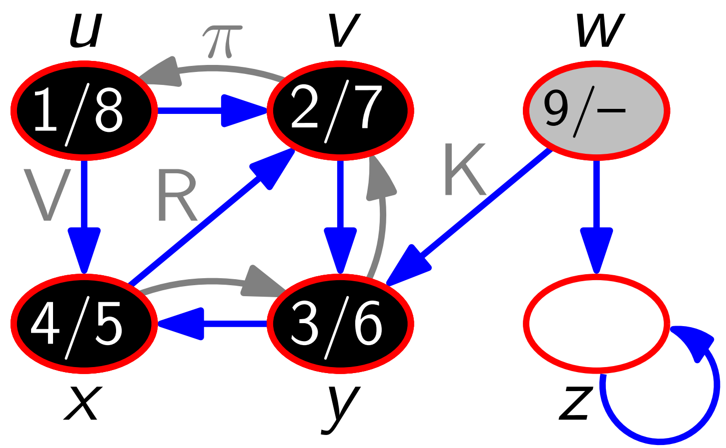


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (discovery time / finish time)
- DFS-Wald $(\xleftarrow{\pi})$
- Klassifizierung der Graphkanten:

Klassifizierung der Graphkanten	*Farbe Zielknoten:*
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz*

Tiefensuche



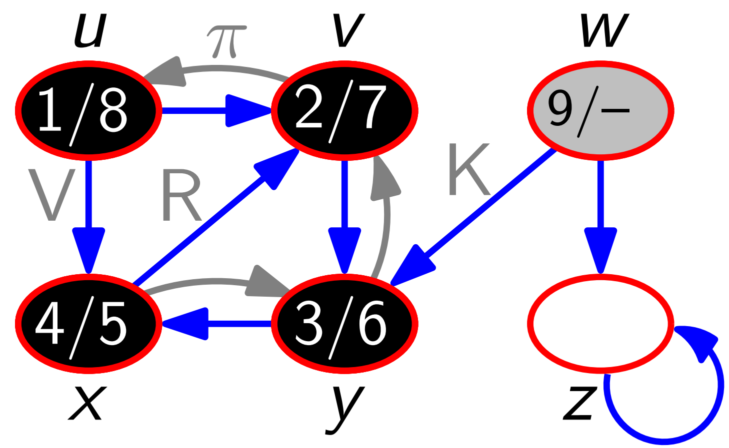
Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe: – Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)

– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$

– Klassifizierung der Graphkanten:	*Farbe Zielknoten:*
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz*

Tiefensuche



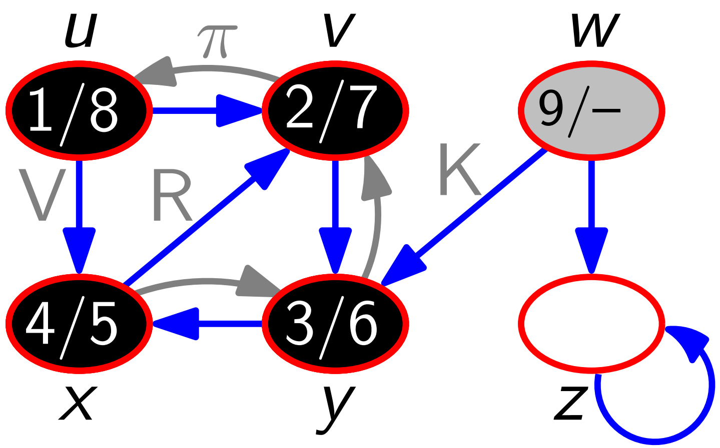
Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:

- Besuchsintervalle $(u.d / u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz*
• Kreuzkanten (K)	

Tiefensuche

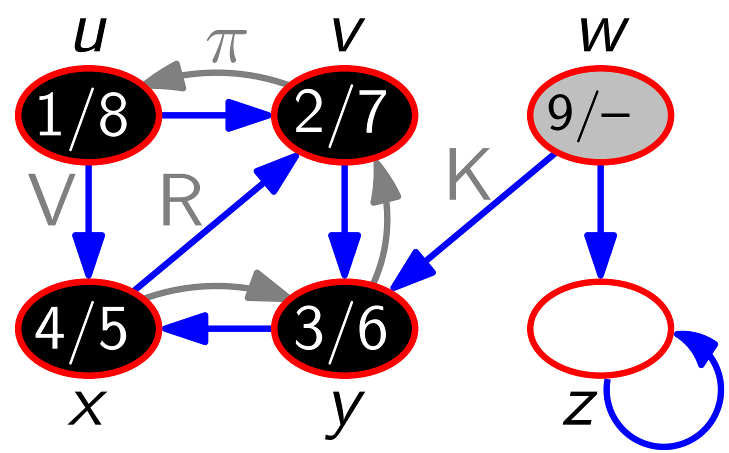


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(\underbrace{u.d}_{\textit{discovery time}} / \underbrace{u.f}_{\textit{finish time}})$
- DFS-Wald $(\overset{\pi}{\leftarrow})$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz*
• Kreuzkanten (K)	*schwarz*

Tiefensuche

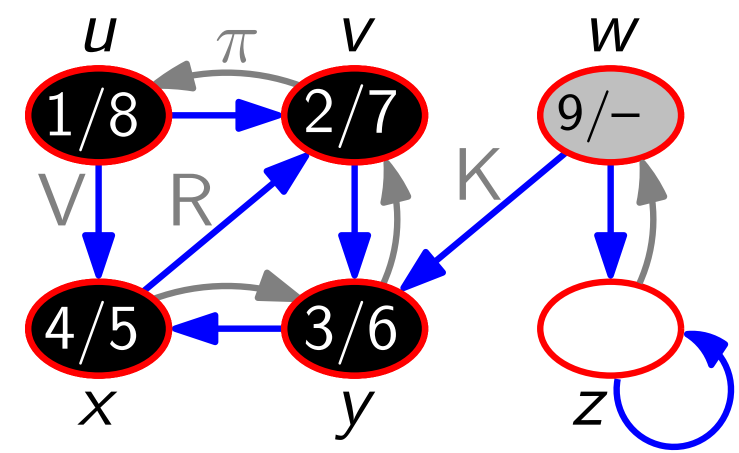


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d \,/\, u.f)$ — *discovery time* / *finish time*
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.$d <$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.$d >$ ziel.d

Tiefensuche

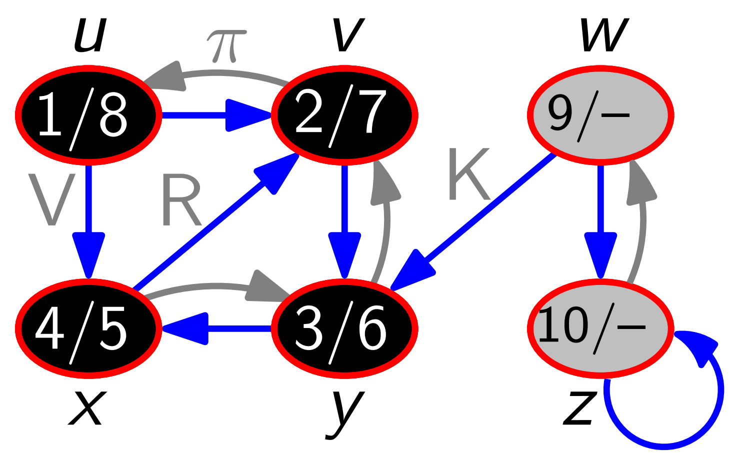


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

Klassifizierung der Graphkanten:	*Farbe Zielknoten:*
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.d $<$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.d $>$ ziel.d

Tiefensuche

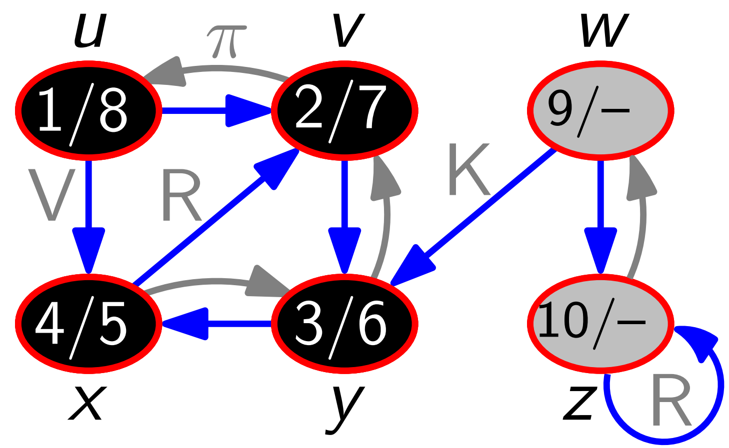


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
– Besuchsintervalle $(u.d / u.f)$ *discovery time* *finish time*
– DFS-Wald $(\overset{\pi}{\longleftarrow})$
– Klassifizierung der Graphkanten:

Klassifizierung der Graphkanten:	*Farbe Zielknoten:*
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.$d <$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.$d >$ ziel.d

Tiefensuche

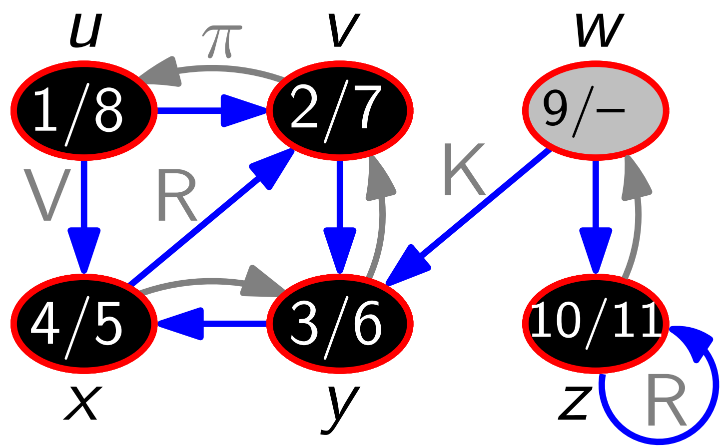


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle ($u.d$ / $u.f$) — *discovery time* / *finish time*
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.d $<$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.d $>$ ziel.d

Tiefensuche



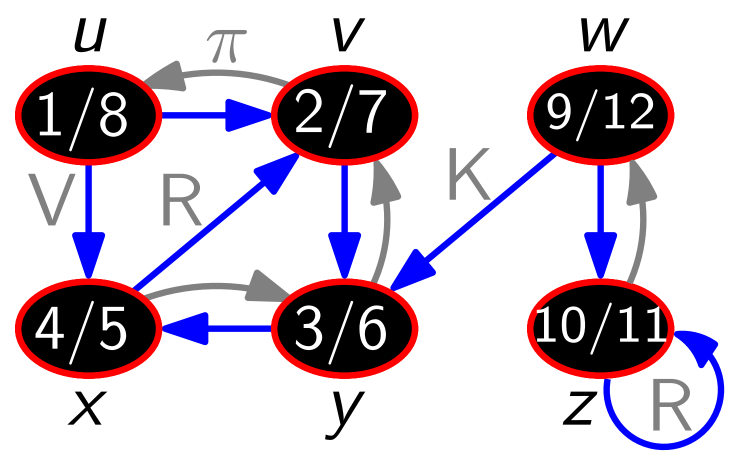
Eingabe: (un)gerichteter Graph G

discovery time finish time

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d/u.f)$
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.$d <$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.$d >$ ziel.d

Tiefensuche

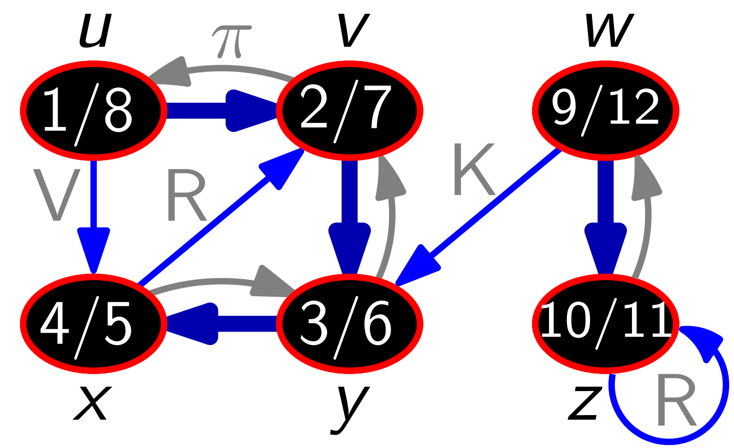


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
• Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.d $<$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.d $>$ ziel.d

Tiefensuche

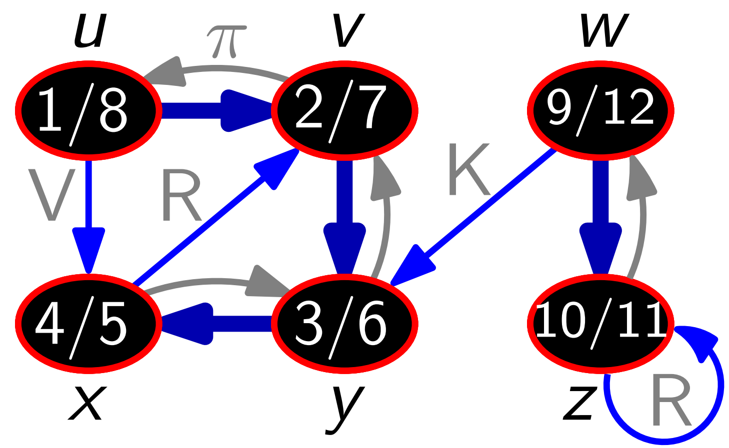


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(\underbrace{u.d}_{\text{discovery time}} / \underbrace{u.f}_{\text{finish time}})$
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
● Baumkanten (Kanten von G_π)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.d $<$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.d $>$ ziel.d

Tiefensuche

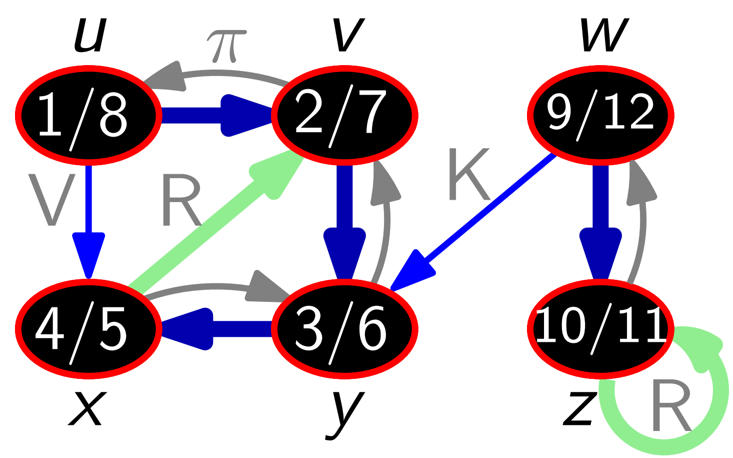


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
– Besuchsintervalle ($u.d$ / $u.f$) *discovery time* / *finish time*
– DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
– Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
● Baumkanten (Kanten von G_π) Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)	*weiss*
• Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.d $<$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.d $>$ ziel.d

Tiefensuche

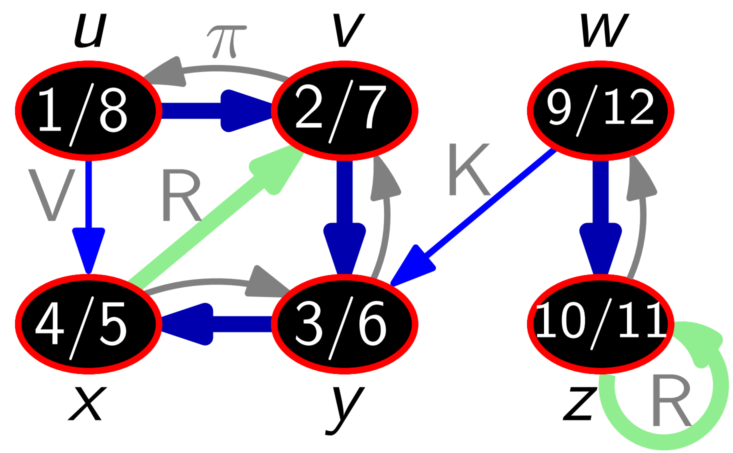


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

Klassifizierung der Graphkanten:	*Farbe Zielknoten:*
● Baumkanten (Kanten von G_π) Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)	*weiss*
● Rückwärtskanten (R)	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.d < ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.d > ziel.d

Tiefensuche

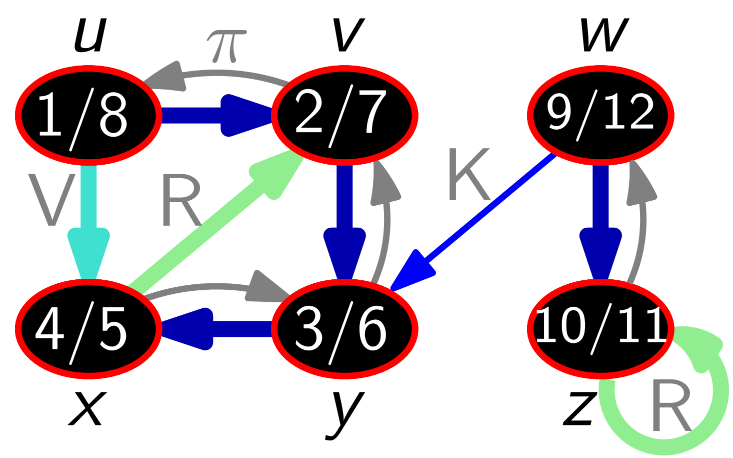


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d/u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
● Baumkanten (Kanten von G_π) Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)	*weiss*
● Rückwärtskanten (R) Nicht-Baumkanten zu einem Vorgängerknoten	*grau*
• Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.$d <$ ziel.d
• Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.$d >$ ziel.d

Tiefensuche

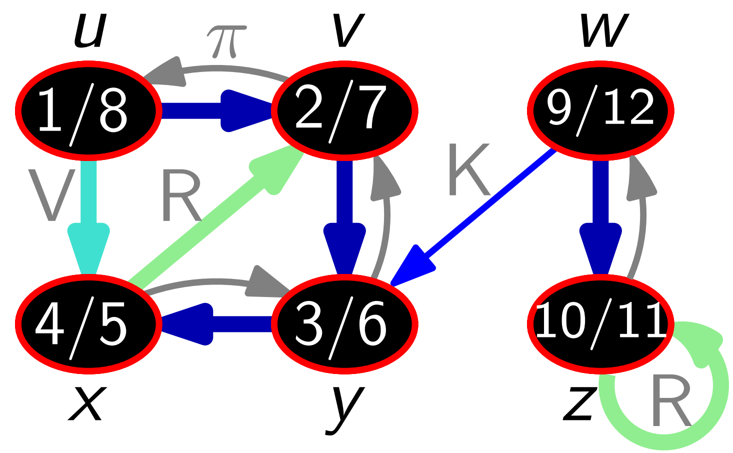


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d / u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
● Baumkanten (Kanten von G_π) Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)	*weiss*
● Rückwärtskanten (R) Nicht-Baumkanten zu einem Vorgängerknoten	*grau*
● Vorwärtskanten (V)	*schwarz und* start.d $<$ ziel.d
● Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.d $>$ ziel.d

Tiefensuche

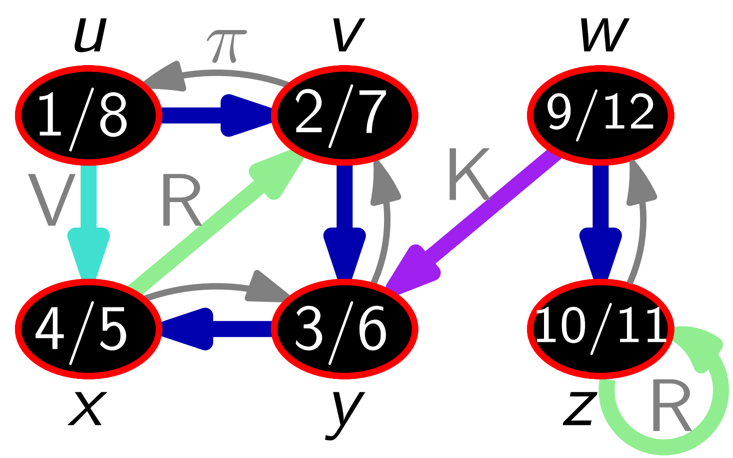


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d/u.f)$ — *discovery time* / *finish time*
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
● Baumkanten (Kanten von G_π) Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)	*weiss*
● Rückwärtskanten (R) Nicht-Baumkanten zu einem Vorgängerknoten	*grau*
● Vorwärtskanten (V) Nicht-Baumkanten zu einem Nachfolgerknoten	*schwarz und* start.$d <$ ziel.d
● Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.$d >$ ziel.d

Tiefensuche

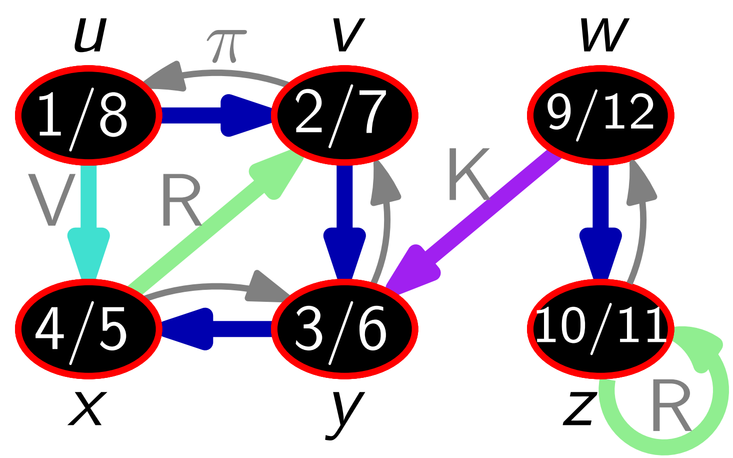


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d/u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $(\xleftarrow{\pi})$
- Klassifizierung der Graphkanten:

	Farbe Zielknoten:
● Baumkanten (Kanten von G_π) Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)	*weiss*
● Rückwärtskanten (R) Nicht-Baumkanten zu einem Vorgängerknoten	*grau*
● Vorwärtskanten (V) Nicht-Baumkanten zu einem Nachfolgerknoten	*schwarz und* start.$d <$ ziel.d
● Kreuzkanten (K)	*schwarz und* start.$d >$ ziel.d

Tiefensuche

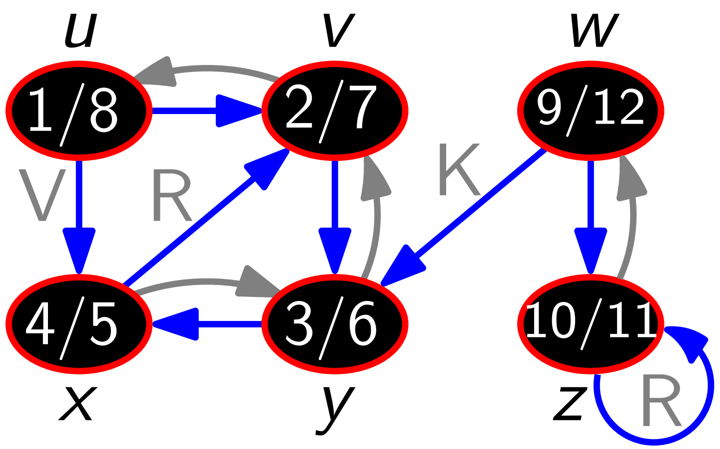


Eingabe: (un)gerichteter Graph G

Ausgabe:
- Besuchsintervalle $(u.d\,/\,u.f)$ (*discovery time* / *finish time*)
- DFS-Wald $\left(\xleftarrow{\pi}\right)$
- Klassifizierung der Graphkanten:

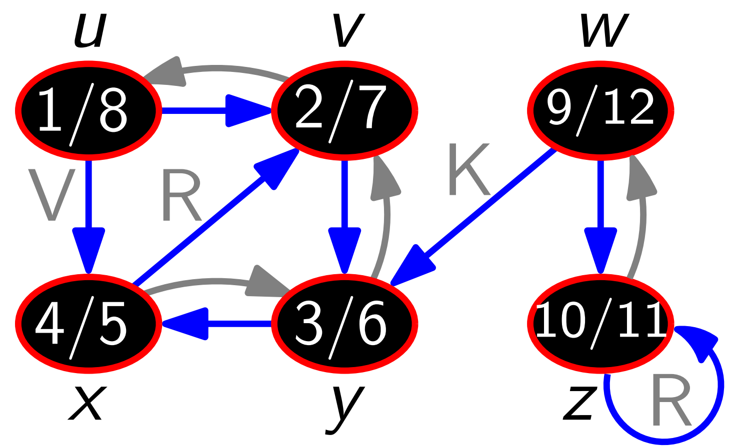
	Farbe Zielknoten:
● Baumkanten (Kanten von G_π) Kanten des DFS-Waldes (entgegen π gerichtet)	*weiss*
● Rückwärtskanten (R) Nicht-Baumkanten zu einem Vorgängerknoten	*grau*
● Vorwärtskanten (V) Nicht-Baumkanten zu einem Nachfolgerknoten	*schwarz und* start.d $<$ ziel.d
● Kreuzkanten (K) Kanten, bei denen kein Endpunkt Vorgänger des anderen ist.	*schwarz und* start.d $>$ ziel.d

Tiefensuche – Pseudocode



Tiefensuche – Pseudocode

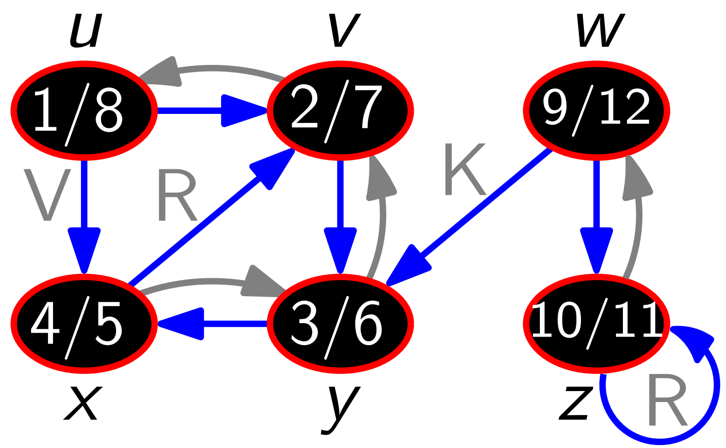
DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)



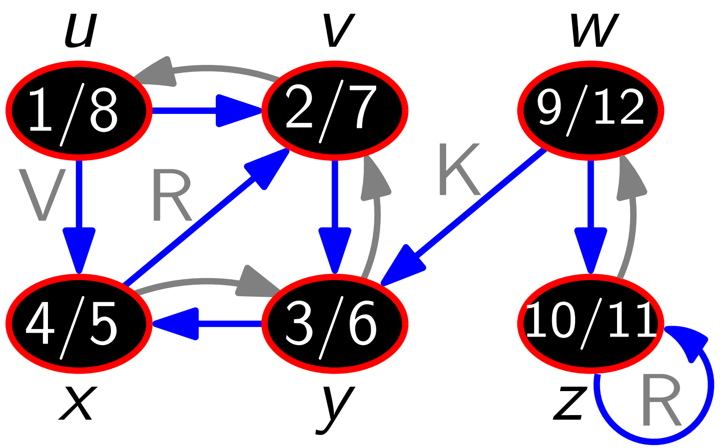
Tiefensuche – Pseudocode

DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$



Tiefensuche – Pseudocode



DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

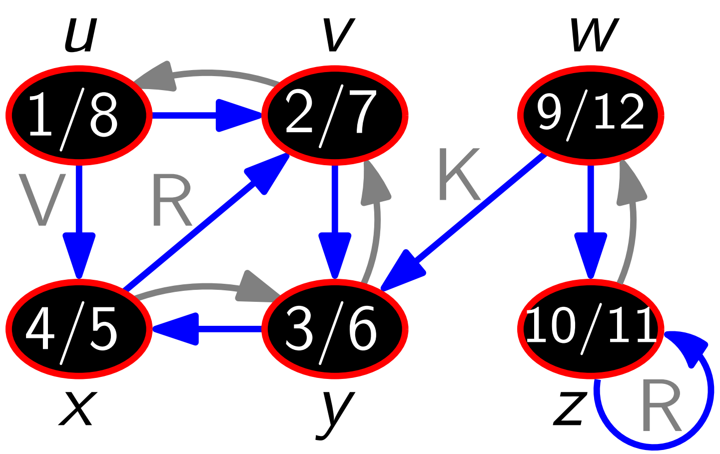
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$

Für jeden Knoten u von G ist
- $u.d$ der Zeitpunkt der Entdeckung,
- $u.f$ der Abschluss-Zeitpunkt;

Besuchsintervall von u ist $[u.d, u.f]$.

Tiefensuche – Pseudocode

DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)



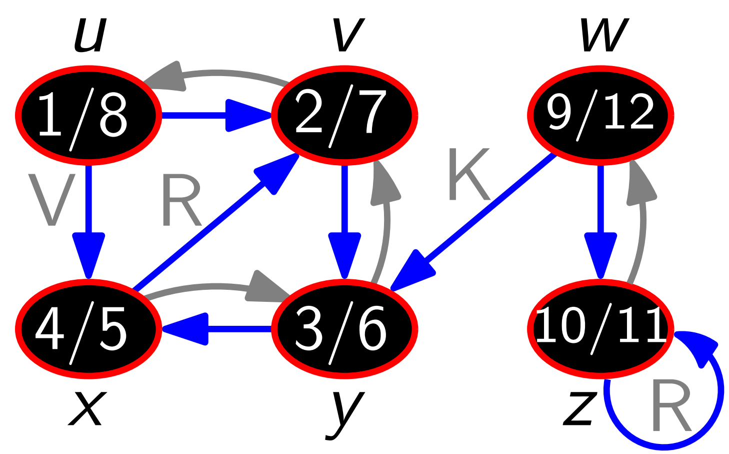
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**

Für jeden Knoten u von G ist
- $u.d$ der Zeitpunkt der Entdeckung,
- $u.f$ der Abschluss-Zeitpunkt;

Besuchsintervall von u ist $[u.d, u.f]$.

Tiefensuche – Pseudocode

DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.\mathit{color} = \mathit{white}$
    $u.\pi = \mathit{nil}$
  $\mathit{time} = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.\mathit{color} == \mathit{white}$ **then** DFSVisit(G, u)



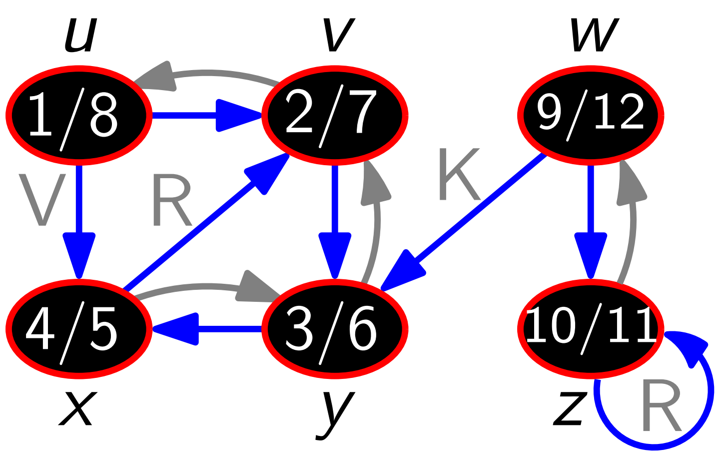
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $\mathit{time} = \mathit{time} + 1$
  $u.d = \mathit{time}$; $u.\mathit{color} = \mathit{gray}$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**

Ergänzen Sie den Code
in und nach der foreach-Schleife!
Benutzen Sie Rekursion.

Für jeden Knoten u von G ist
- $u.d$ der Zeitpunkt der Entdeckung,
- $u.f$ der Abschluss-Zeitpunkt;

Besuchsintervall von u ist $[u.d, u.f]$.

Tiefensuche – Pseudocode



DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

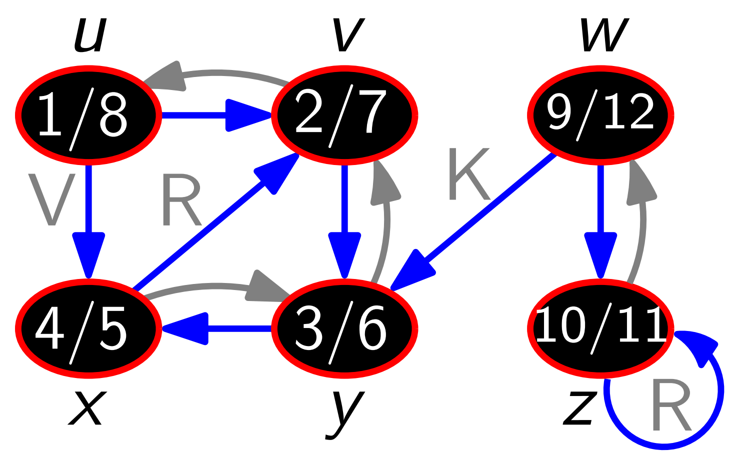
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Für jeden Knoten u von G ist
- $u.d$ der Zeitpunkt der Entdeckung,
- $u.f$ der Abschluss-Zeitpunkt;

Besuchsintervall von u ist $[u.d, u.f]$.

Tiefensuche – Pseudocode

DFS(Graph $G = (V, E)$)
foreach $u \in V$ **do**
  $u.color = white$
  $u.\pi = nil$
$time = 0$ // globale Variable!
foreach $u \in V$ **do**
  if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

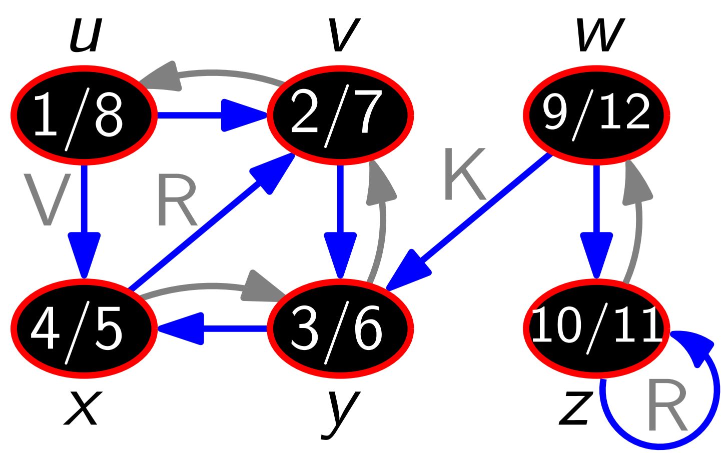


DFSVisit(Graph G, Vertex u)
$time = time + 1$
$u.d = time$; $u.color = gray$
foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
  if $v.color == white$ **then**
    $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
$time = time + 1$
$u.f = time$; $u.color = black$

Tiefensuche – Pseudocode

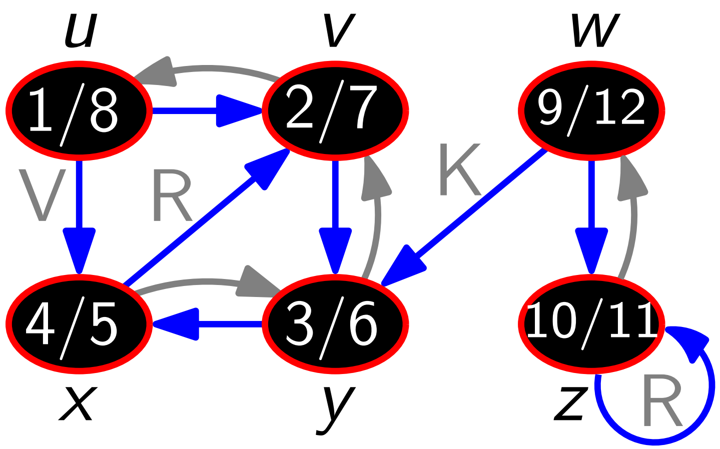
DFS(Graph $G = (V, E)$)
- **foreach** $u \in V$ **do**
  - $u.color = white$
  - $u.\pi = nil$
- $time = 0$ // globale Variable!
- **foreach** $u \in V$ **do**
  - **if** $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
- $time = time + 1$
- $u.d = time$; $u.color = gray$
- **foreach** $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
  - **if** $v.color == white$ **then**
    - $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
- $time = time + 1$
- $u.f = time$; $u.color = black$



Laufzeit von DFS?

Tiefensuche – Pseudocode



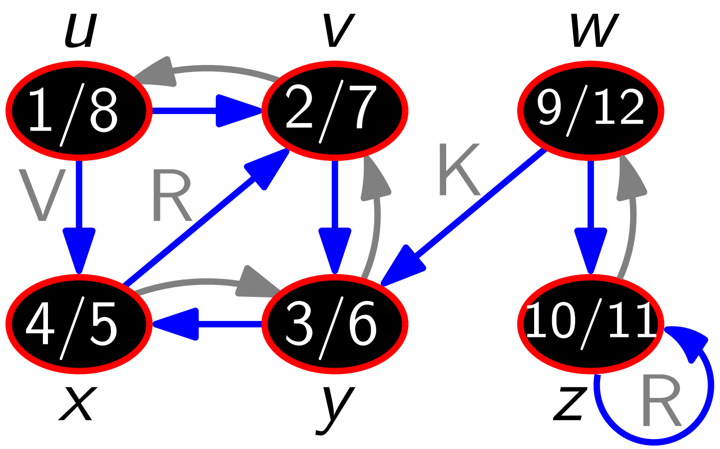
DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in$ Adj[u] **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Laufzeit von DFS?

- DFSVisit wird nur für weiße Knoten aufgerufen.

Tiefensuche – Pseudocode



DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

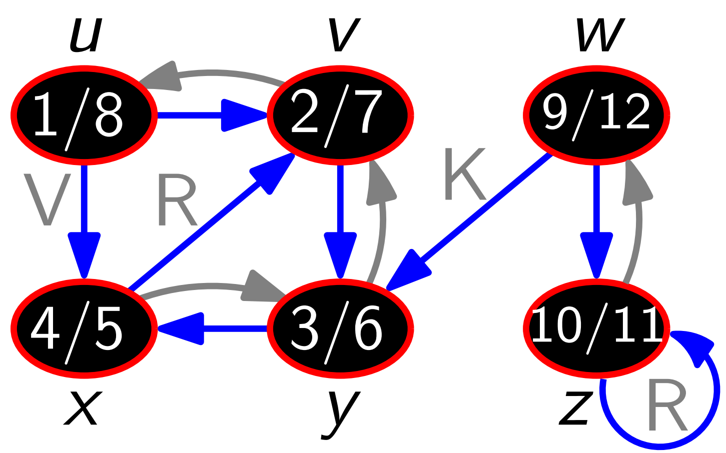
Laufzeit von DFS?

- DFSVisit wird nur für weiße Knoten aufgerufen.
- In DFSVisit wird der neue Knoten sofort grau gefärbt.

Tiefensuche – Pseudocode

DFS(Graph $G = (V, E)$)
foreach $u \in V$ **do**
  $u.color = white$
  $u.\pi = nil$
$time = 0$ // globale Variable!
foreach $u \in V$ **do**
  if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
$time = time + 1$
$u.d = time$; $u.color = gray$
foreach $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
  if $v.color == white$ **then**
    $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
$time = time + 1$
$u.f = time$; $u.color = black$

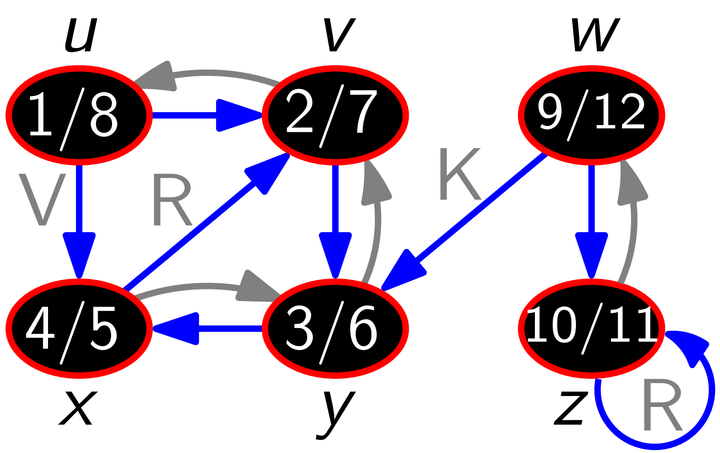


Laufzeit von DFS?

- DFSVisit wird nur für weiße Knoten aufgerufen.
- In DFSVisit wird der neue Knoten sofort grau gefärbt.

$\Rightarrow$ DFSVisit wird für jeden Knoten genau $1\times$ aufgerufen.

Tiefensuche – Pseudocode



DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

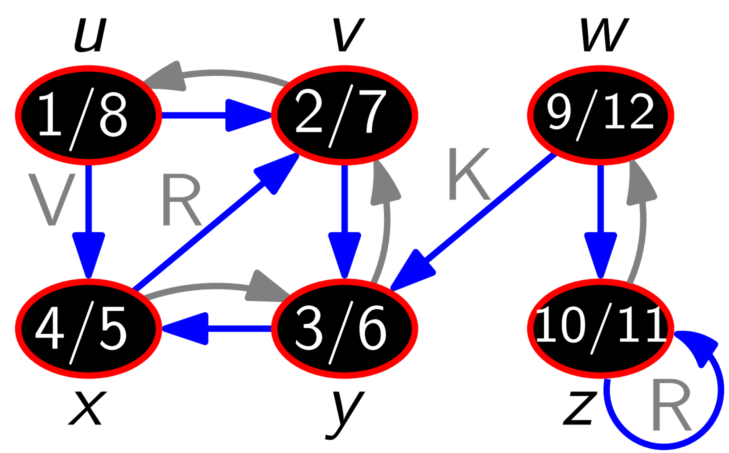
Laufzeit von DFS?

- DFSVisit wird nur für weiße Knoten aufgerufen.
- In DFSVisit wird der neue Knoten sofort grau gefärbt.

$\Rightarrow$ DFSVisit wird für jeden Knoten genau $1\times$ aufgerufen.

- DFS ohne **if** $O(V)$ Zeit
  DFSVisit ohne Rek. $O(\deg^{\text{(out-)}} u)$

Tiefensuche – Pseudocode



DFS(Graph $G = (V, E)$)
  foreach $u \in V$ **do**
    $u.color = white$
    $u.\pi = nil$
  $time = 0$ // globale Variable!
  foreach $u \in V$ **do**
    if $u.color == white$ **then** DFSVisit(G, u)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in$ Adj[u] **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Laufzeit von DFS?

- DFSVisit wird nur für weiße Knoten aufgerufen.
- In DFSVisit wird der neue Knoten sofort grau gefärbt.

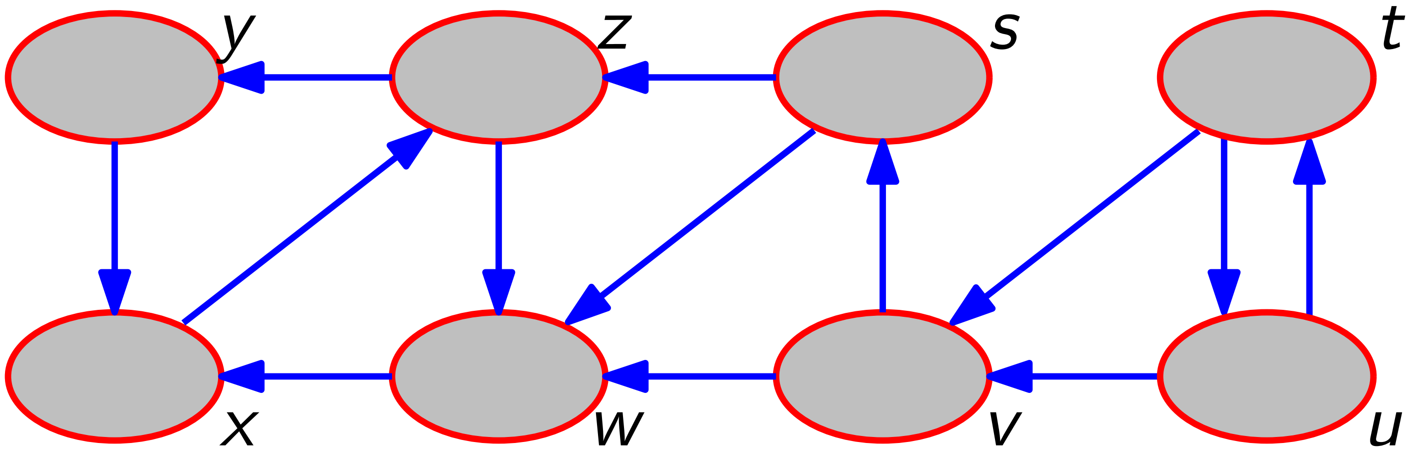
$\Rightarrow$ DFSVisit wird für jeden Knoten genau $1\times$ aufgerufen.

- DFS ohne **if** $O(V)$ Zeit

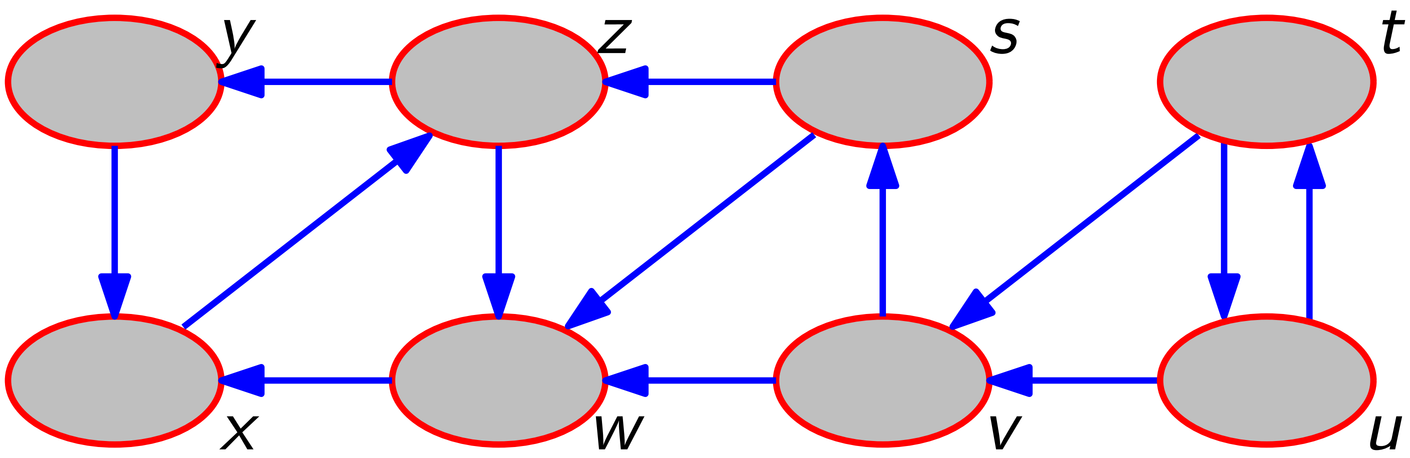
  DFSVisit ohne Rek. $O(\overset{\text{(out-)}}{\deg}\, u)$

  DFS gesamt $O(V + E)$ Zeit

Tiefensuche – Eigenschaften



Tiefensuche – Eigenschaften

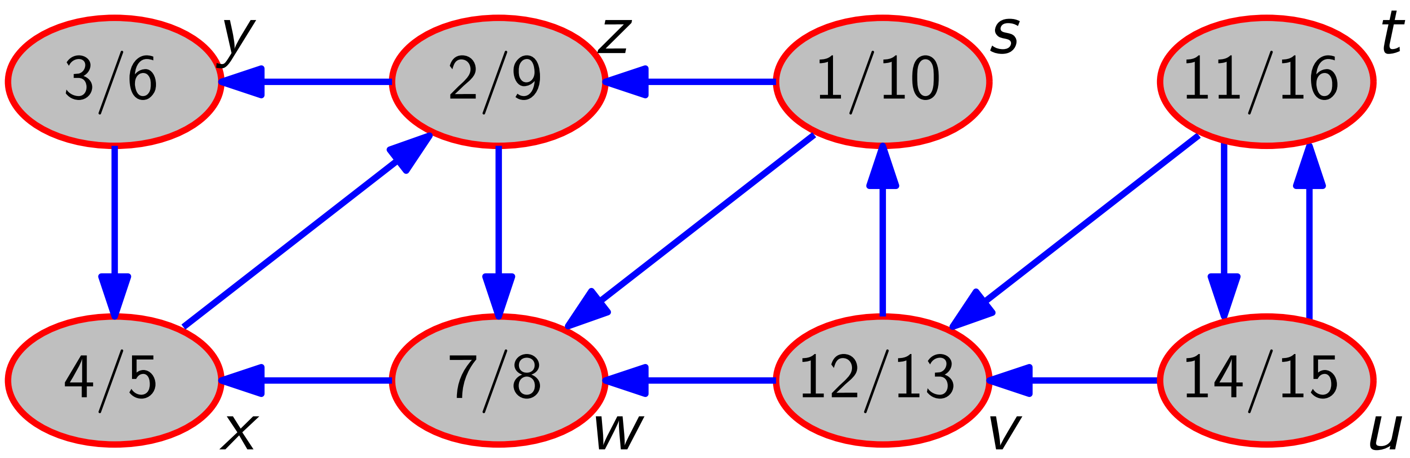


Aufgabe: Kopieren Sie obigen Graphen.

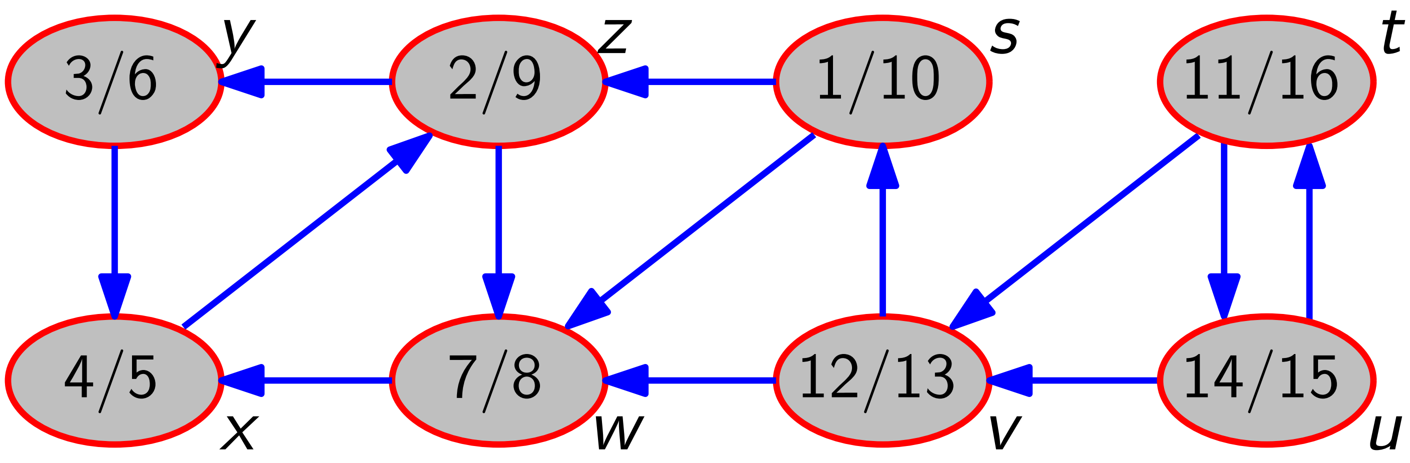
Berechnen Sie dann mit DFS alle Besuchsintervalle.

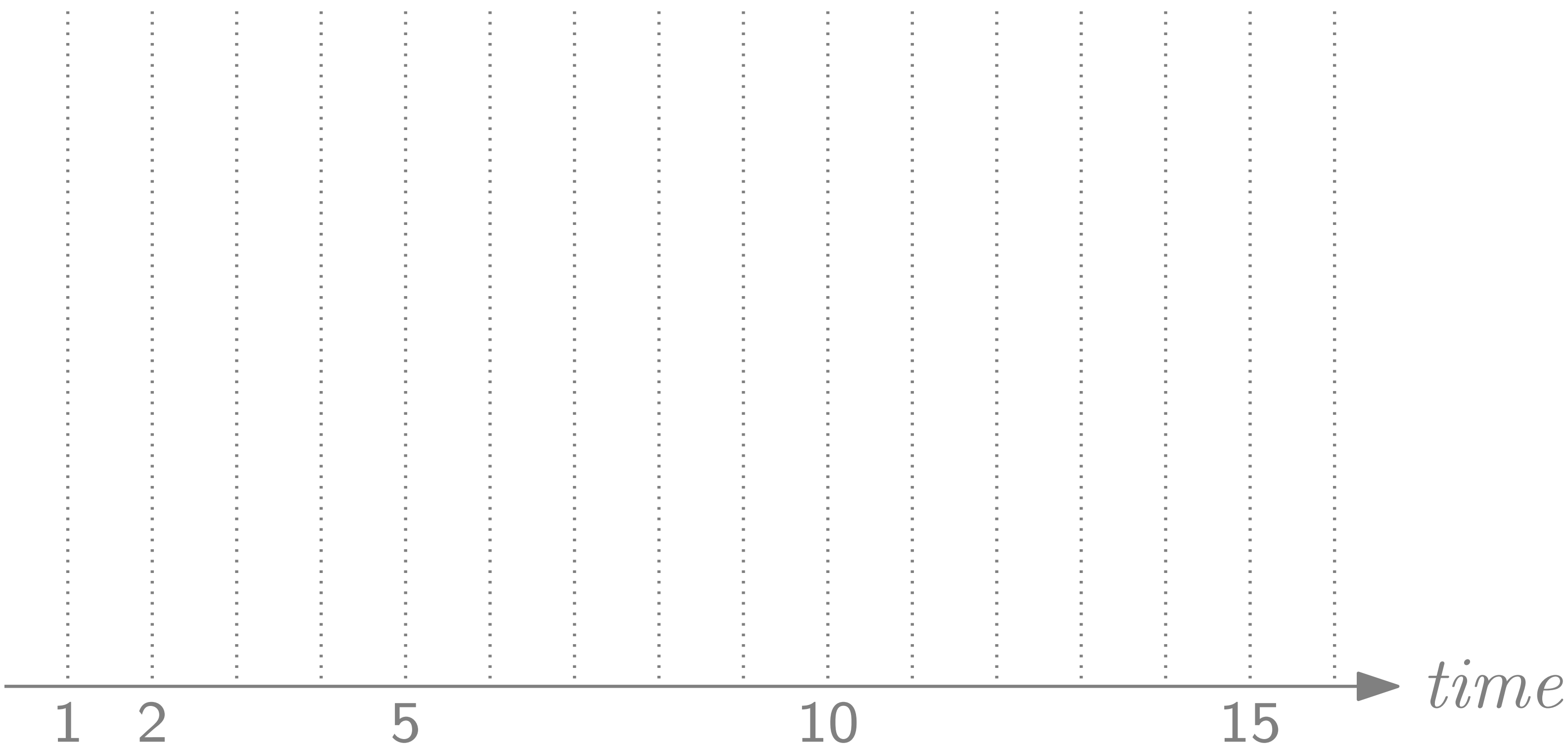
Beginnen Sie mit s. Wenn Sie eine Wahl haben, nehmen Sie zuerst den *obersten* verfügbaren Knoten.

Tiefensuche – Eigenschaften

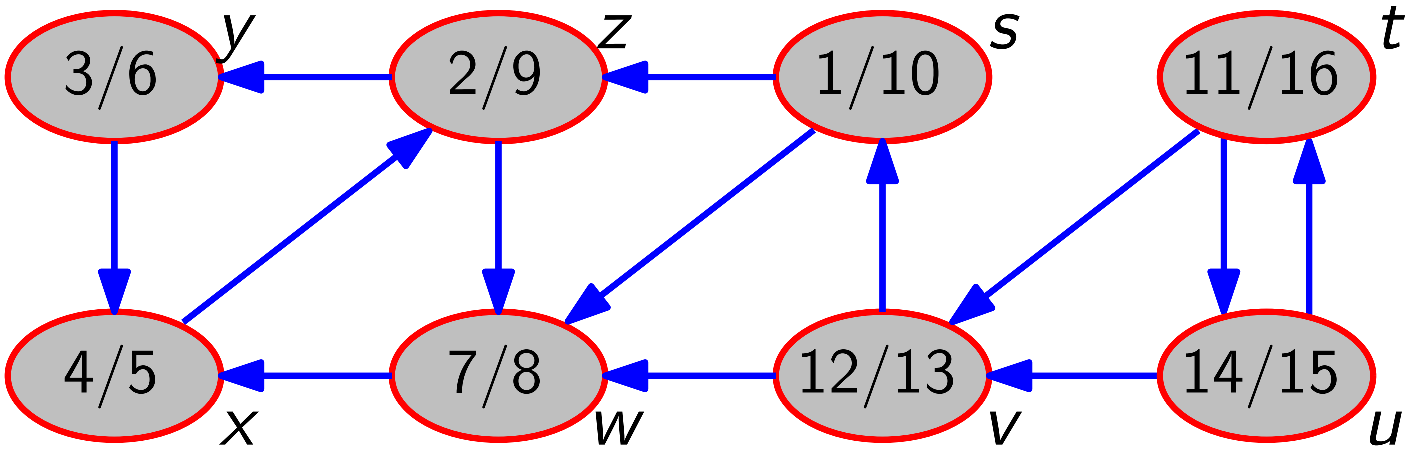


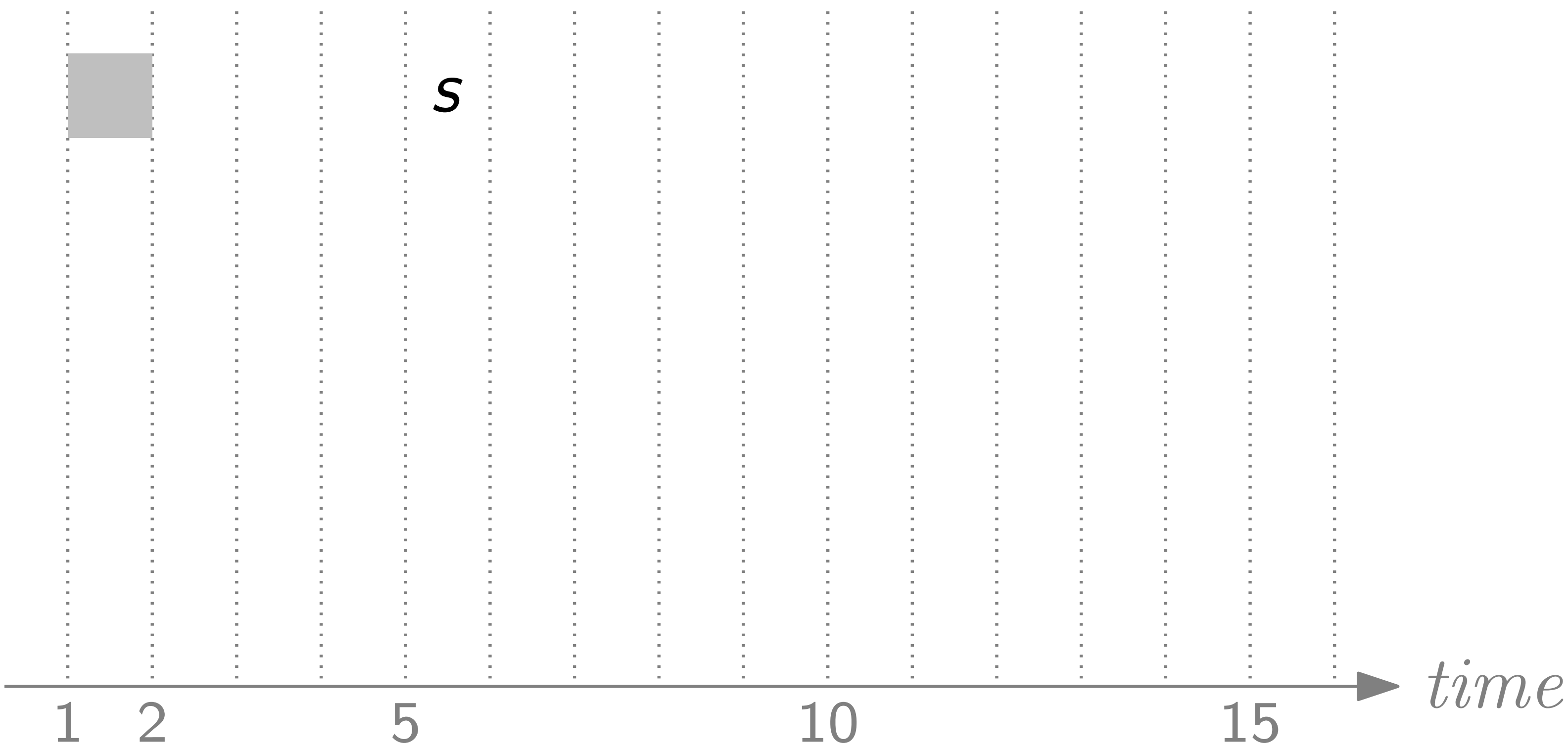
Tiefensuche – Eigenschaften



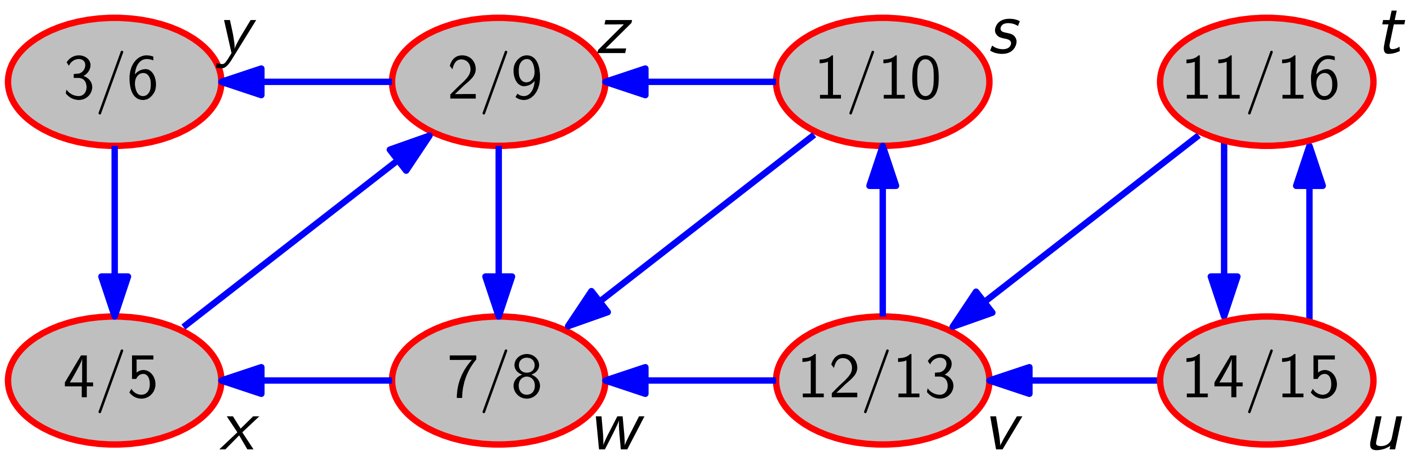


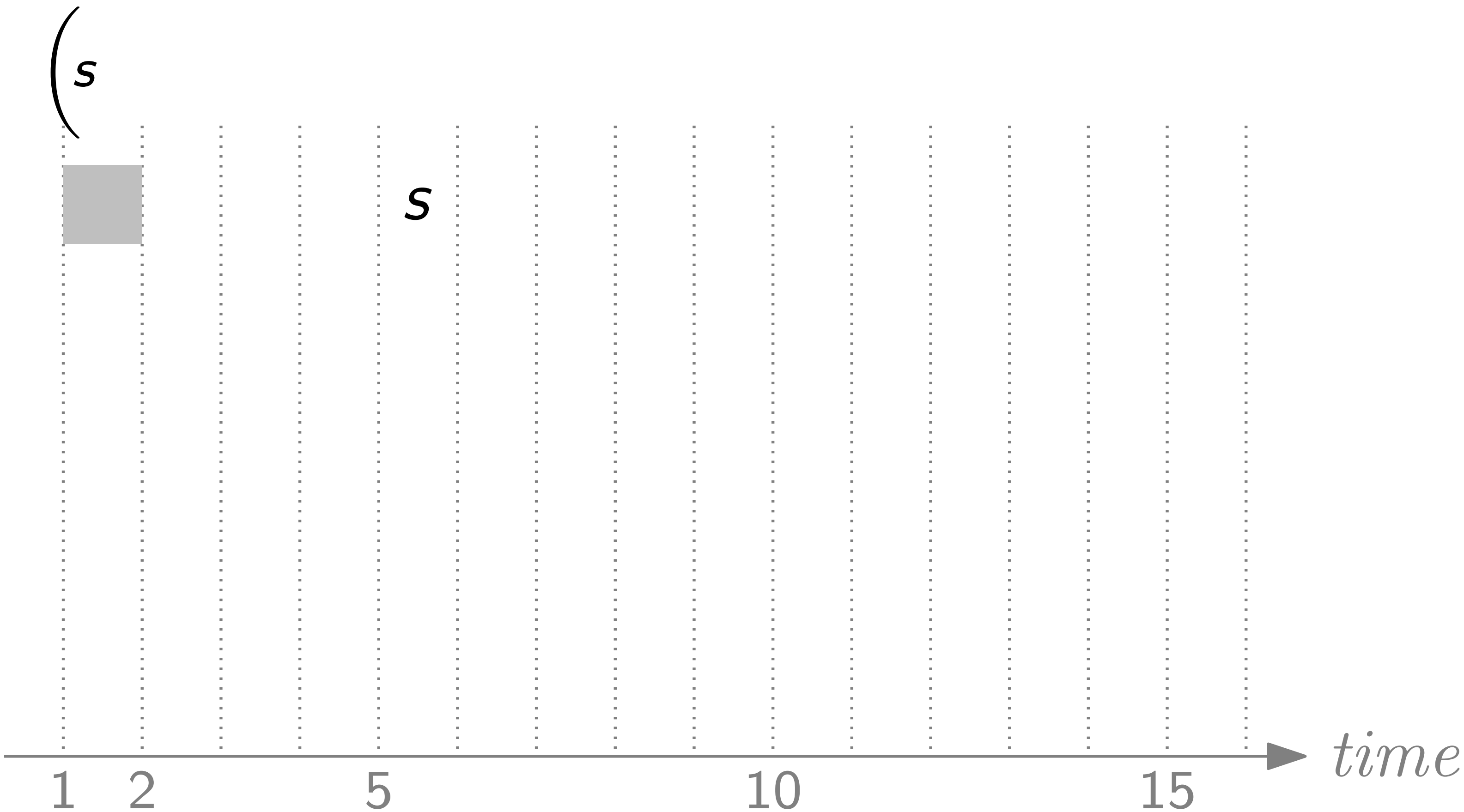
Tiefensuche – Eigenschaften



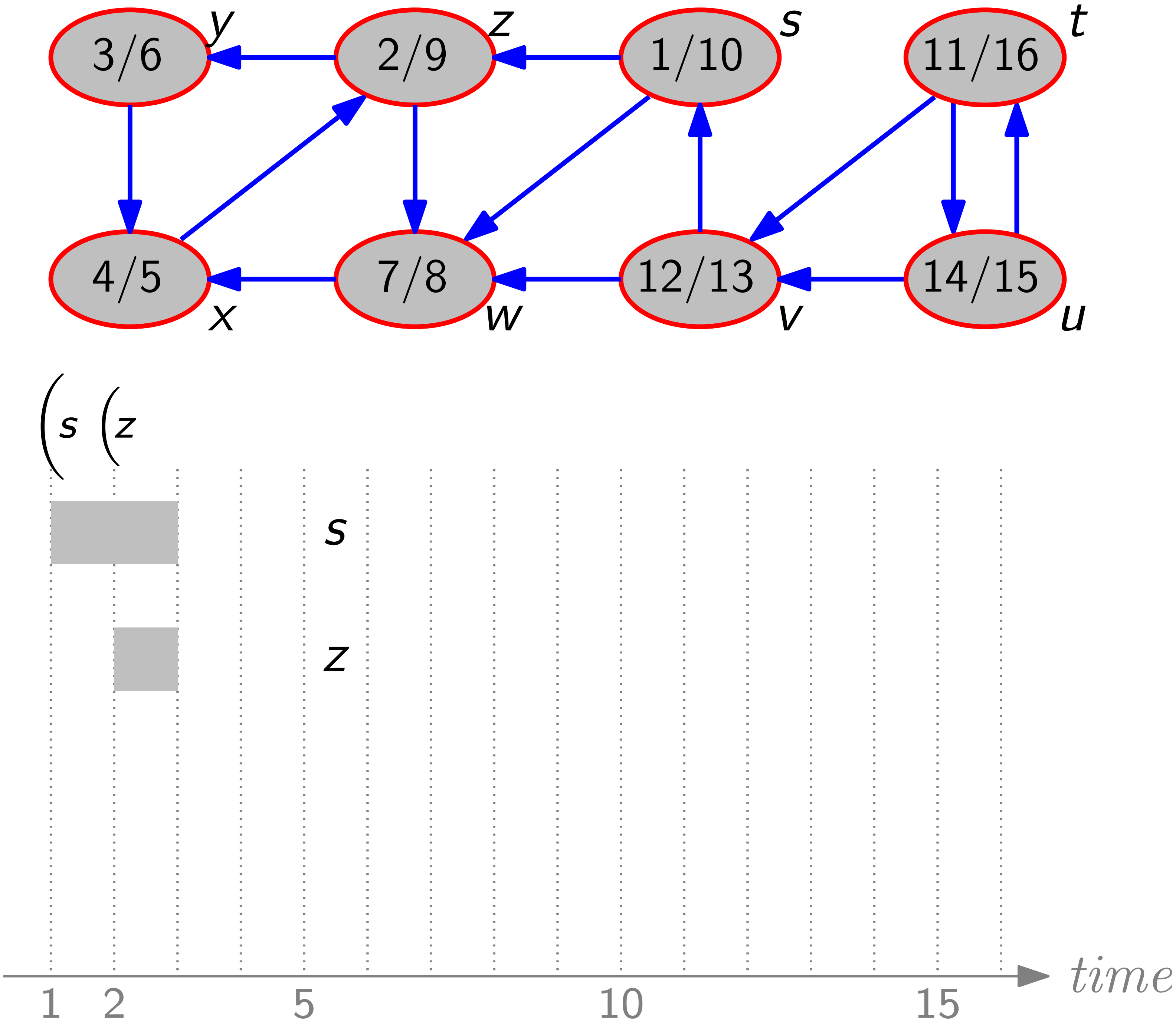


Tiefensuche – Eigenschaften

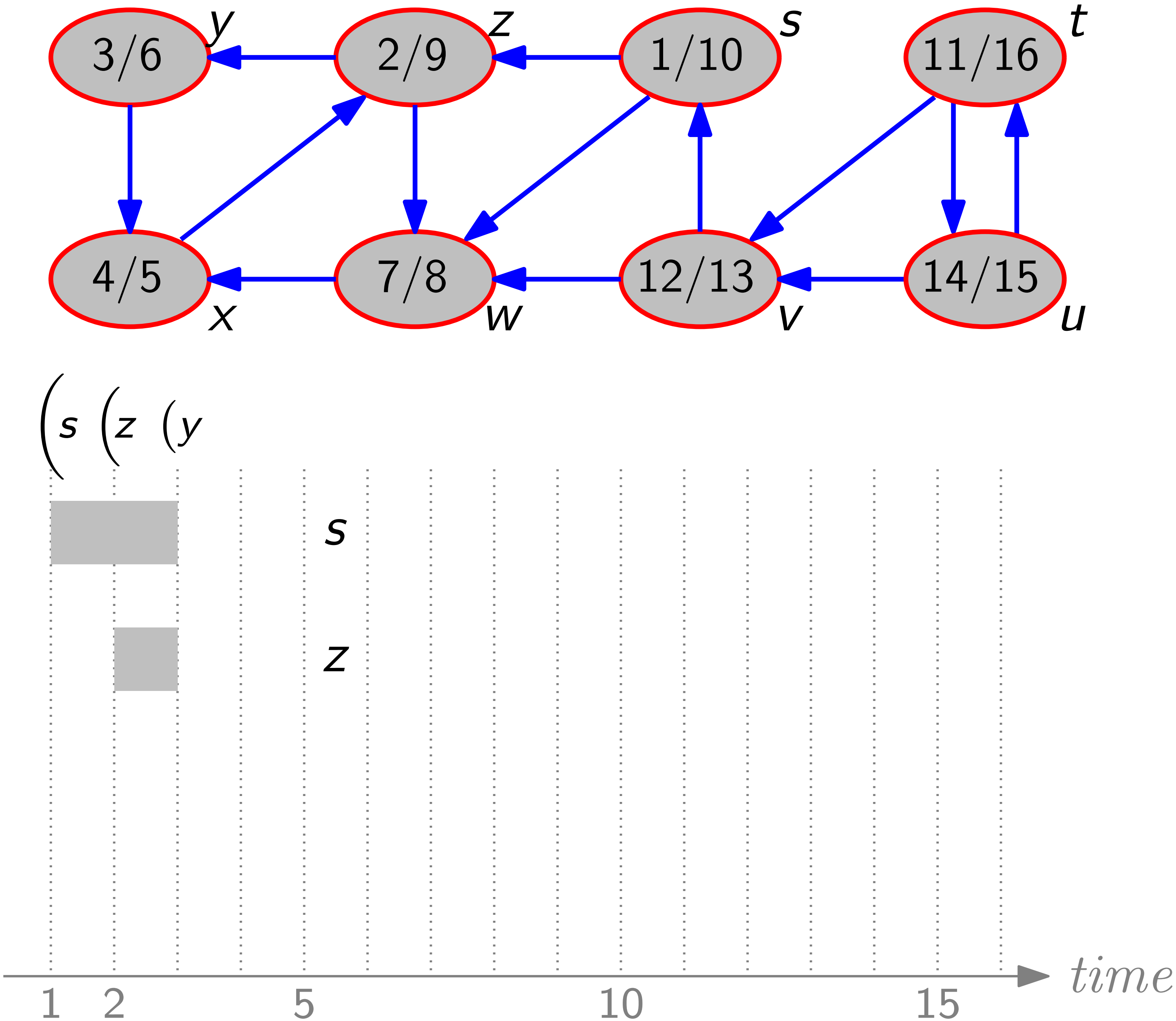




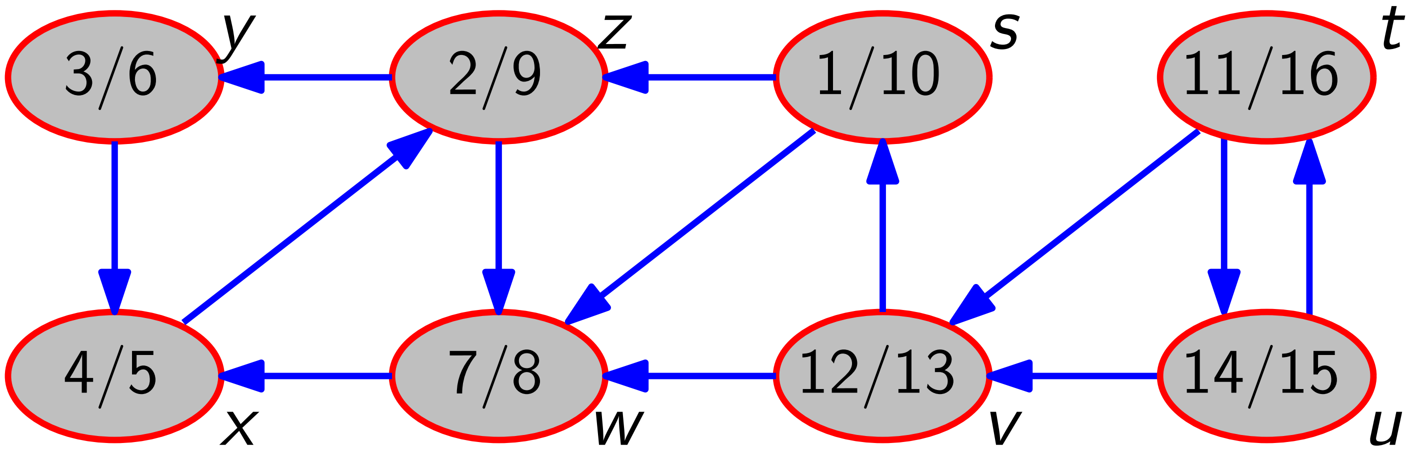
Tiefensuche – Eigenschaften

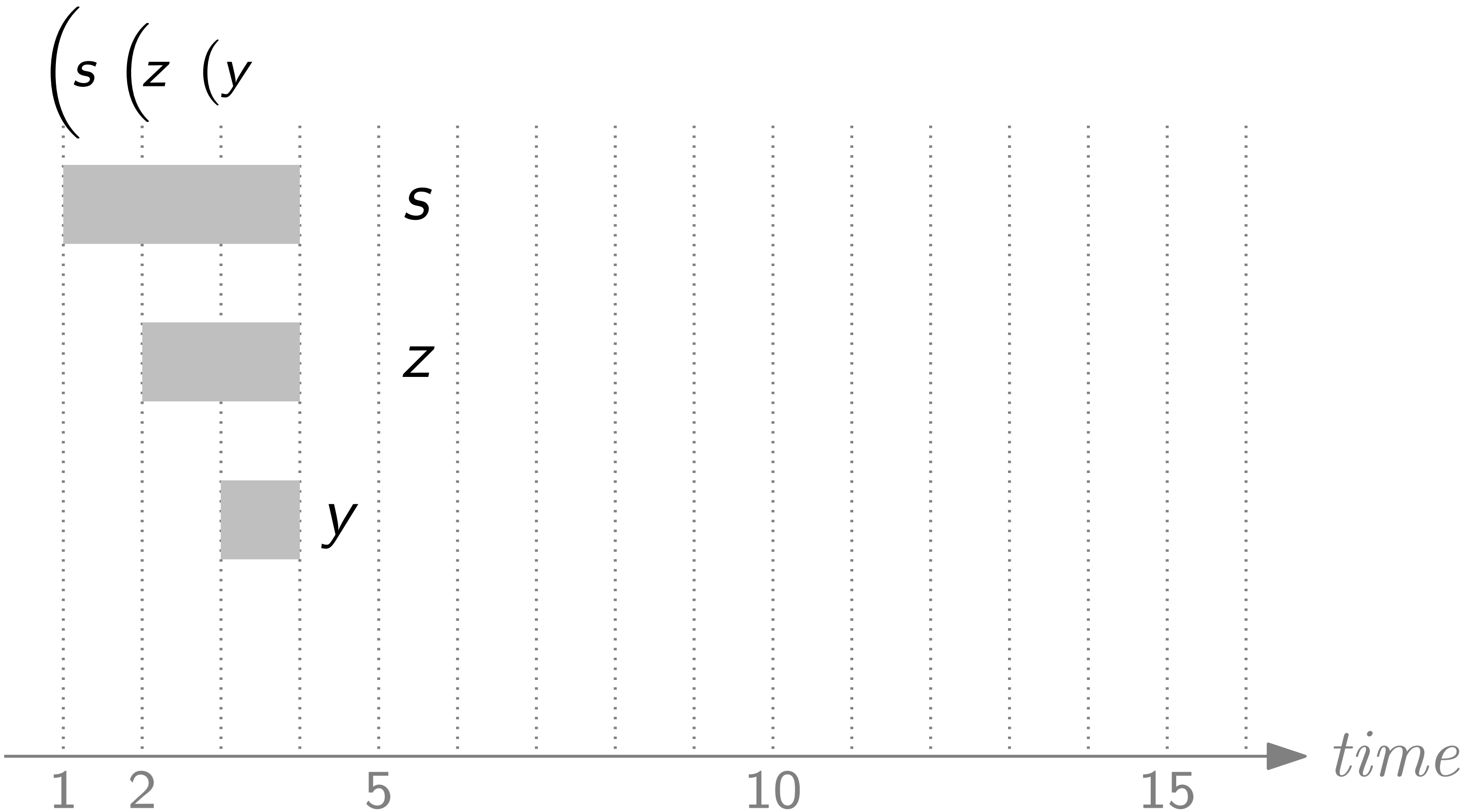


Tiefensuche – Eigenschaften

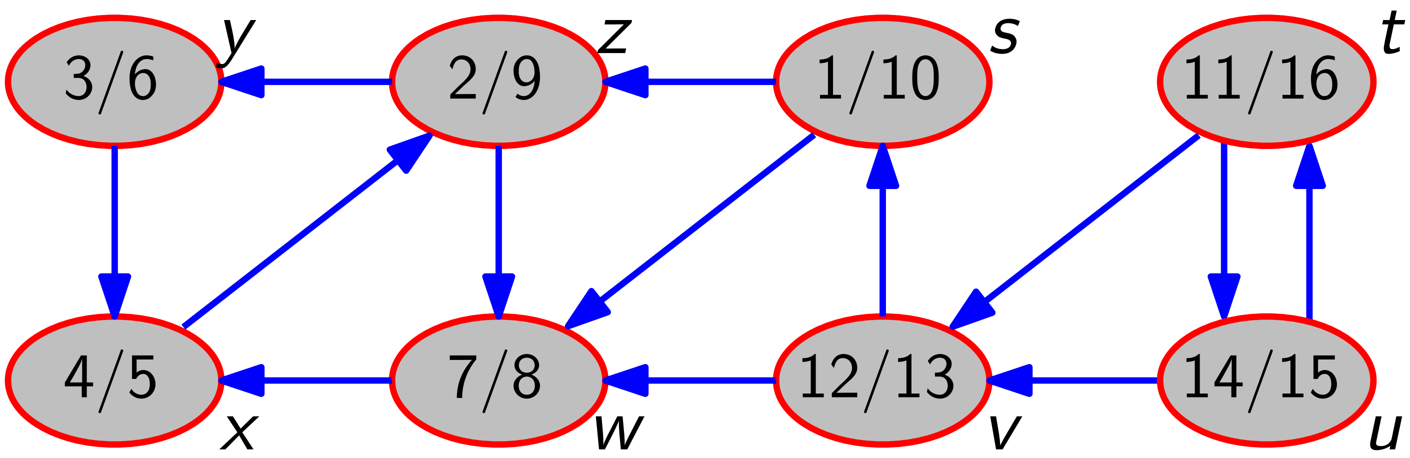


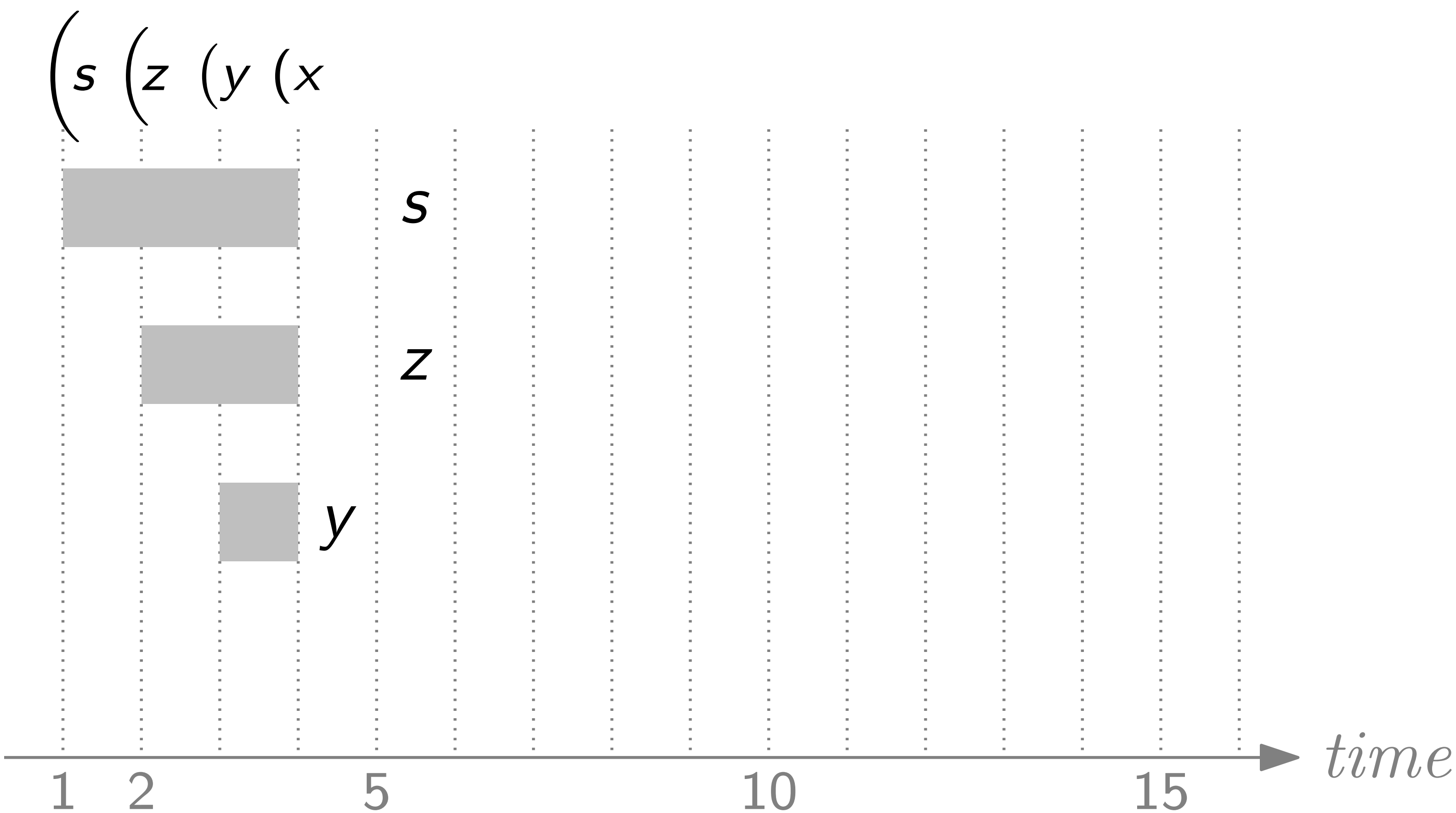
Tiefensuche – Eigenschaften



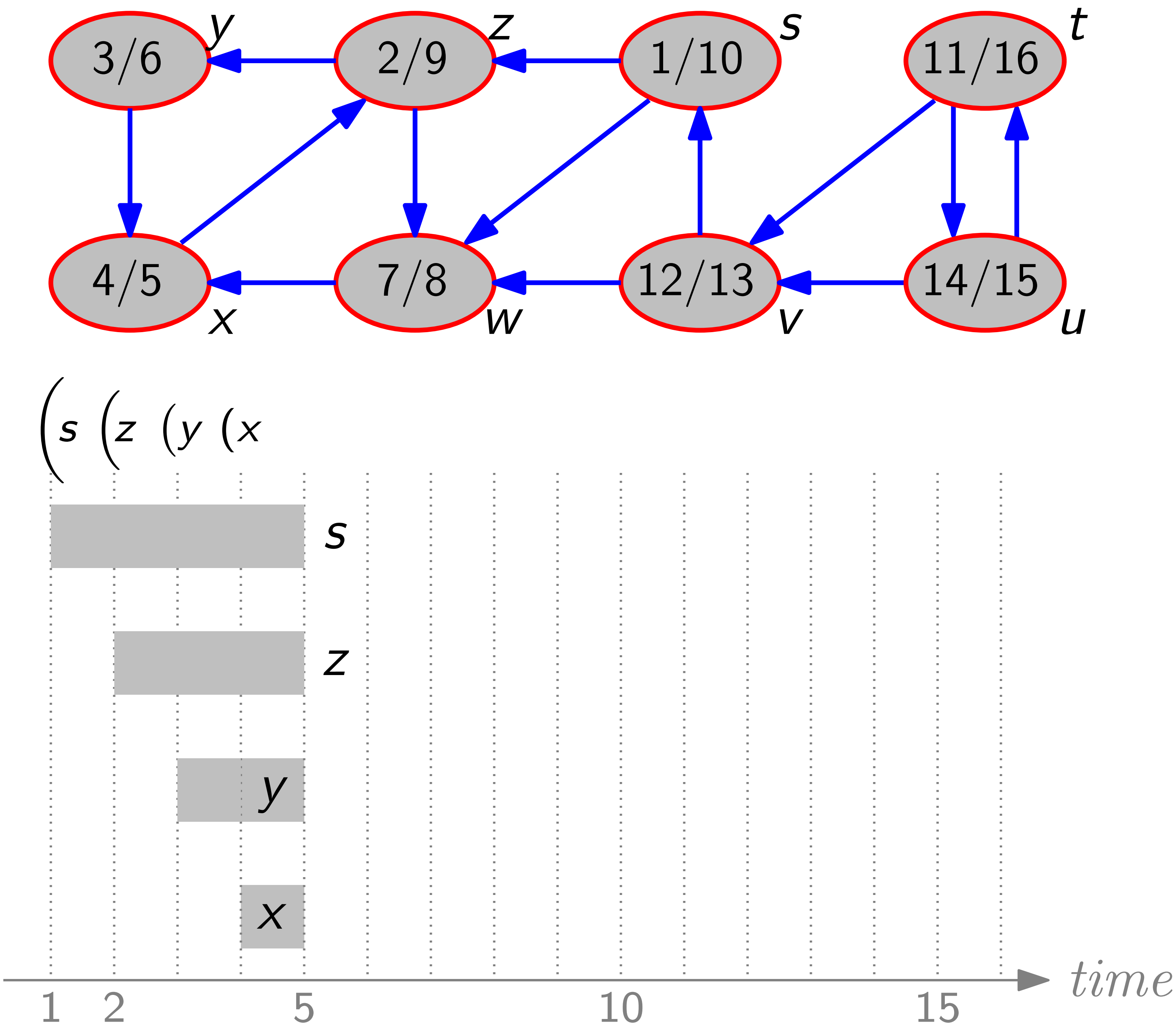


Tiefensuche – Eigenschaften

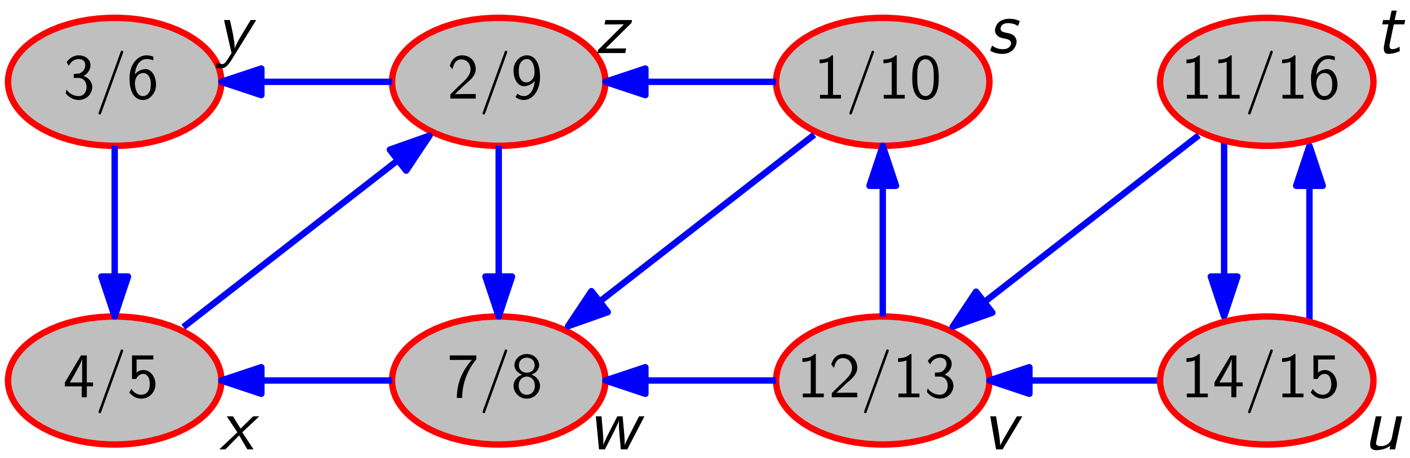


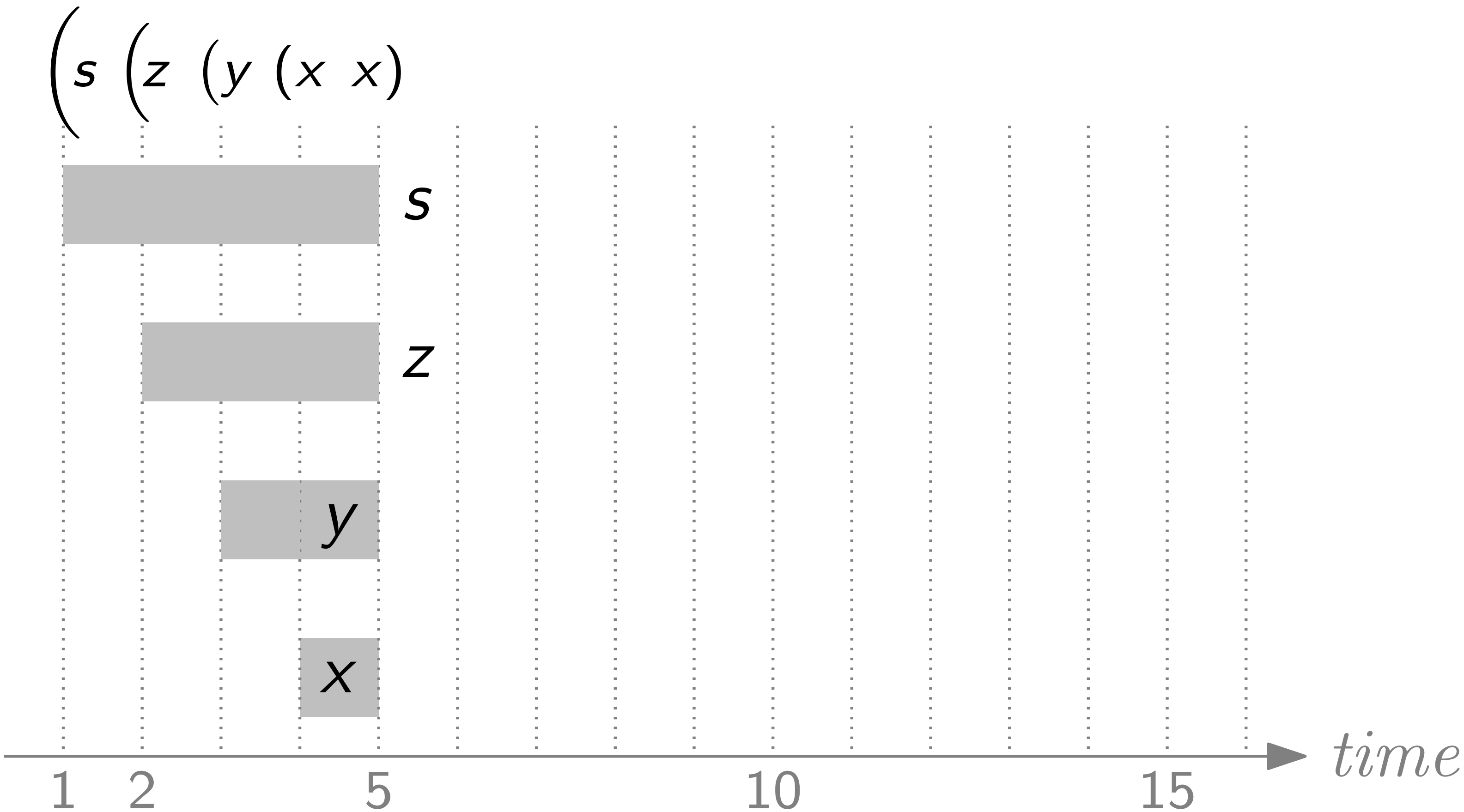


Tiefensuche – Eigenschaften

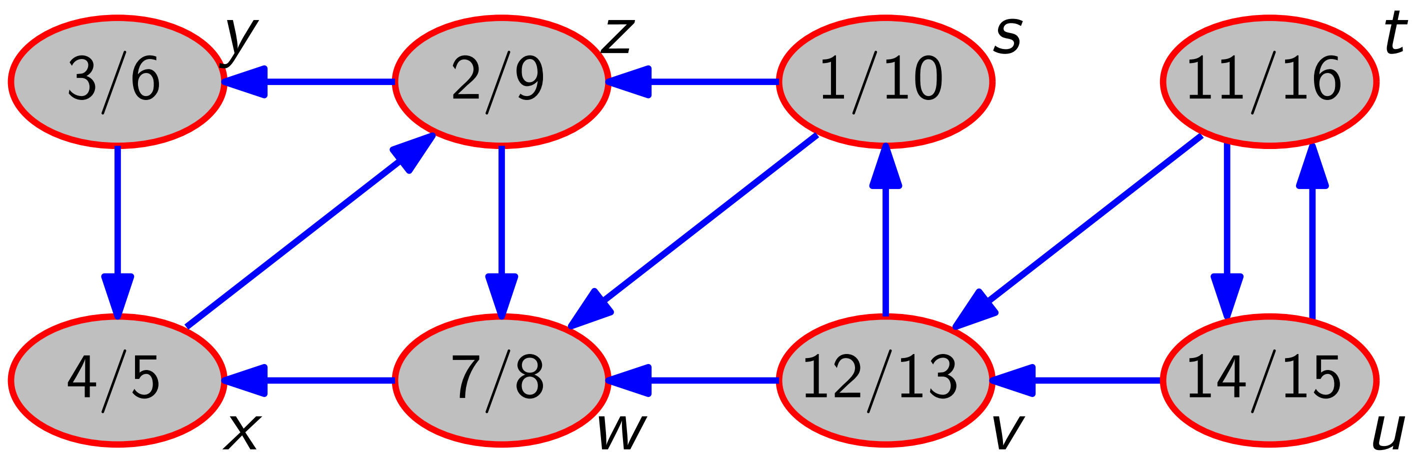


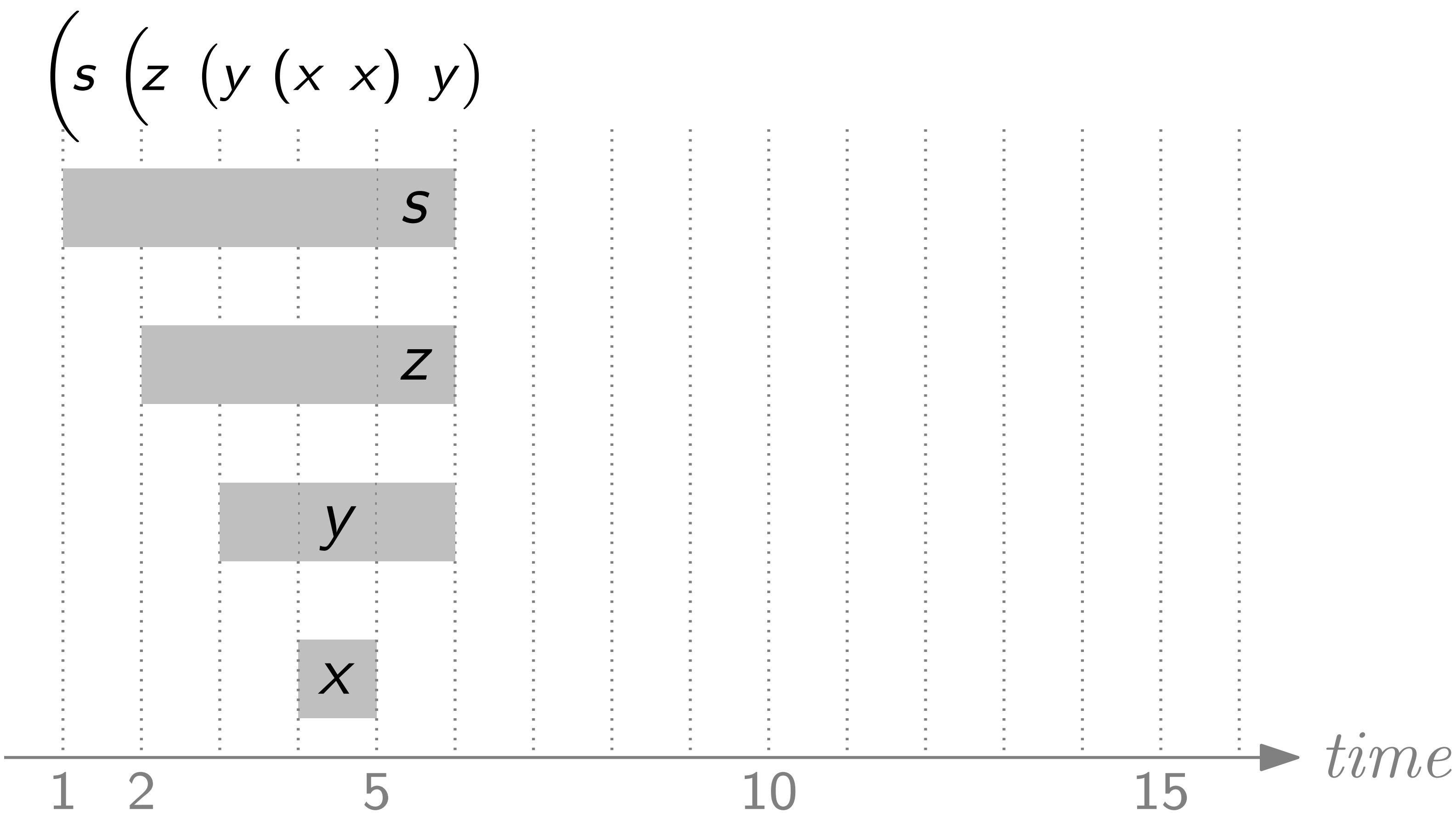
Tiefensuche – Eigenschaften



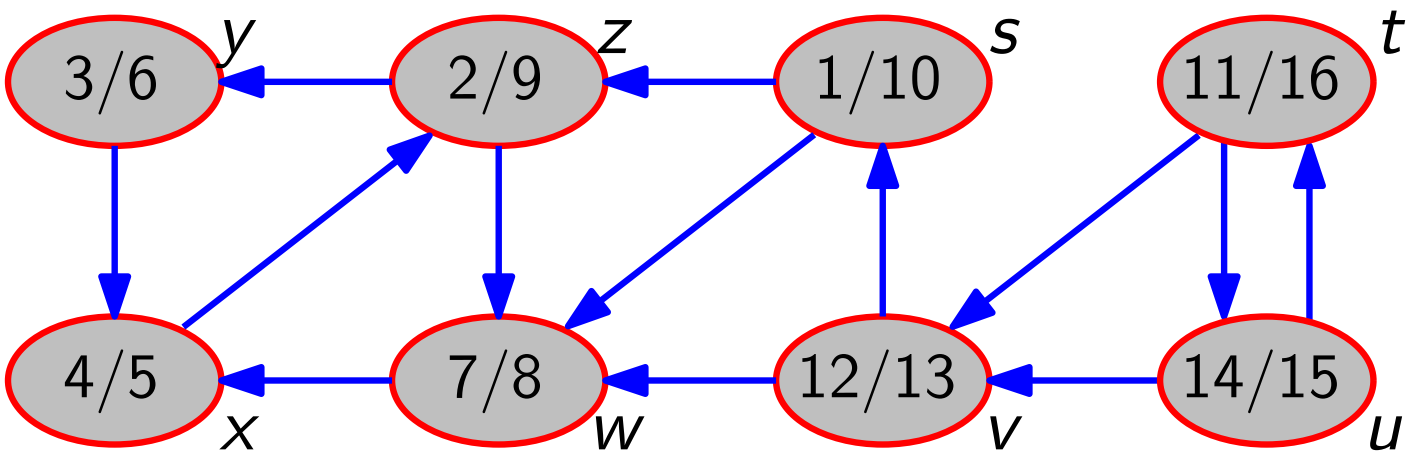


Tiefensuche – Eigenschaften

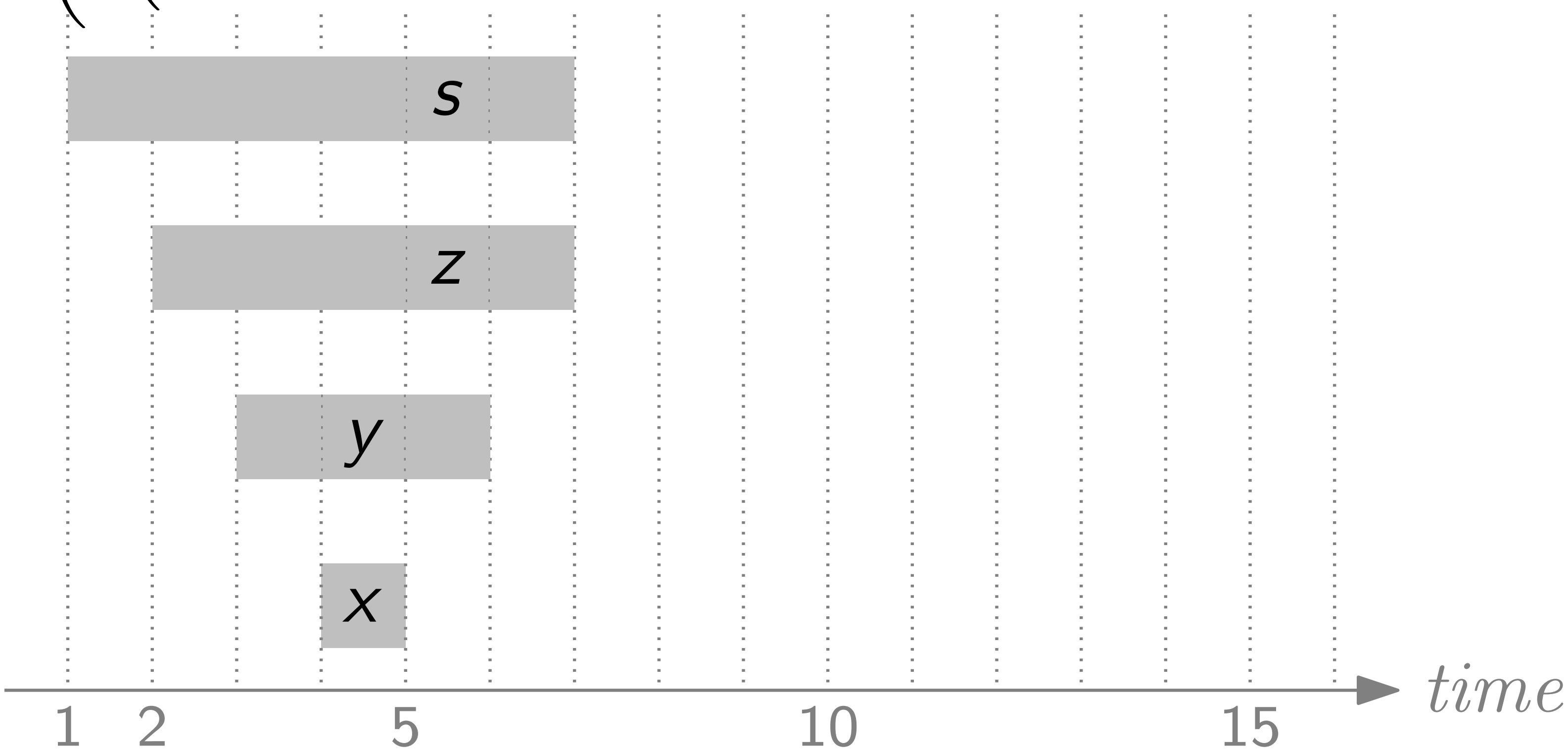




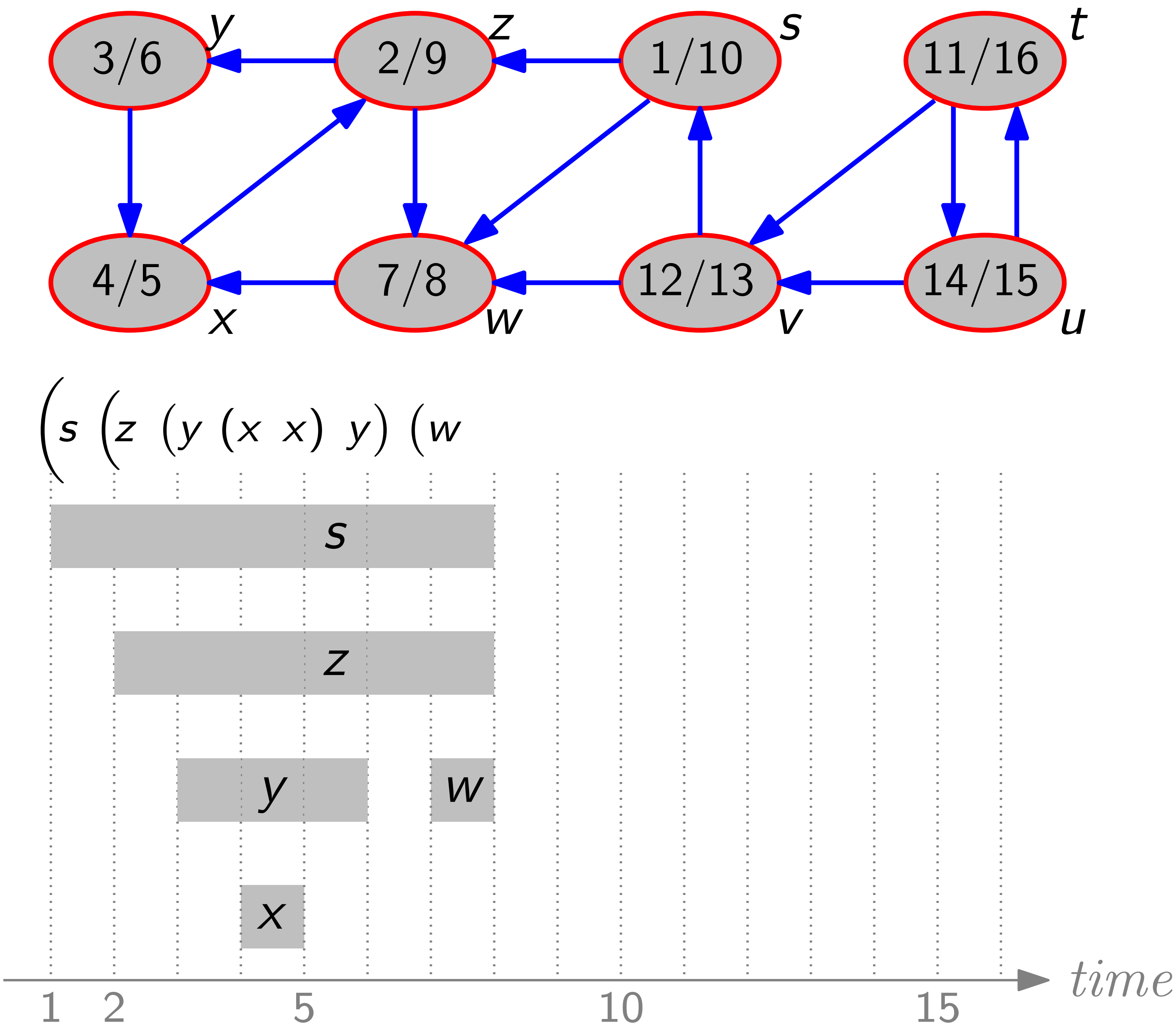
Tiefensuche – Eigenschaften



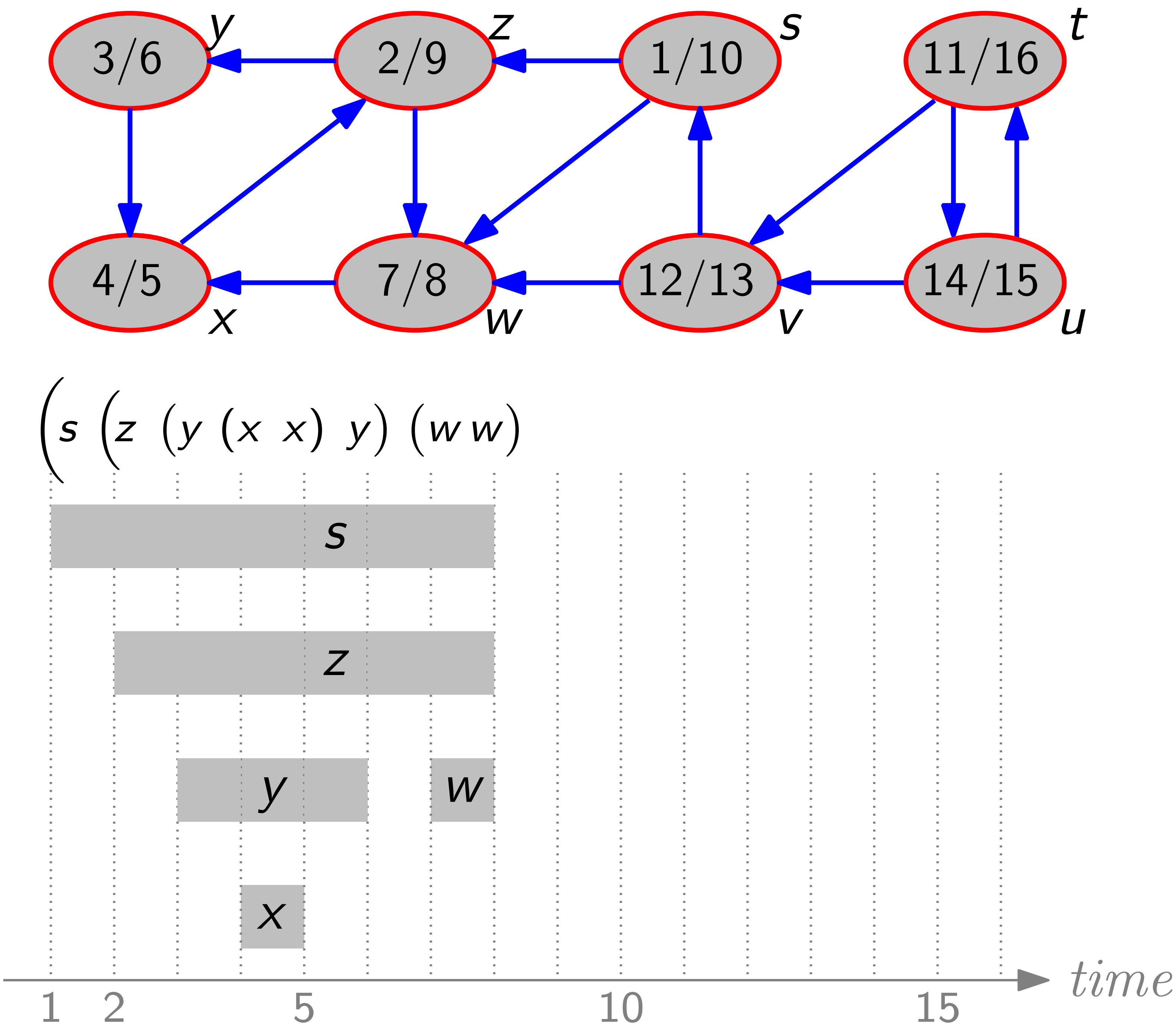
$\Big(s \; \big(z \; (y \; (x \; x) \; y)$



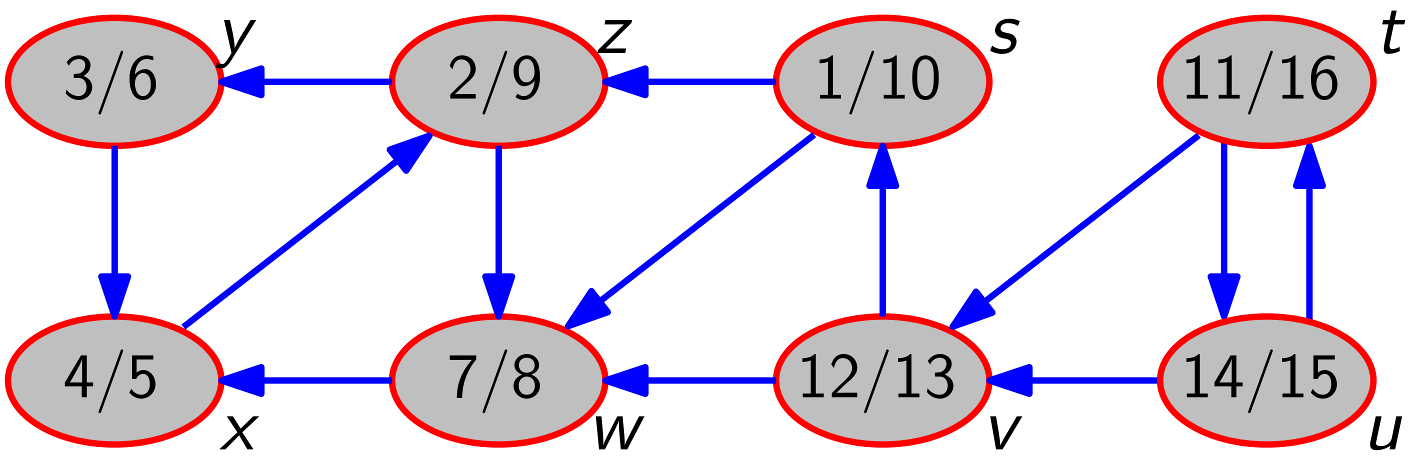
Tiefensuche – Eigenschaften

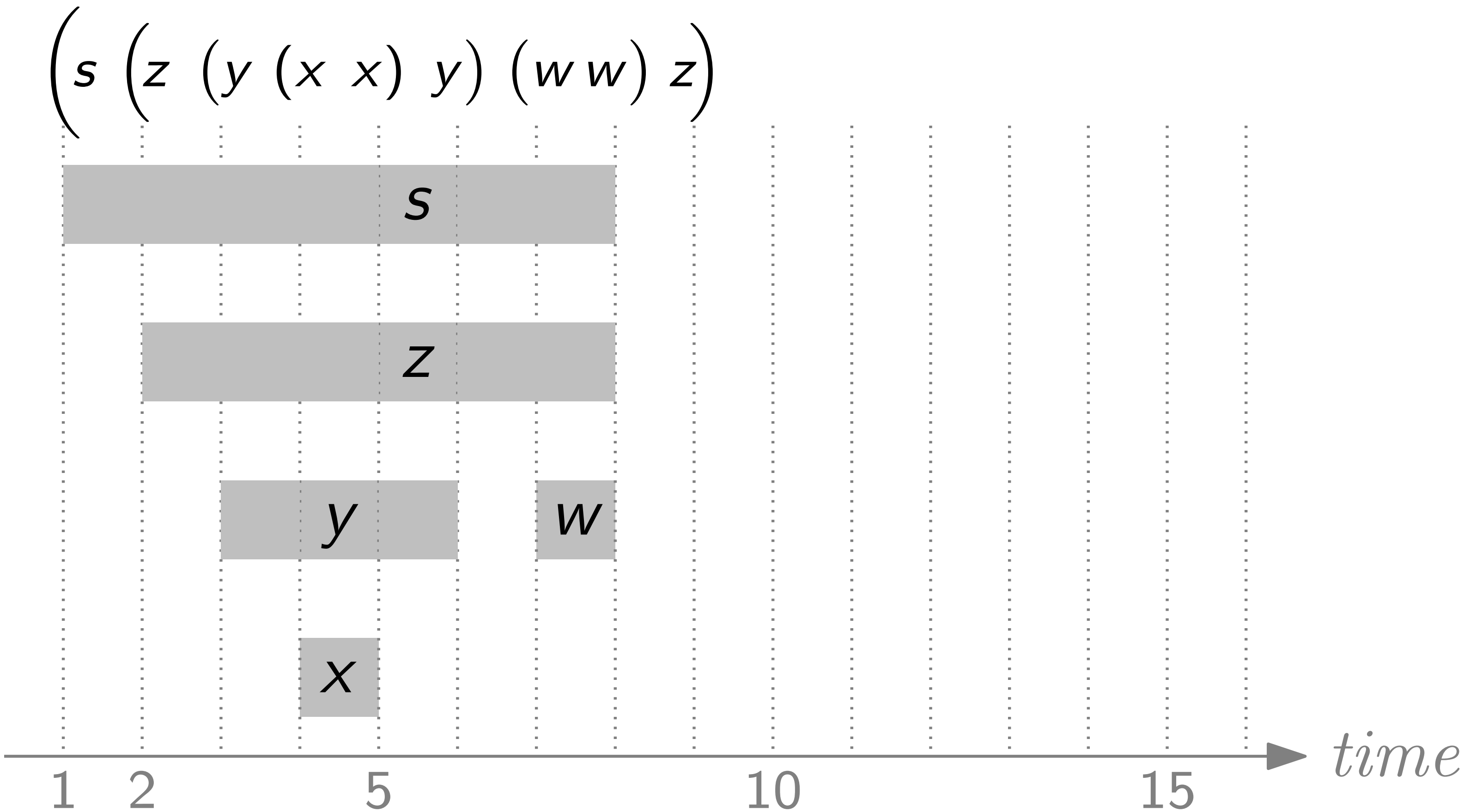


Tiefensuche – Eigenschaften

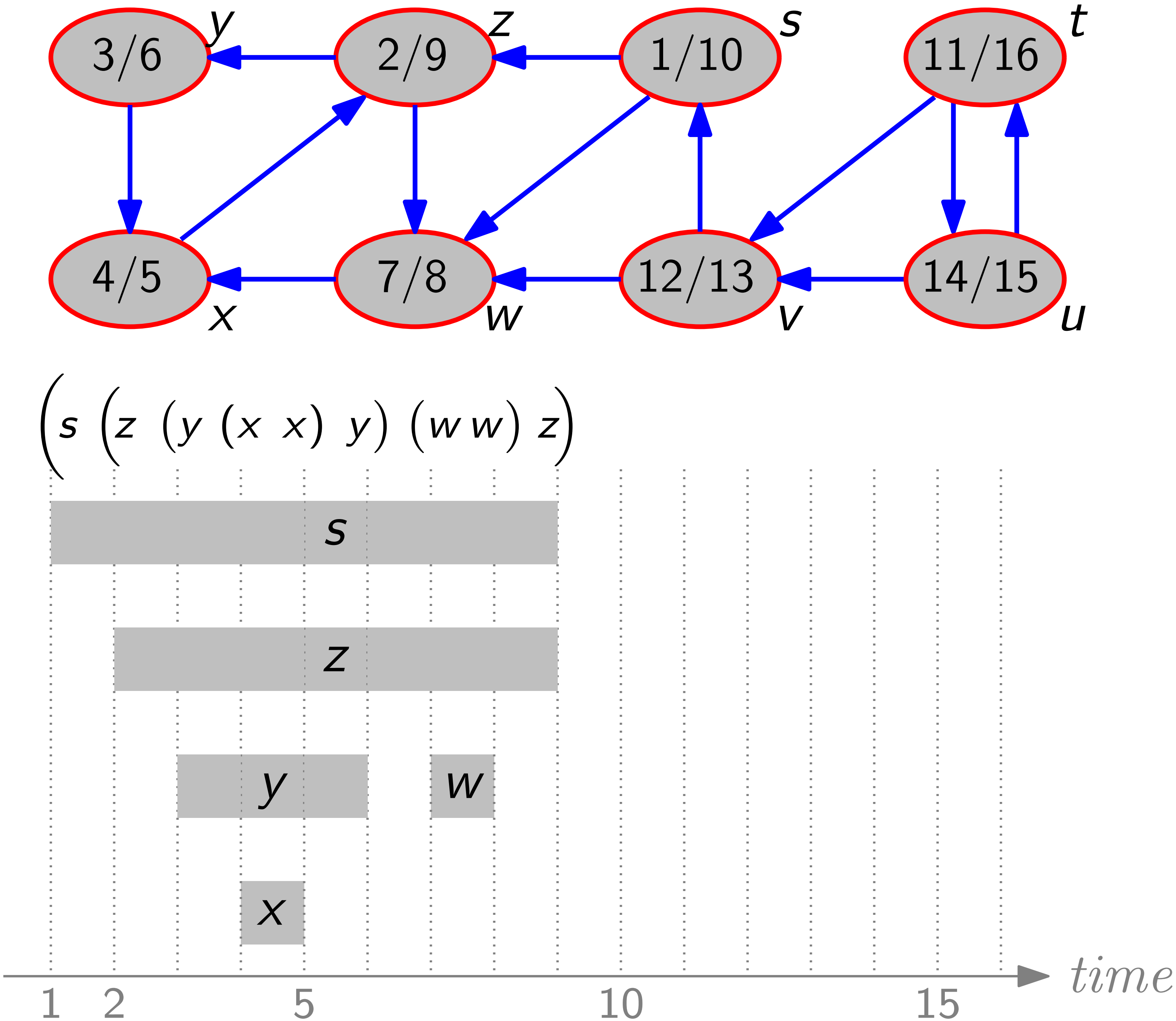


Tiefensuche – Eigenschaften

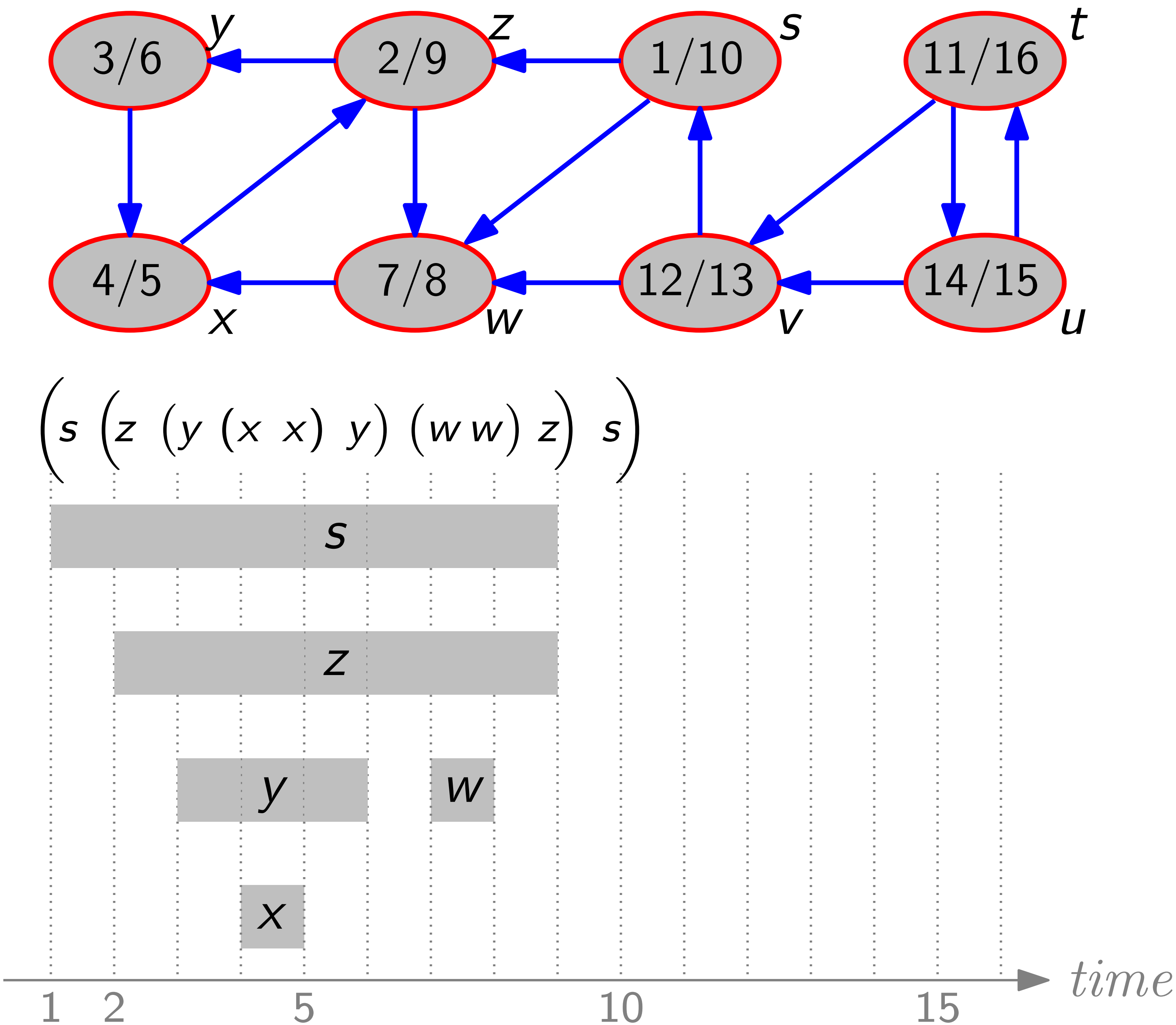




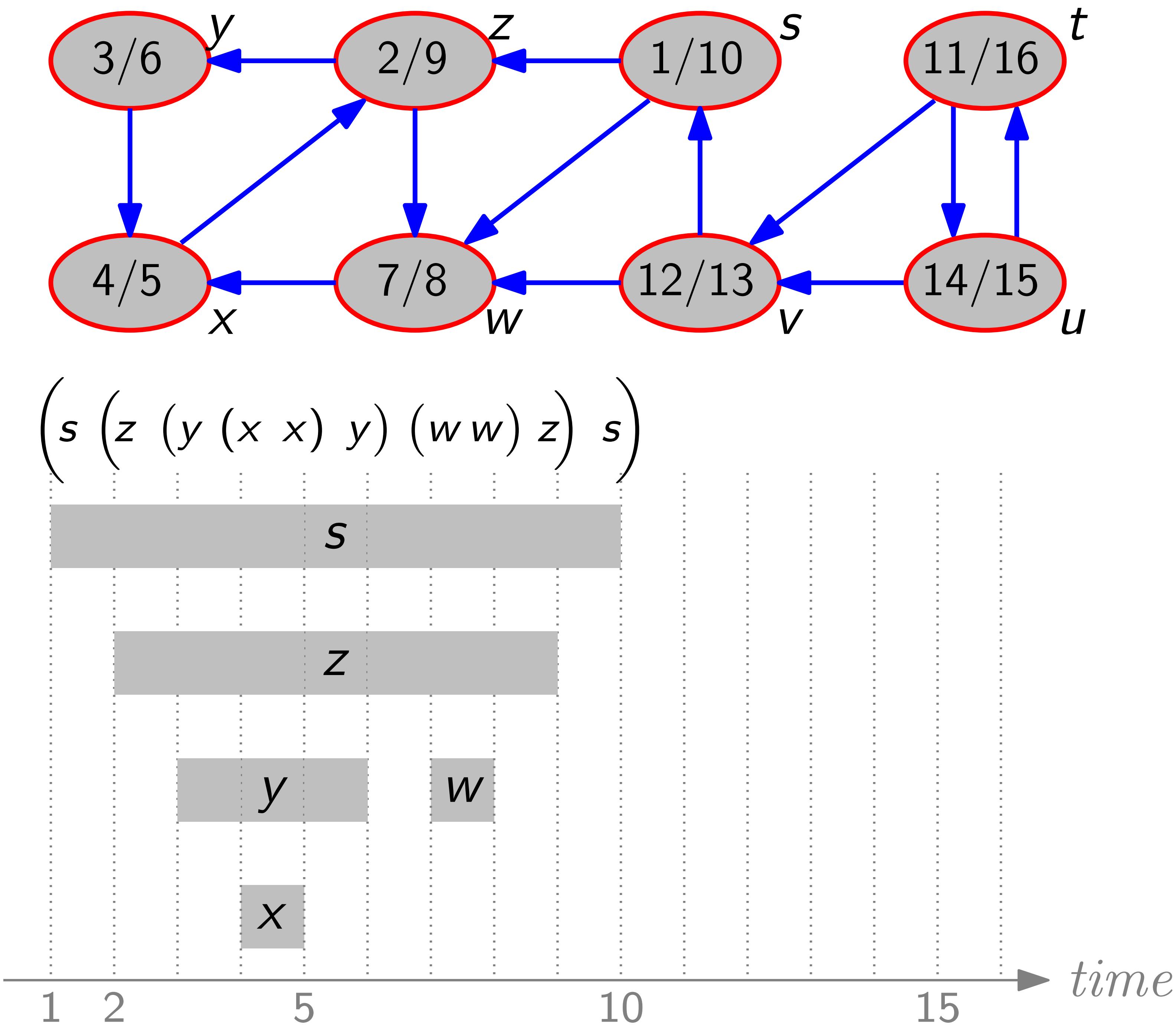
Tiefensuche – Eigenschaften



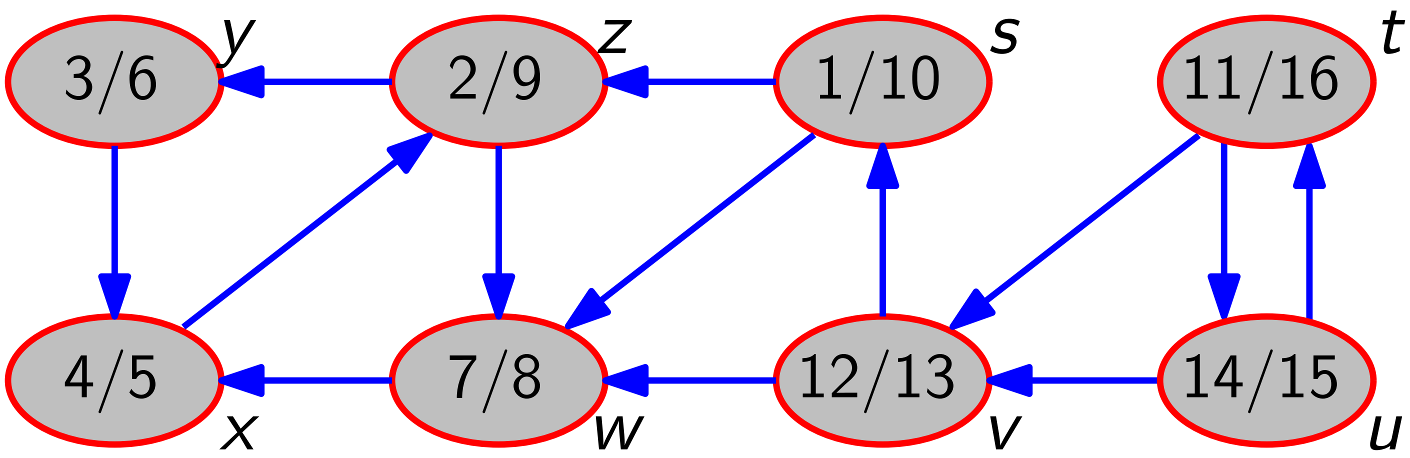
Tiefensuche – Eigenschaften

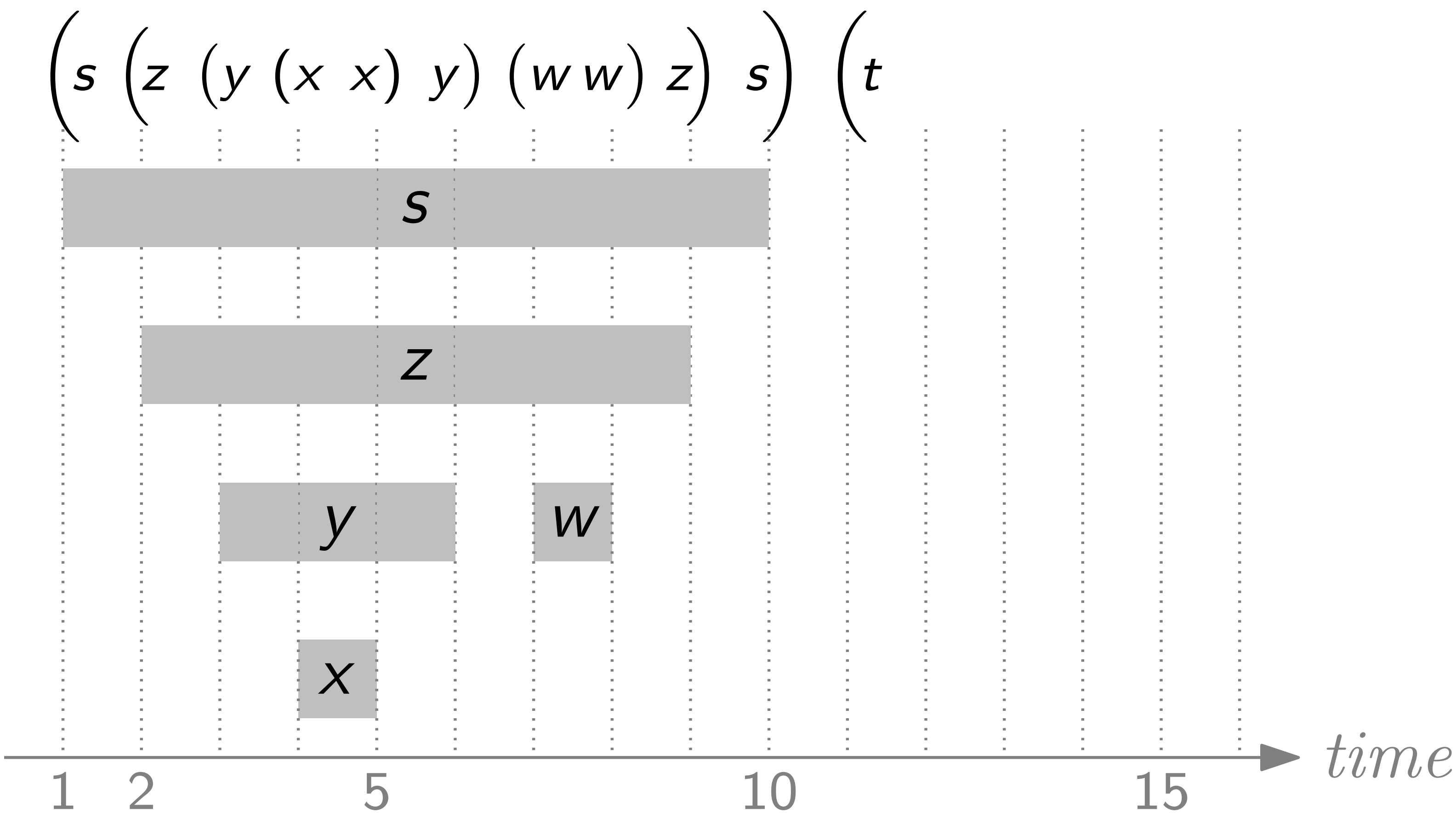


Tiefensuche – Eigenschaften

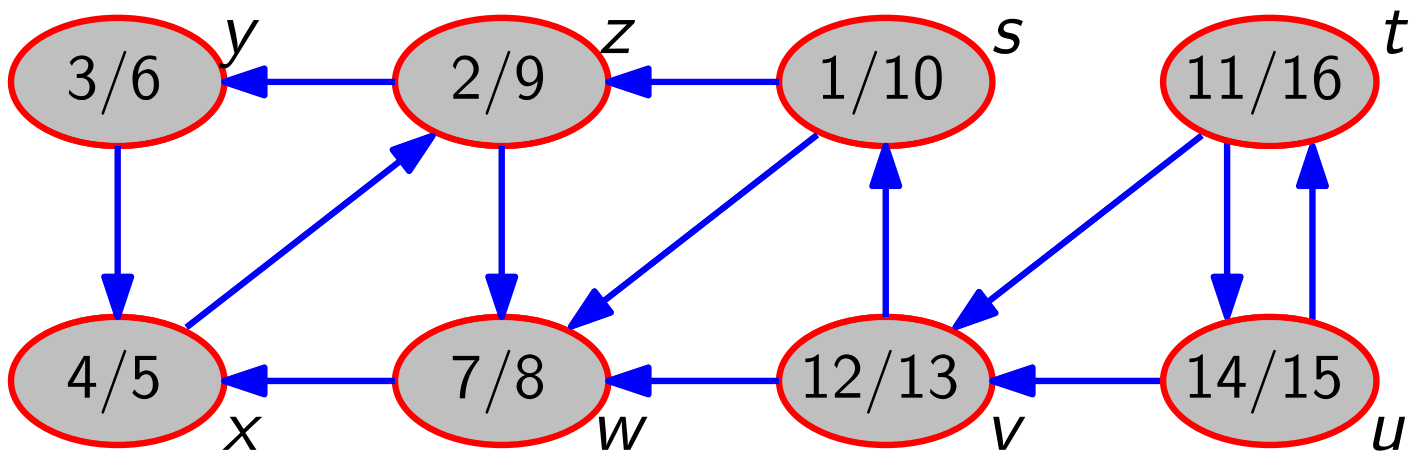


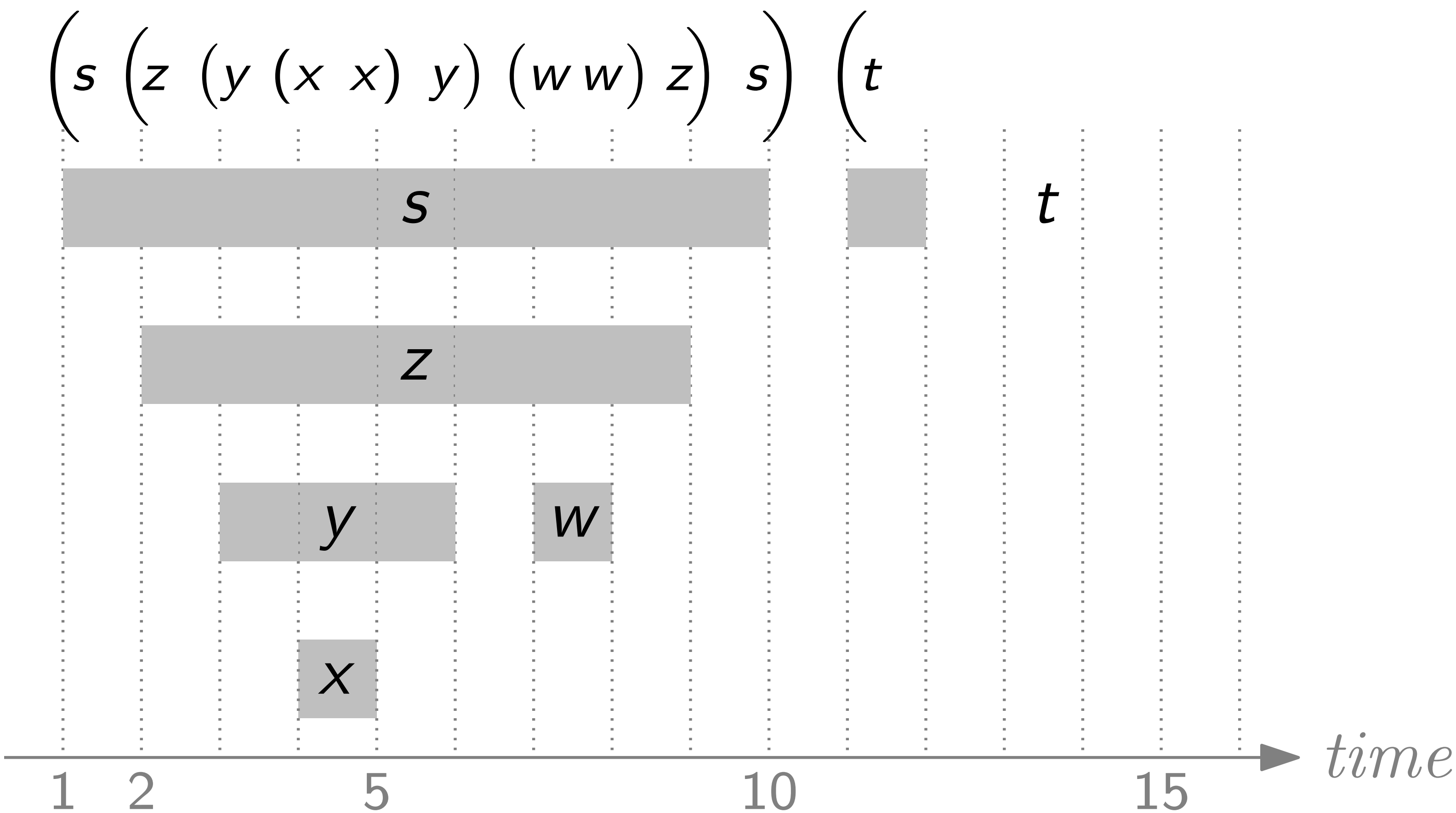
Tiefensuche – Eigenschaften



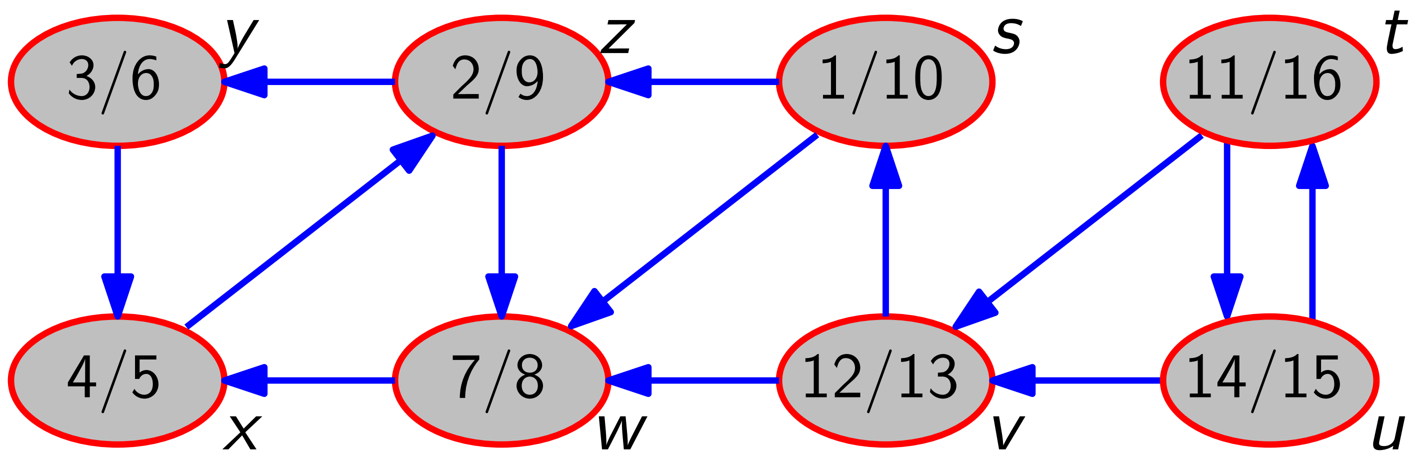


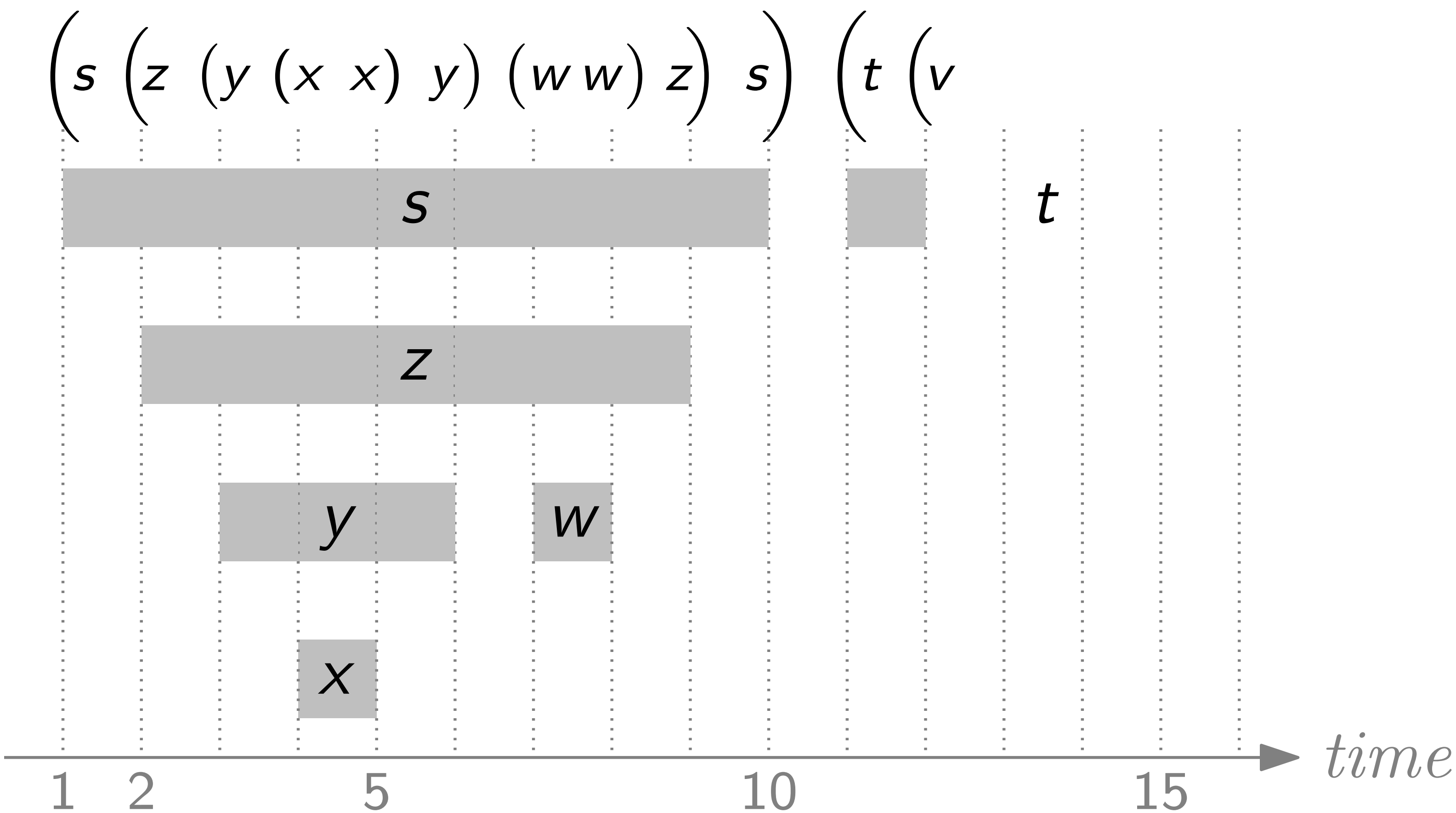
Tiefensuche – Eigenschaften



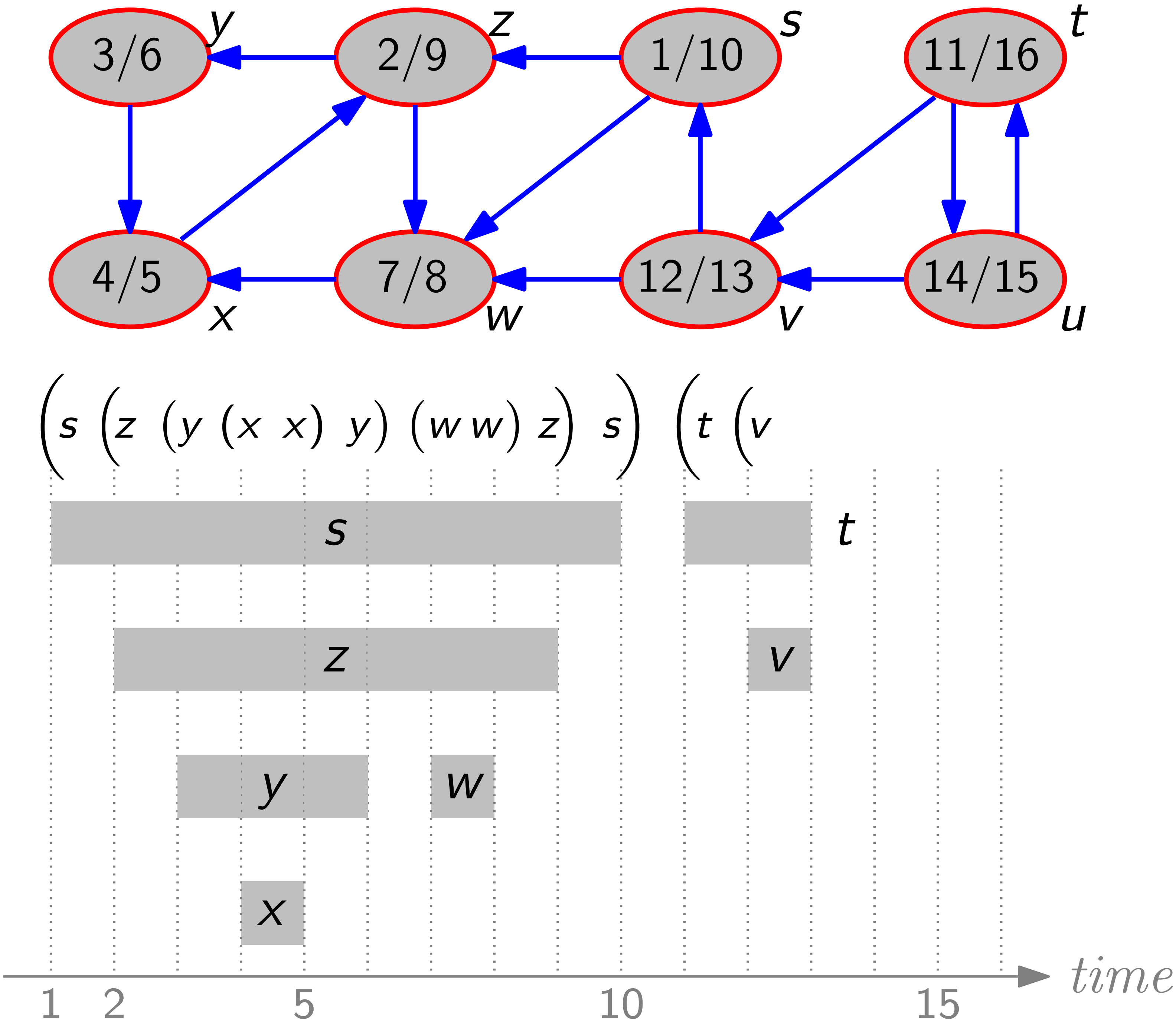


Tiefensuche – Eigenschaften

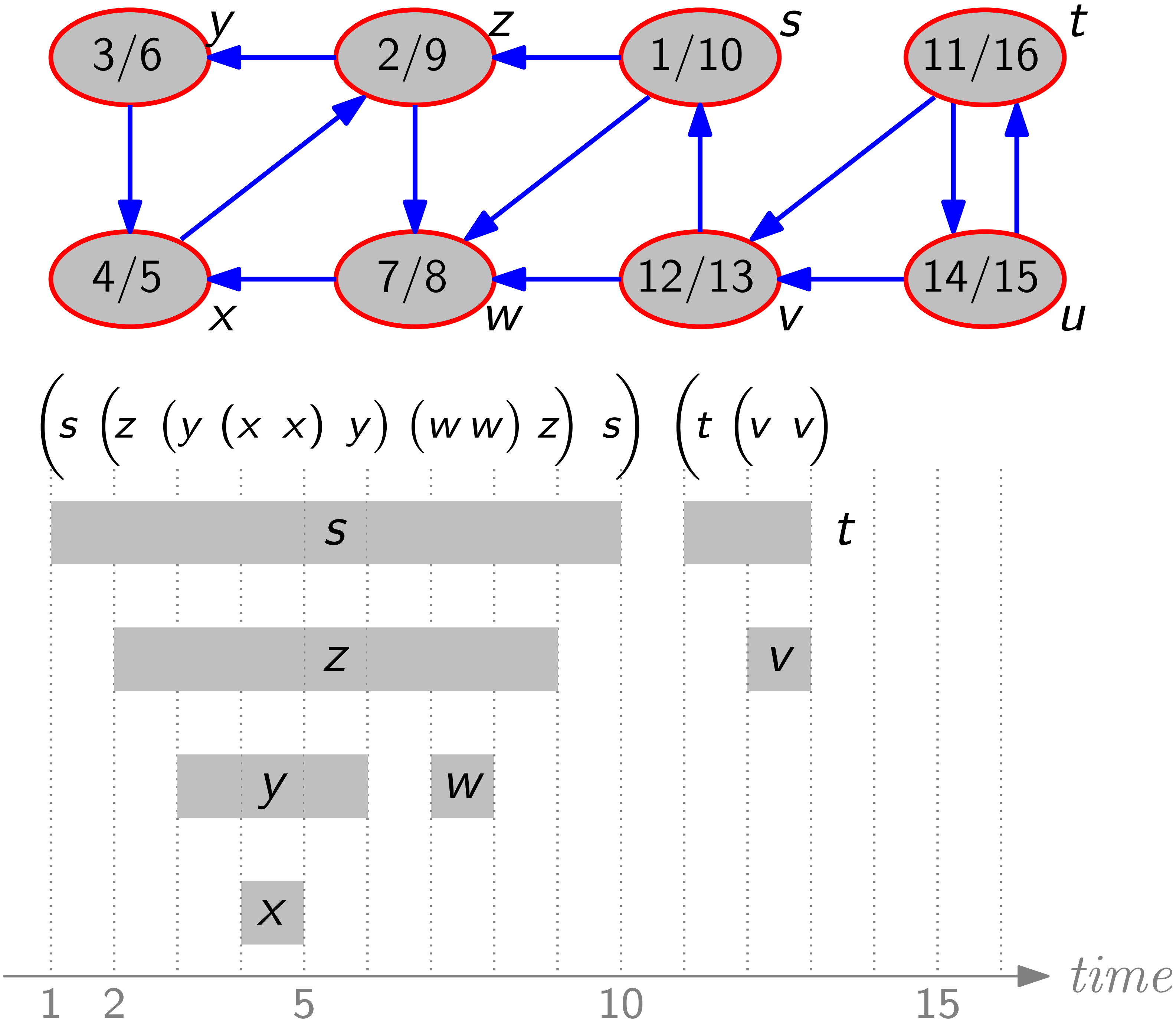




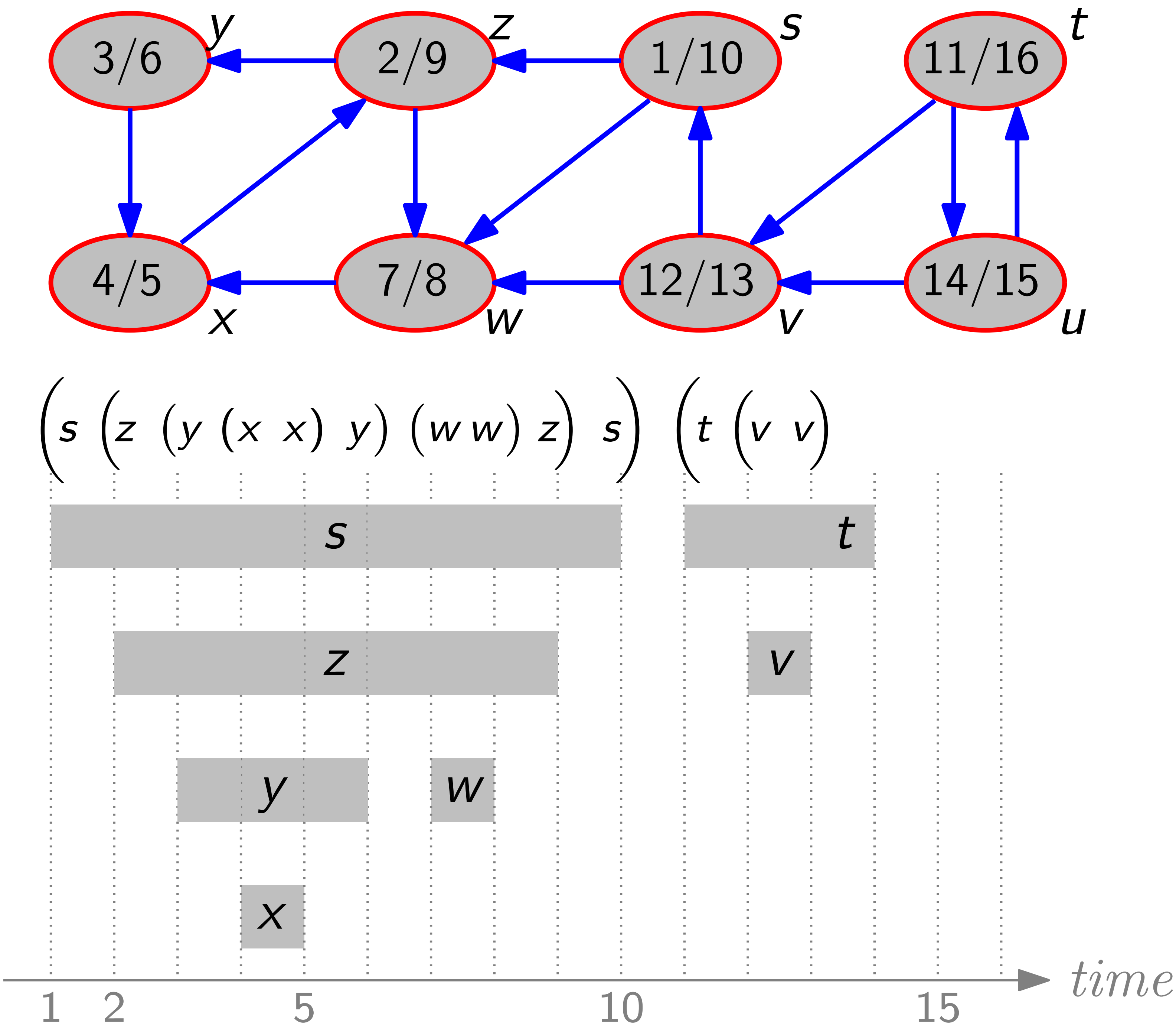
Tiefensuche – Eigenschaften



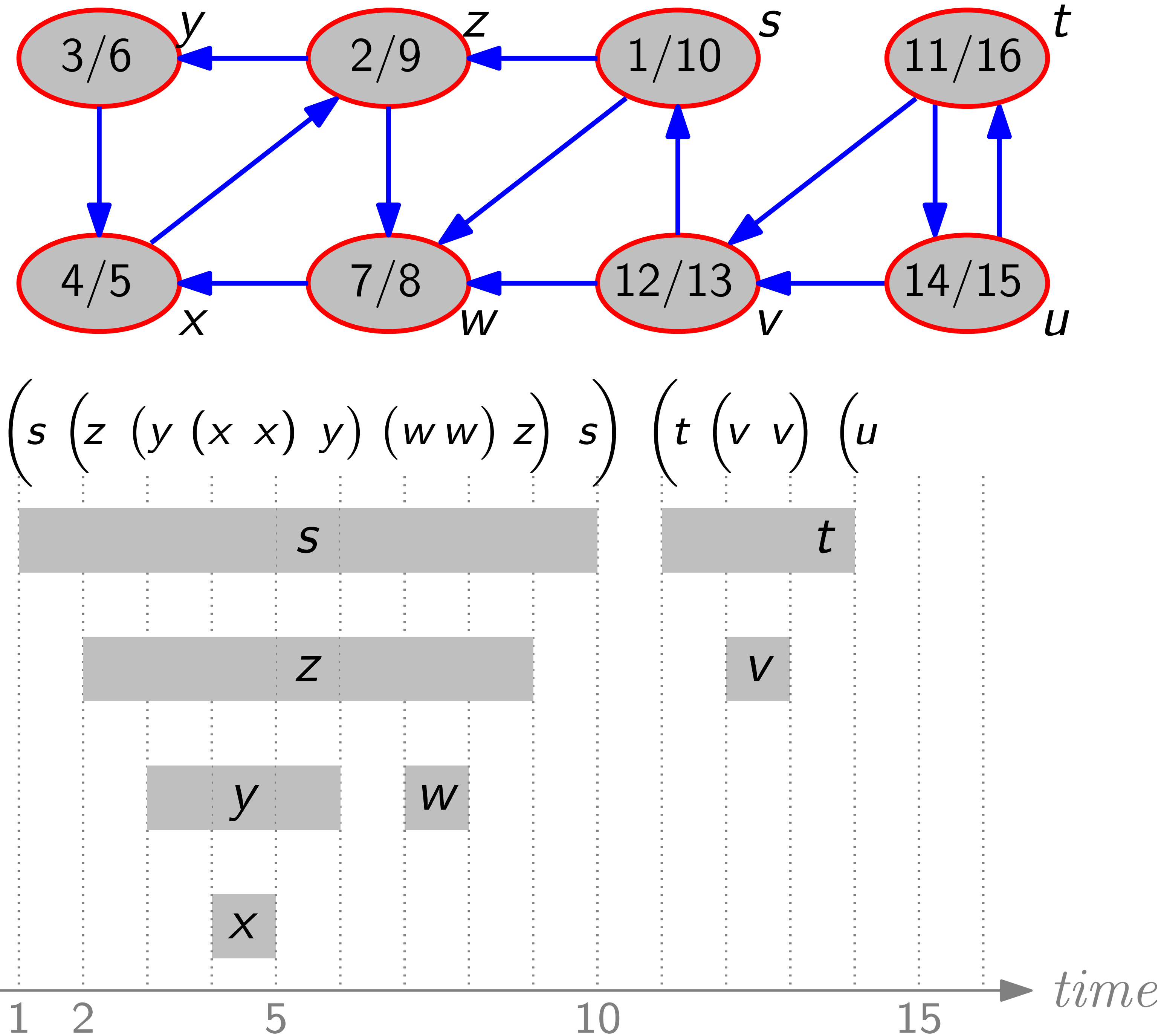
Tiefensuche – Eigenschaften



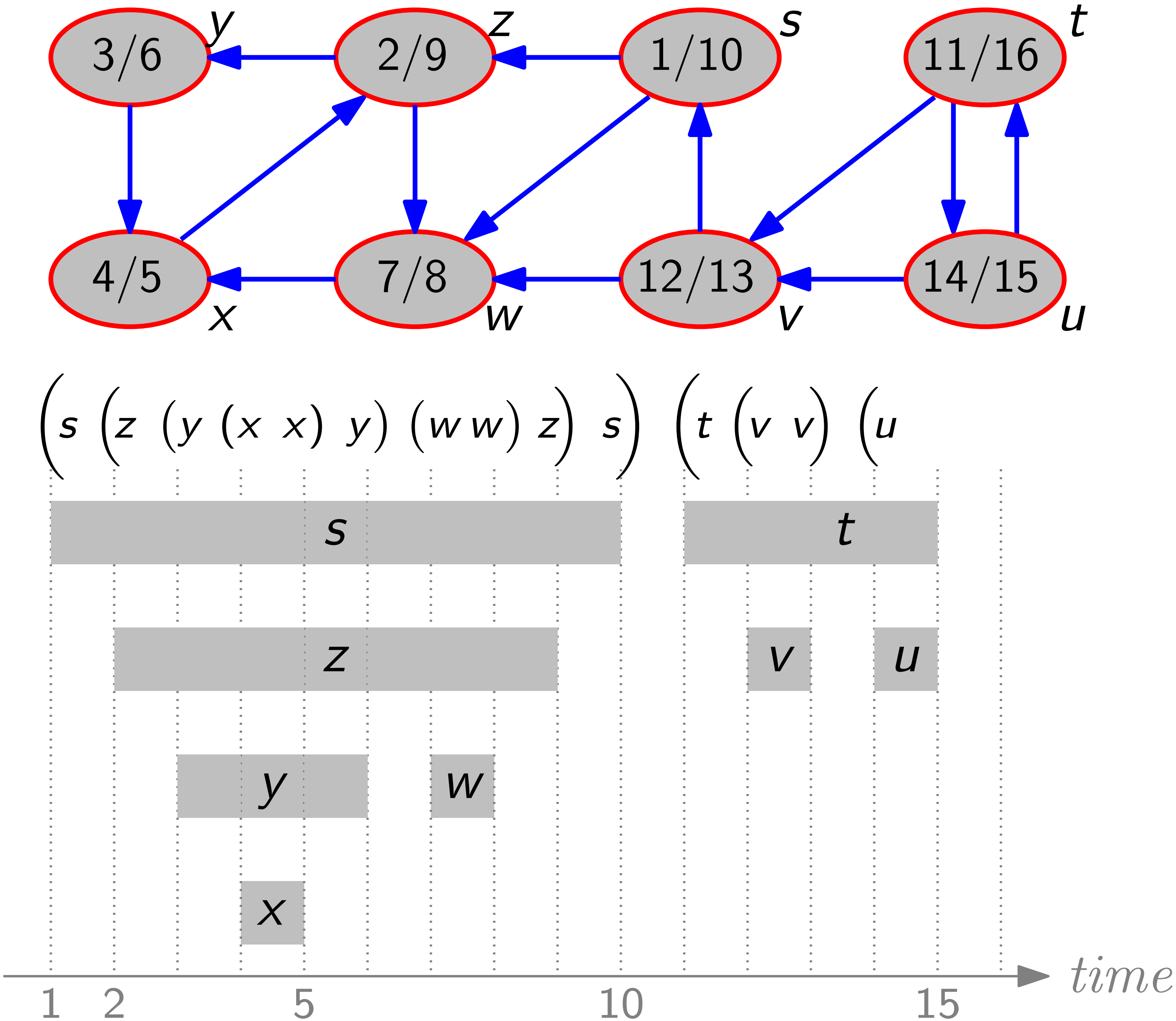
Tiefensuche – Eigenschaften



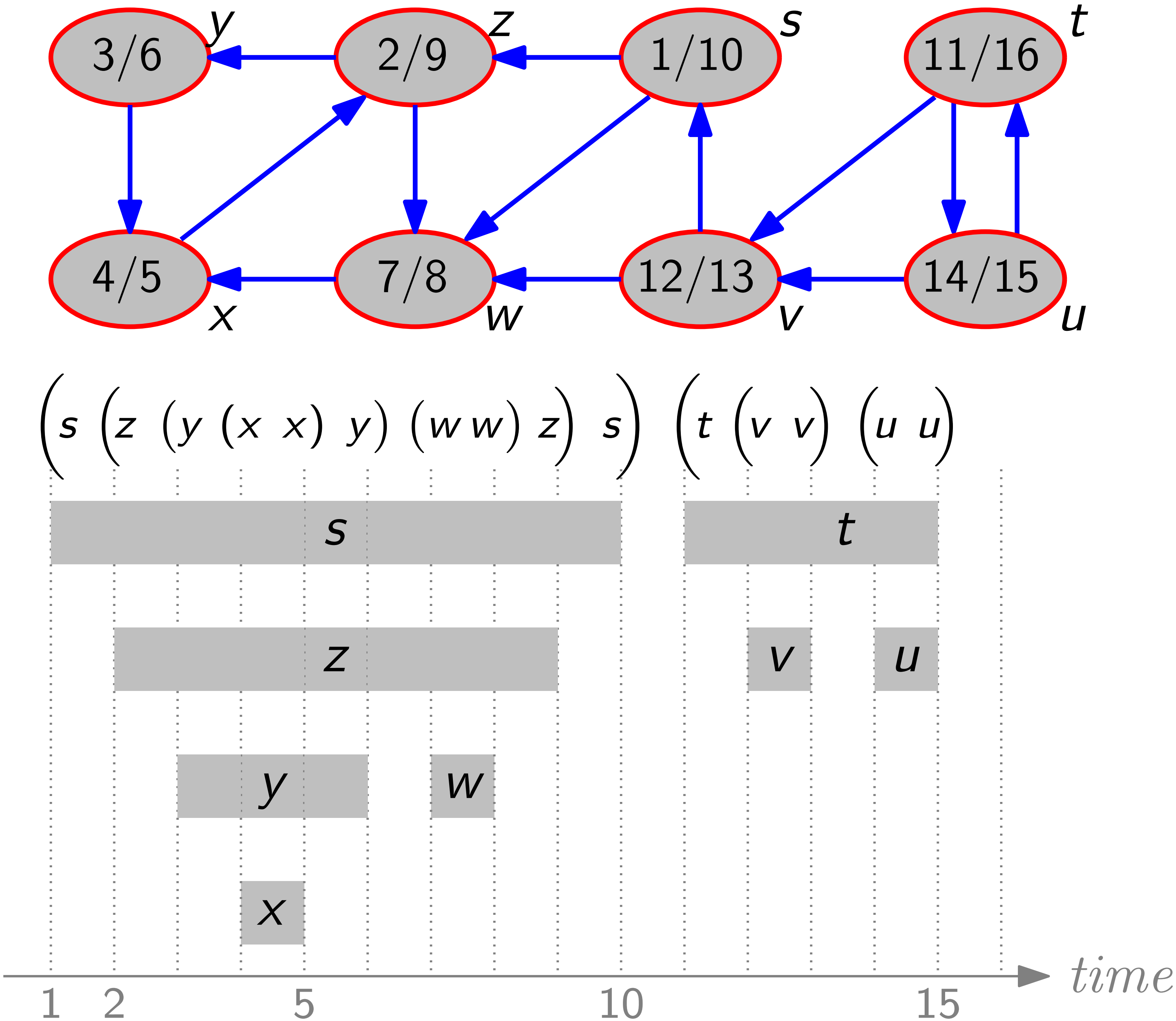
Tiefensuche – Eigenschaften



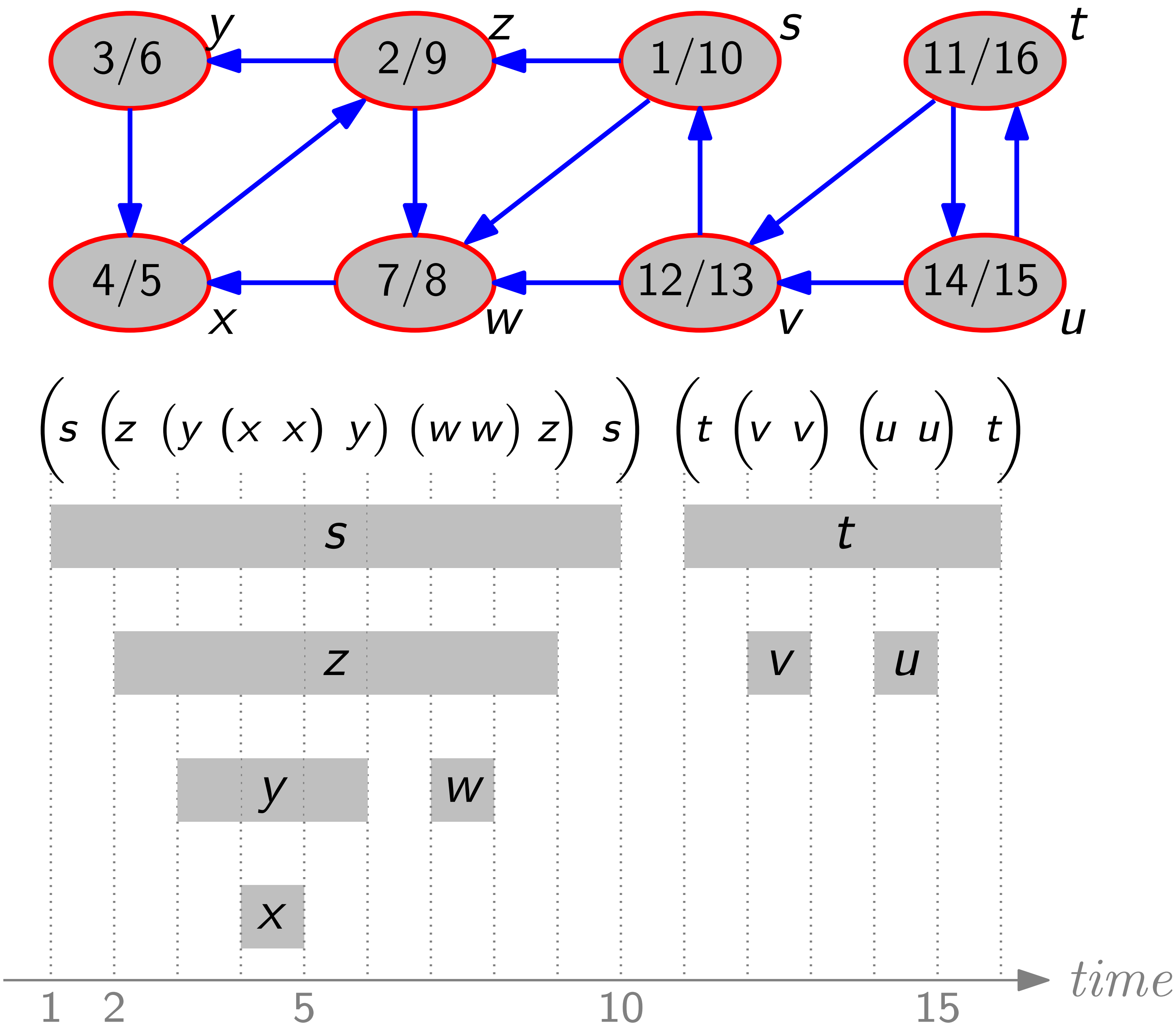
Tiefensuche – Eigenschaften



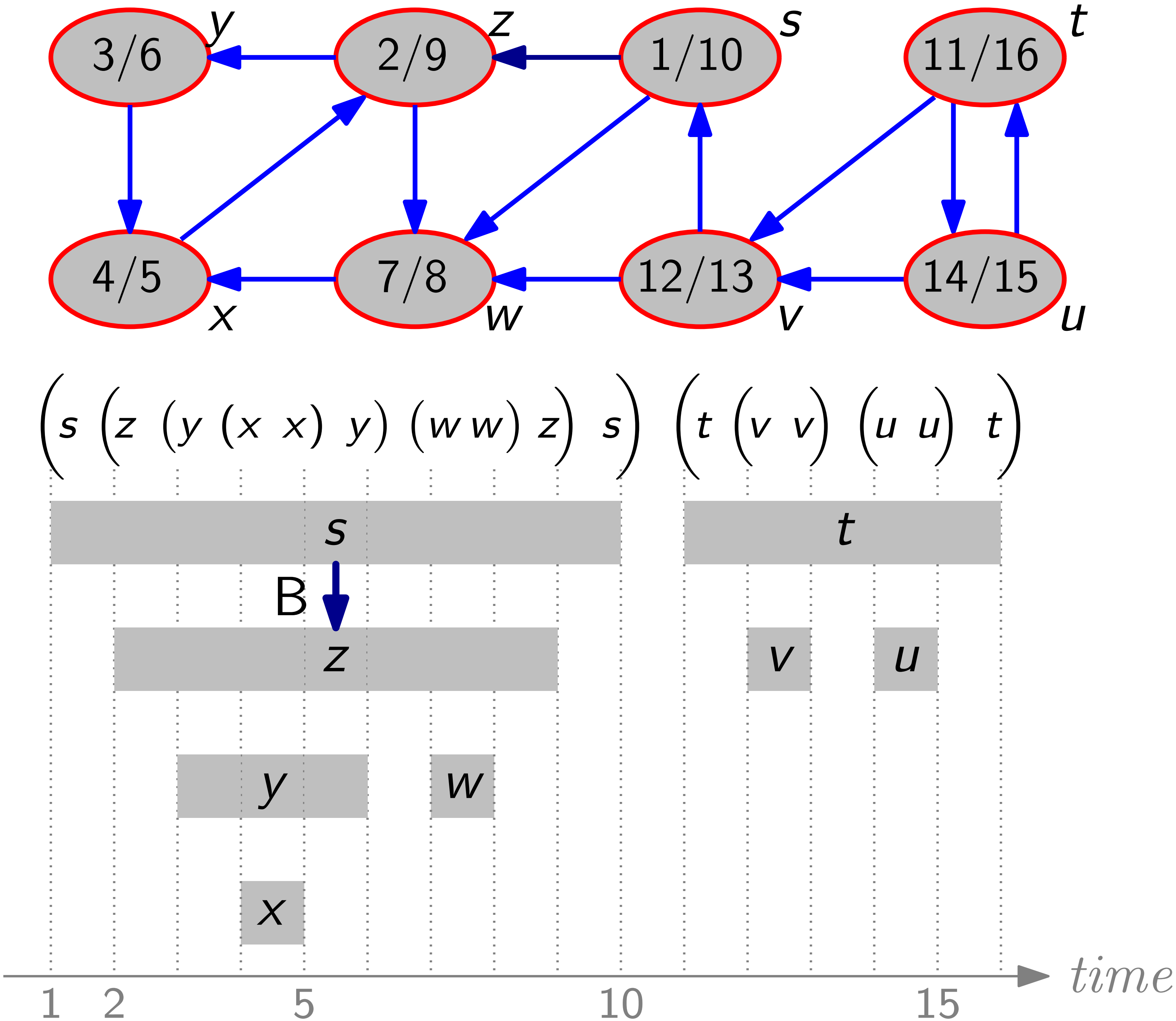
Tiefensuche – Eigenschaften



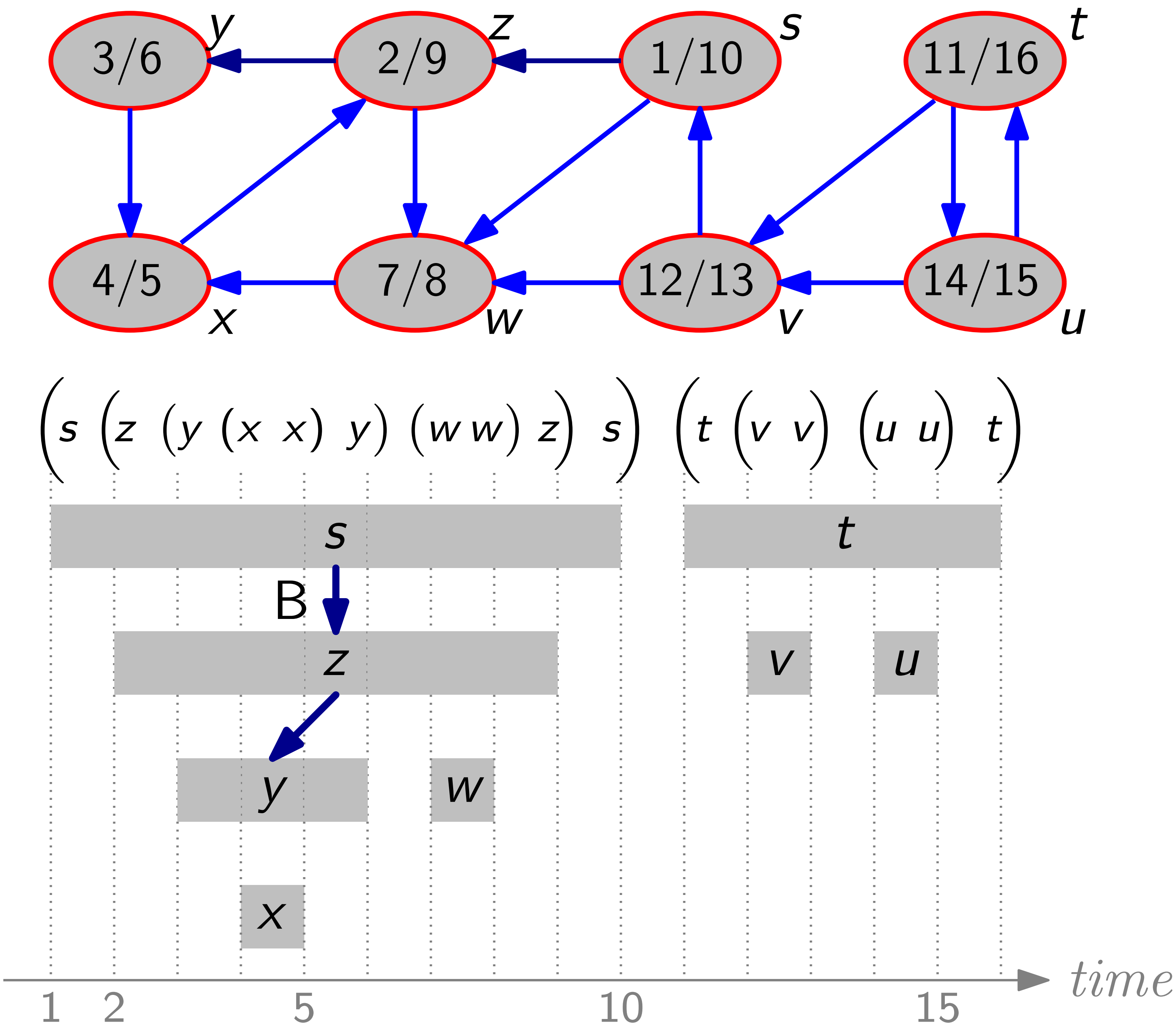
Tiefensuche – Eigenschaften



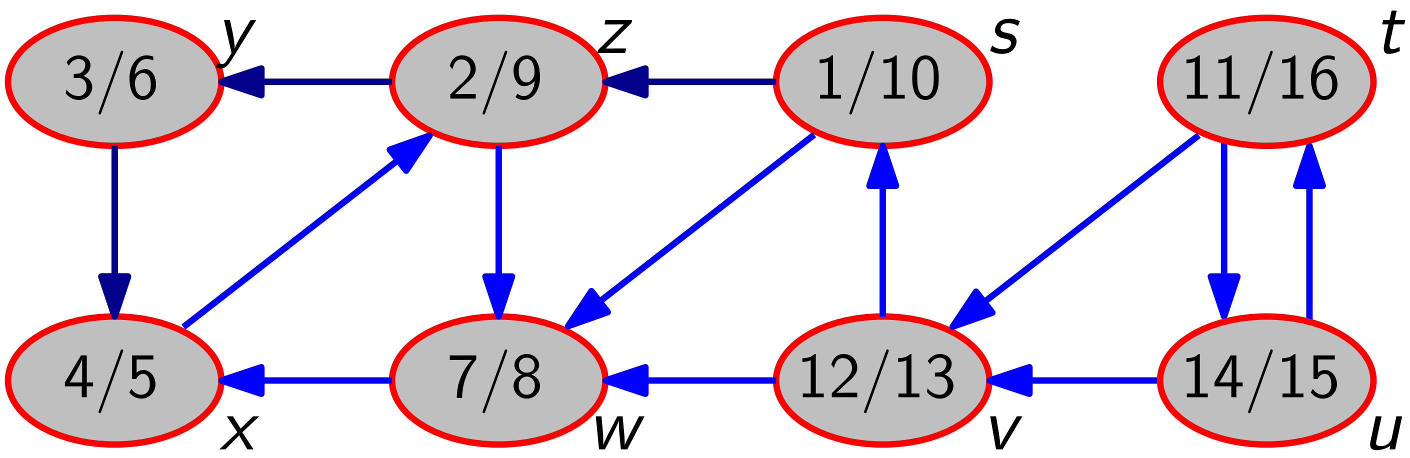
Tiefensuche – Eigenschaften

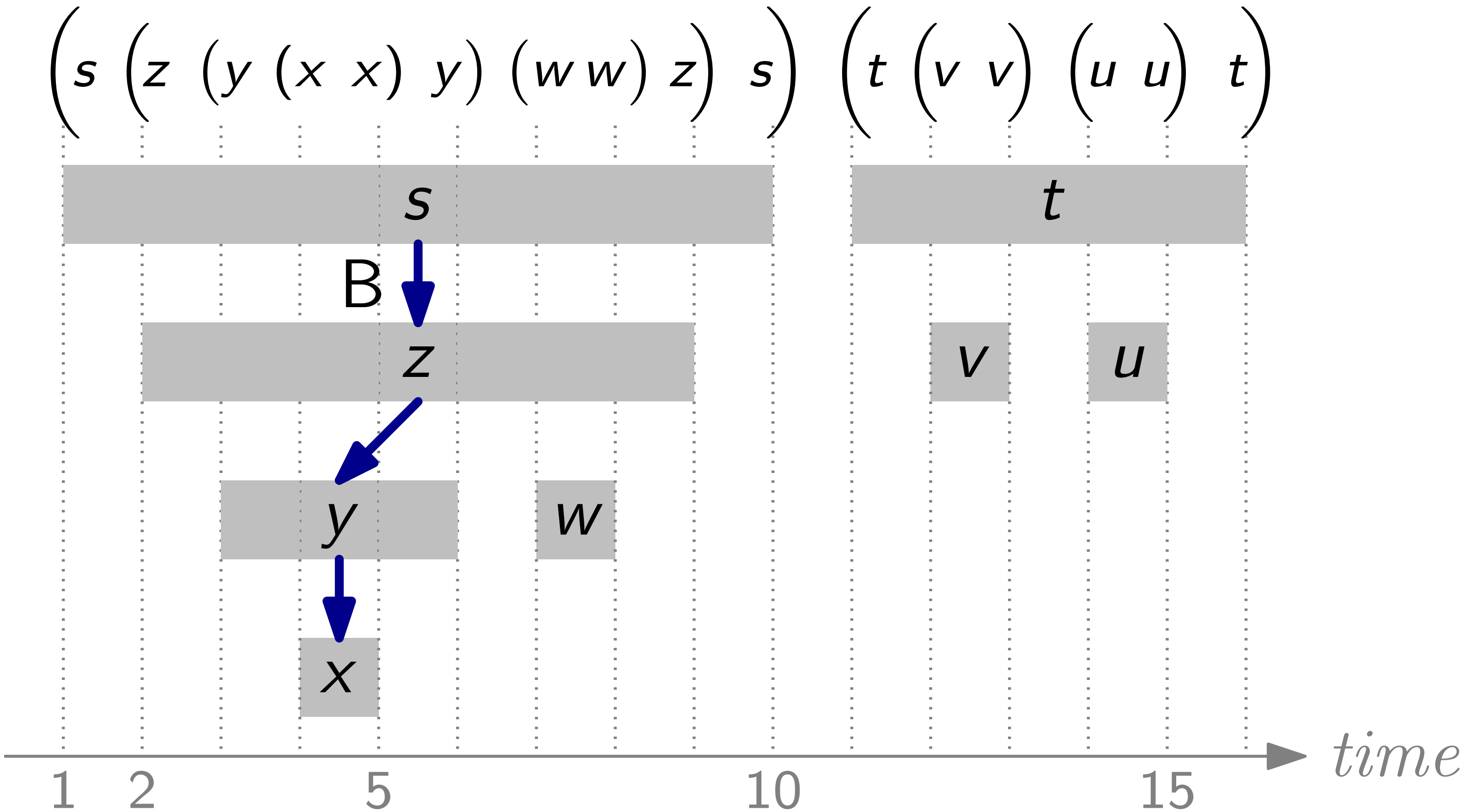


Tiefensuche – Eigenschaften

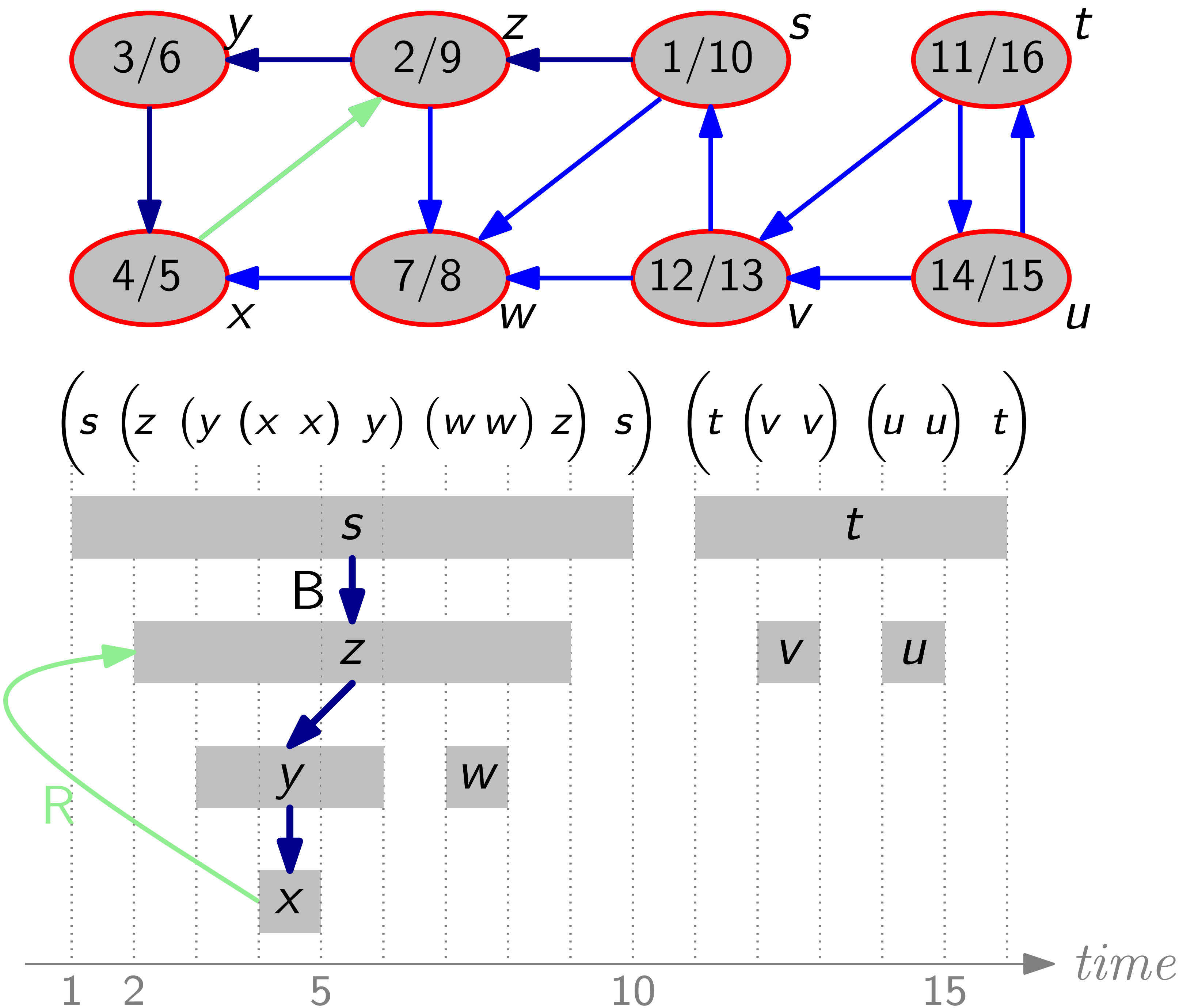


Tiefensuche – Eigenschaften

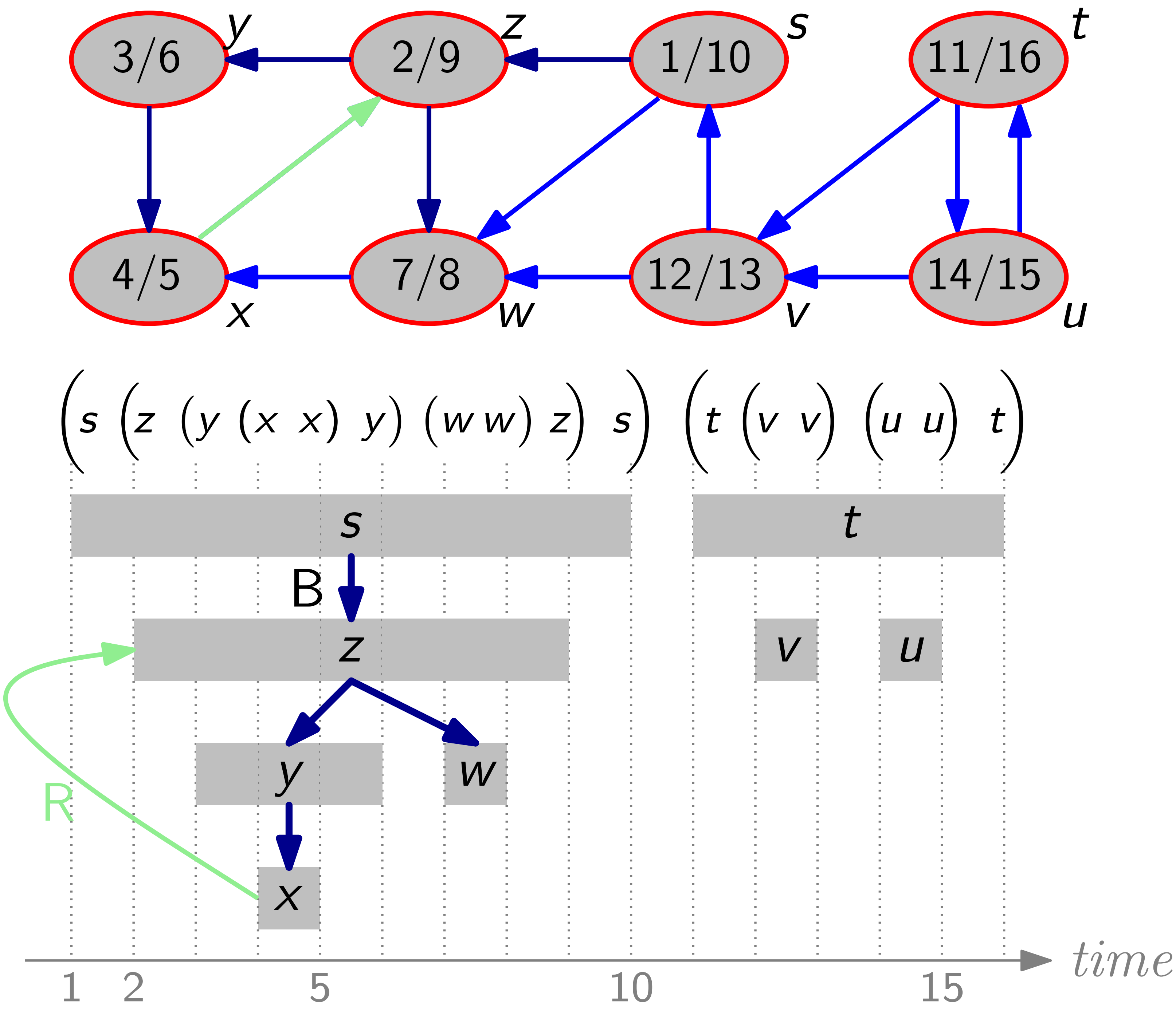




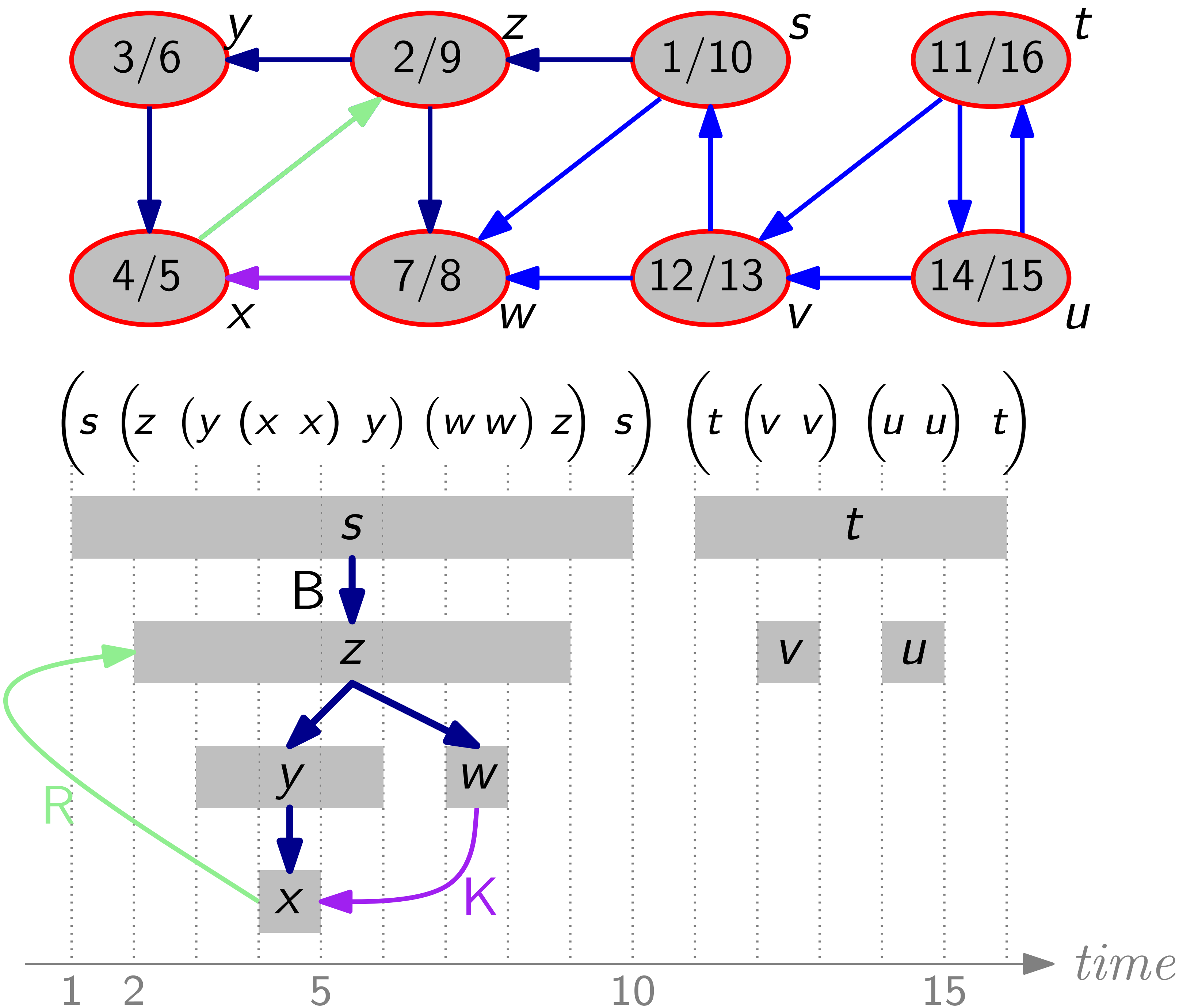
Tiefensuche – Eigenschaften



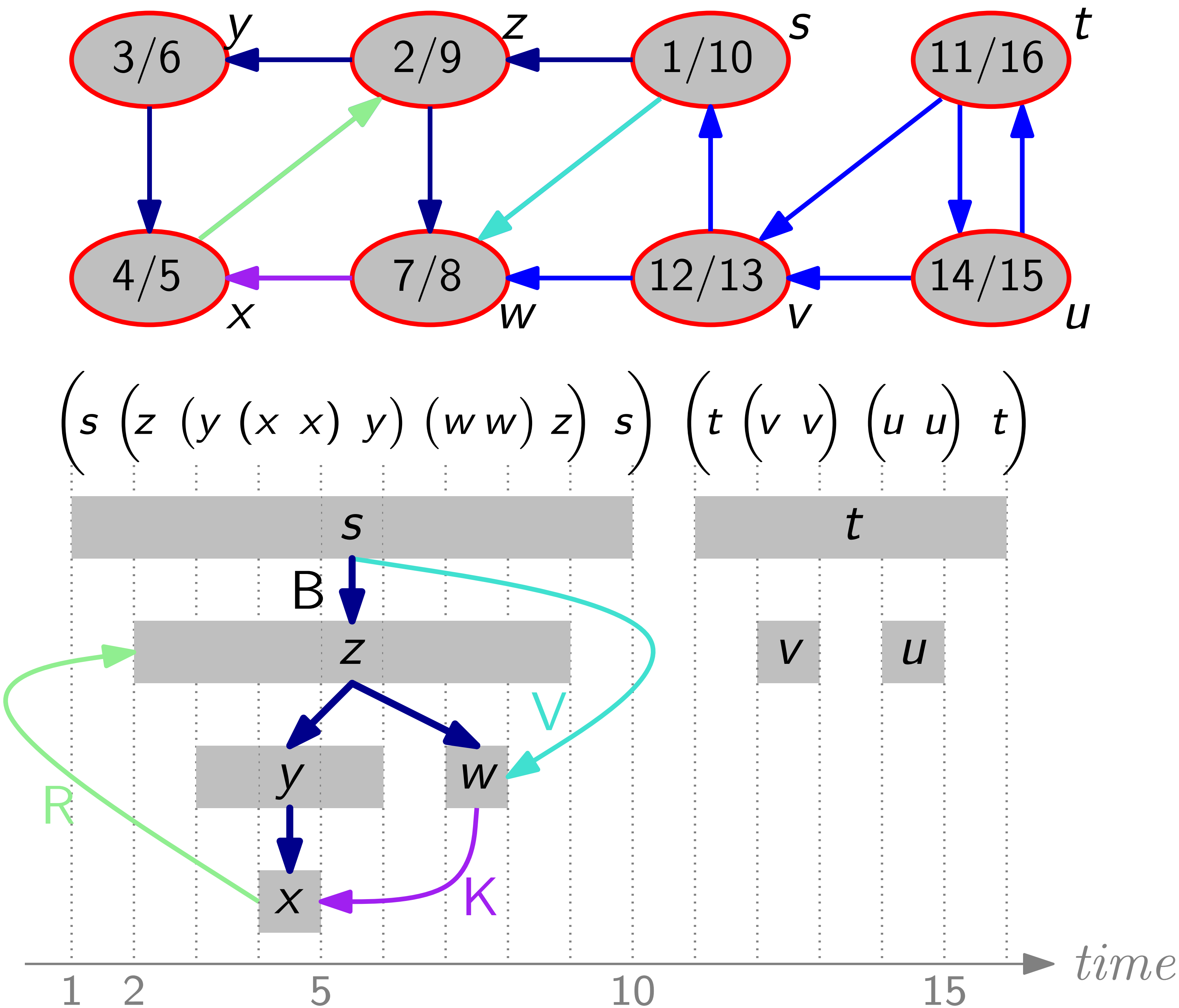
Tiefensuche – Eigenschaften



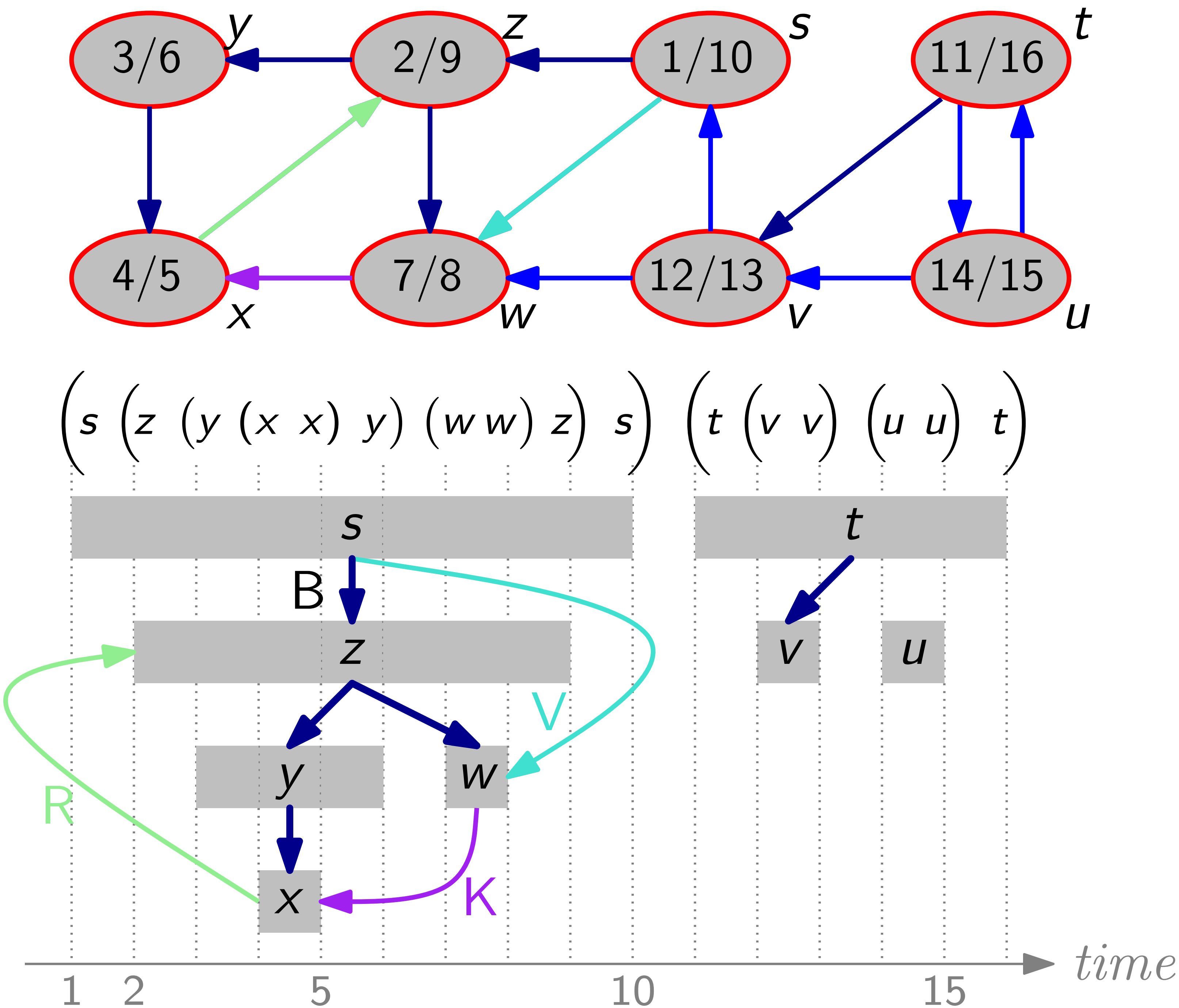
Tiefensuche – Eigenschaften



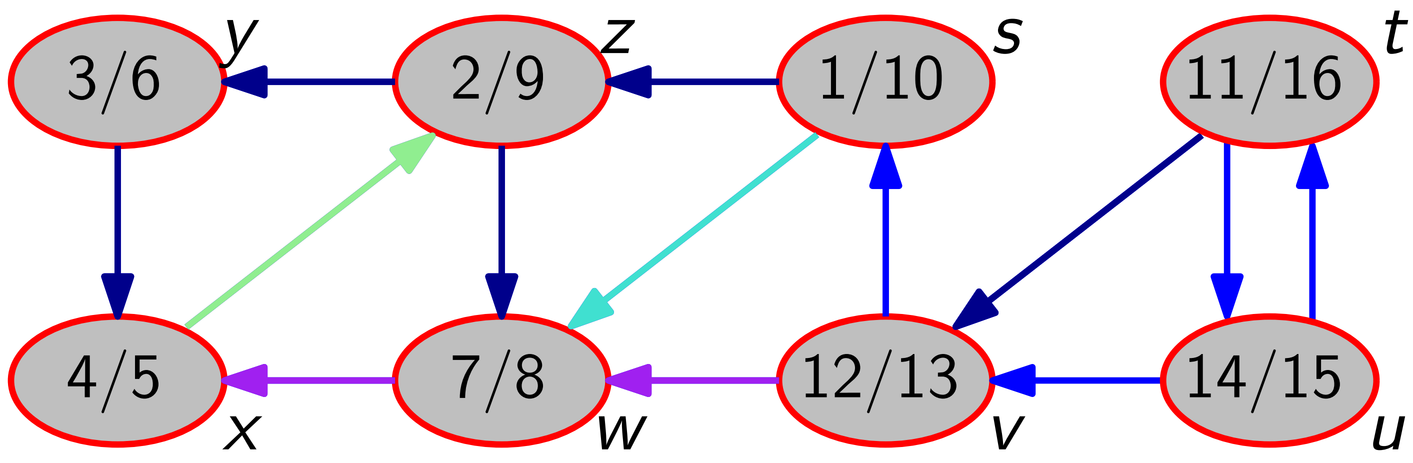
Tiefensuche – Eigenschaften



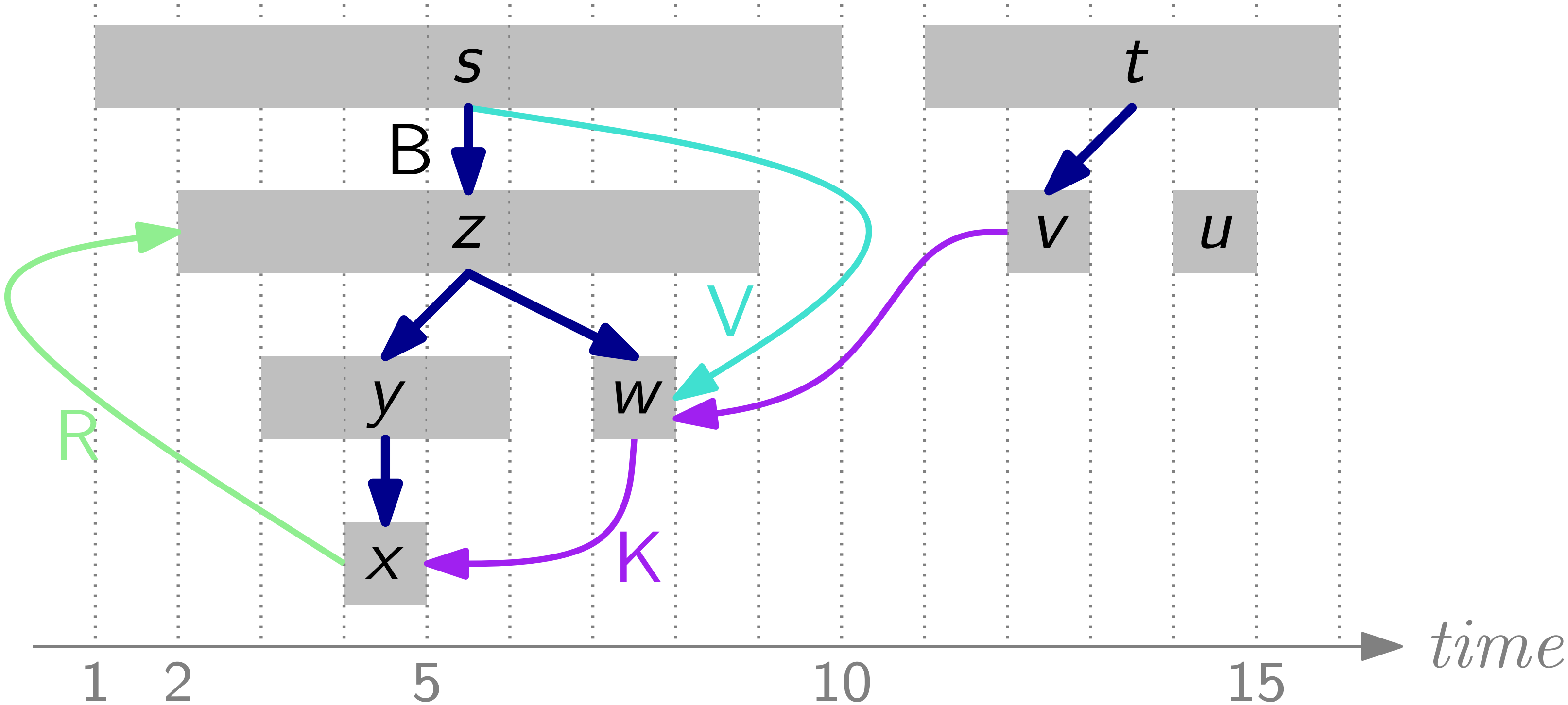
Tiefensuche – Eigenschaften



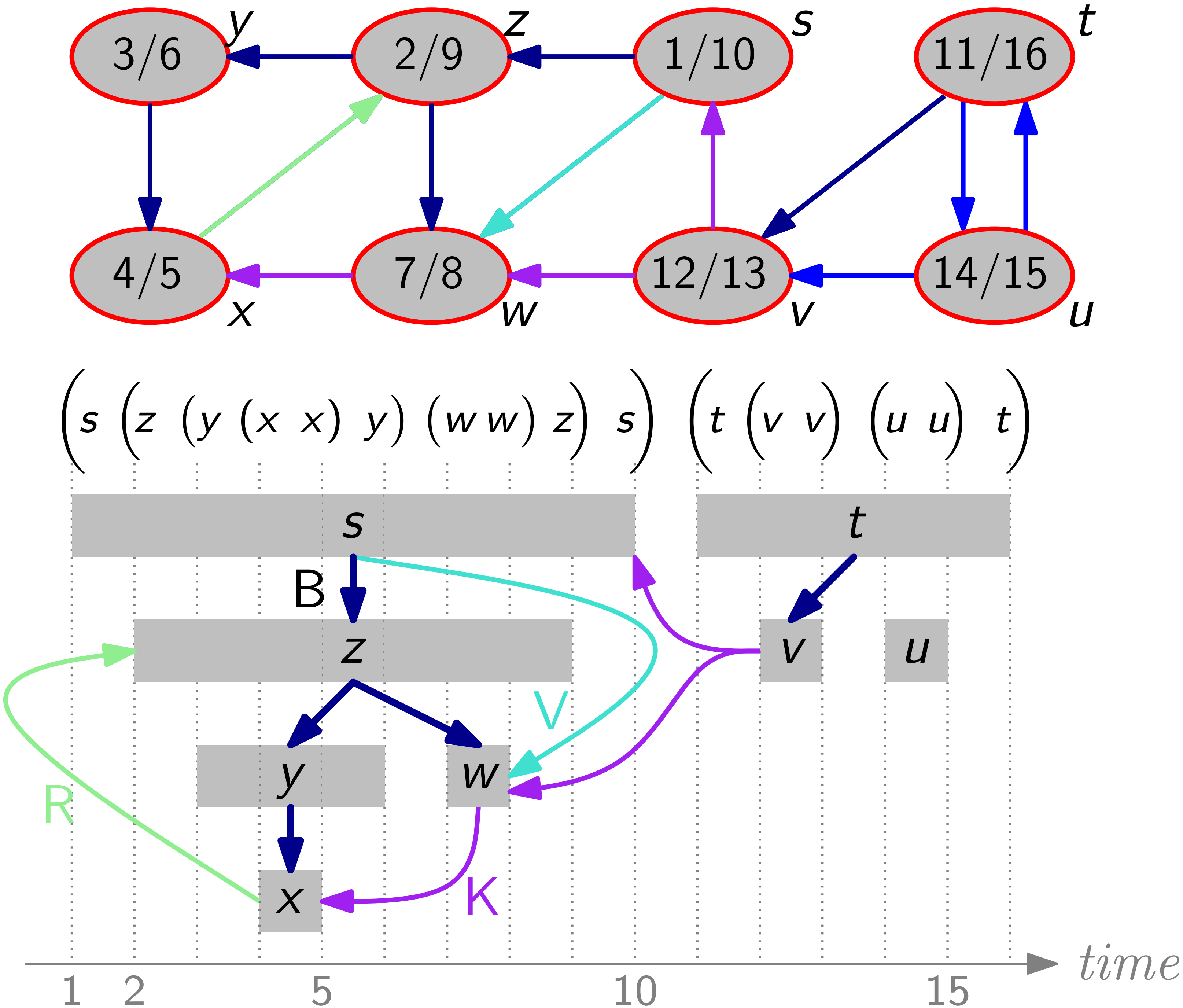
Tiefensuche – Eigenschaften



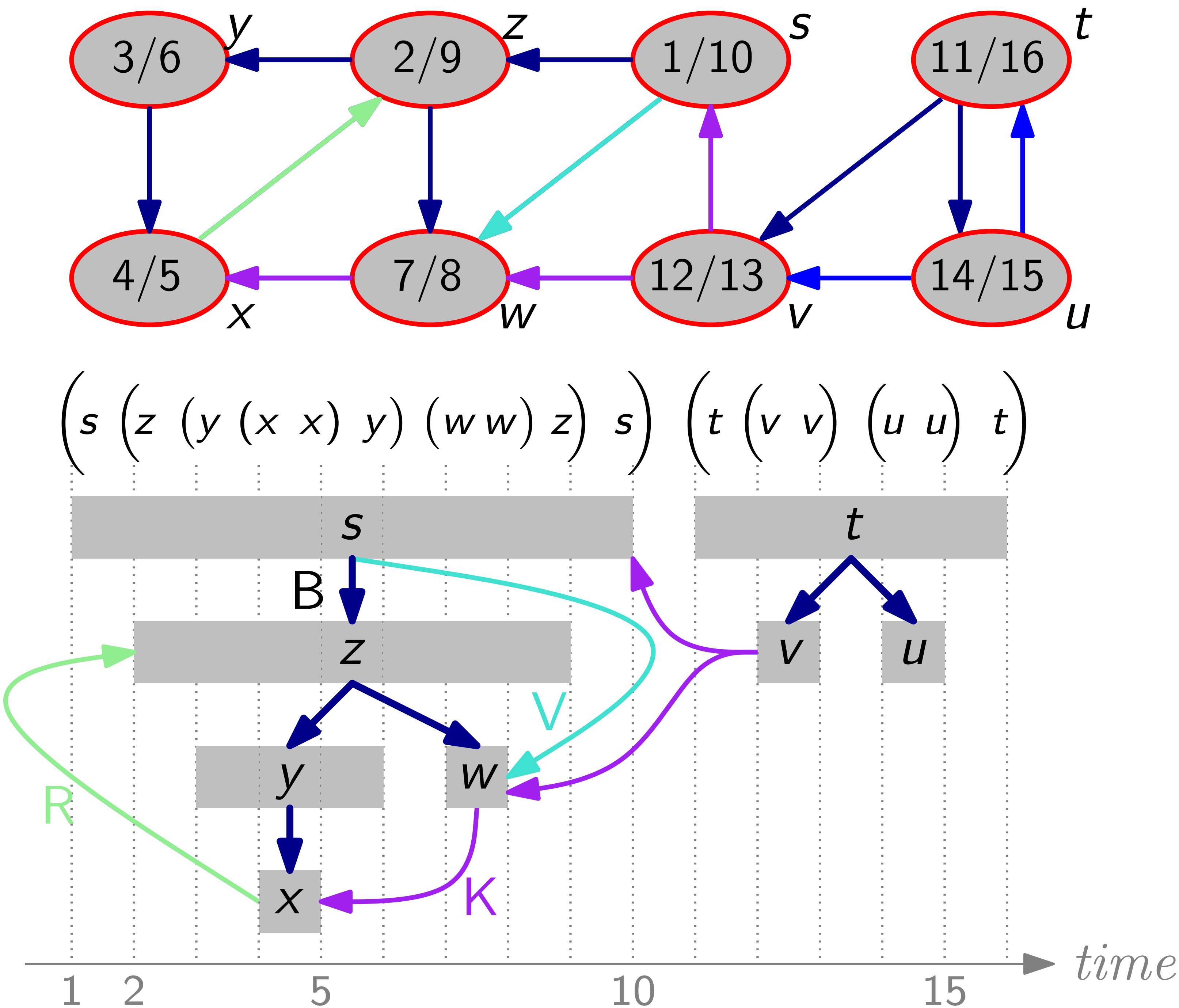
$\Big(s\ \Big(z\ \Big(y\ \Big(x\ \ x\Big)\ \ y\Big)\ \Big(w\ w\Big)\ \ z\Big)\ \ s\Big)\ \Big(t\ \Big(v\ \ v\Big)\ \Big(u\ \ u\Big)\ \ t\Big)$



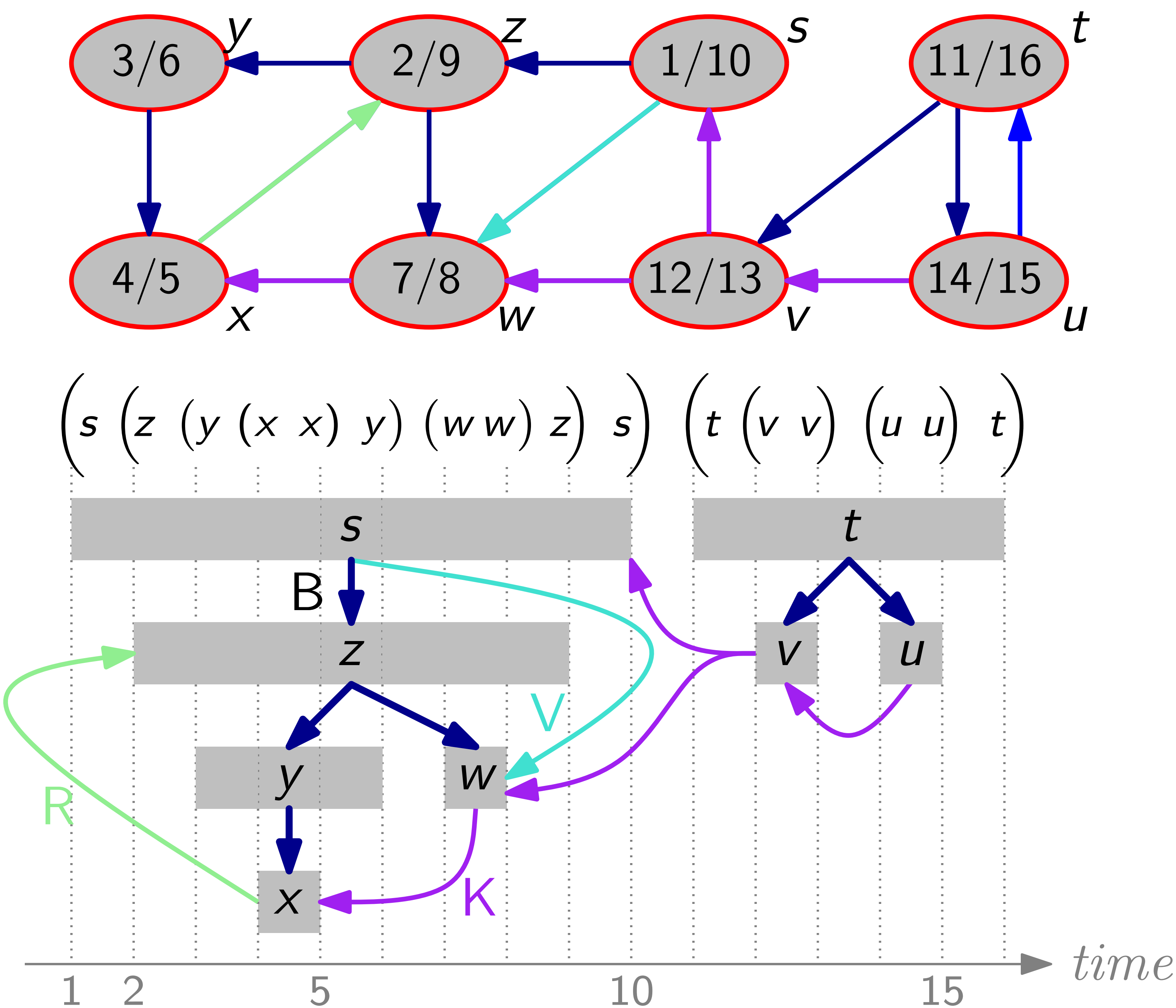
Tiefensuche – Eigenschaften



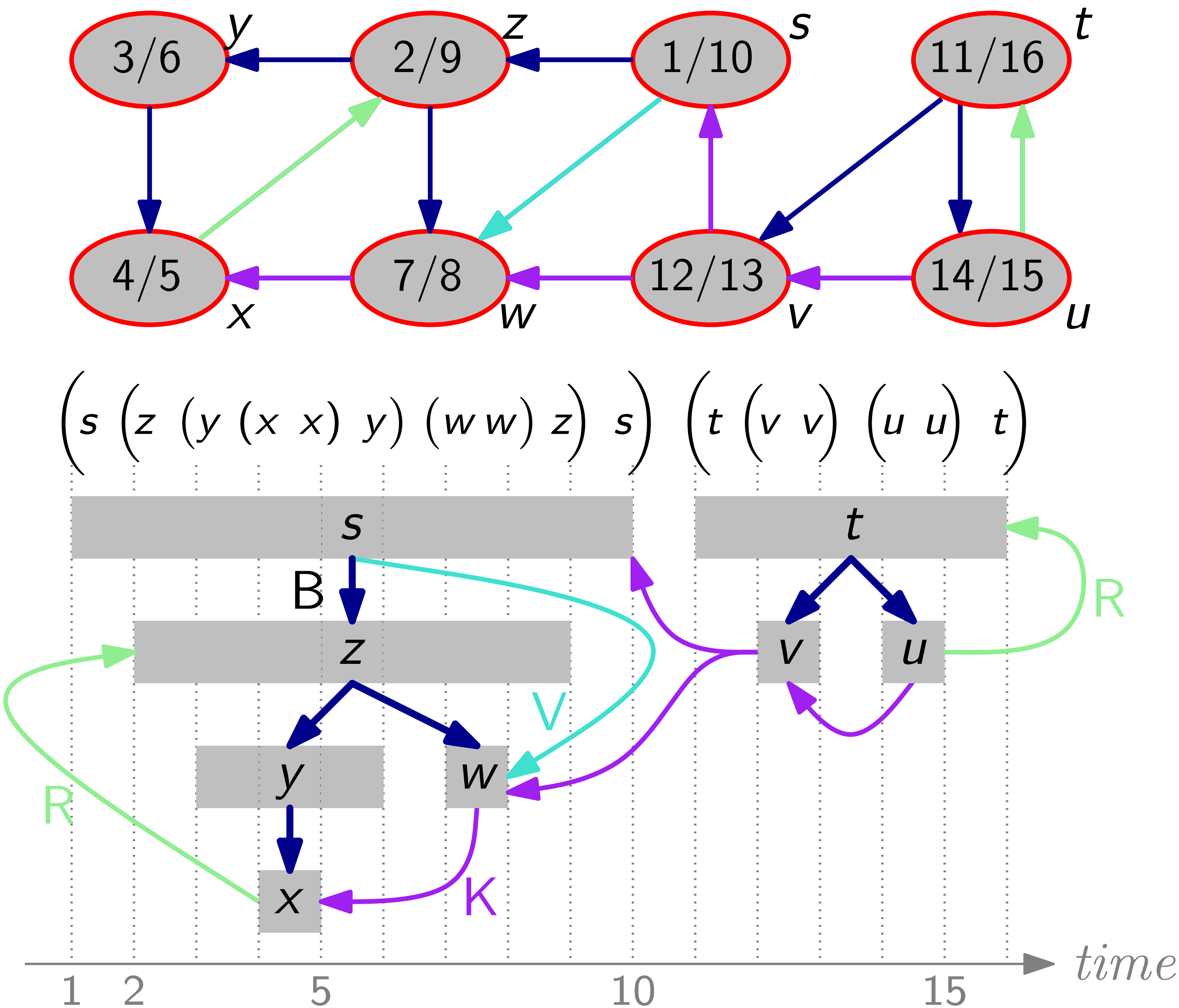
Tiefensuche – Eigenschaften



Tiefensuche – Eigenschaften



Tiefensuche – Eigenschaften



Tiefensuche – Analyse

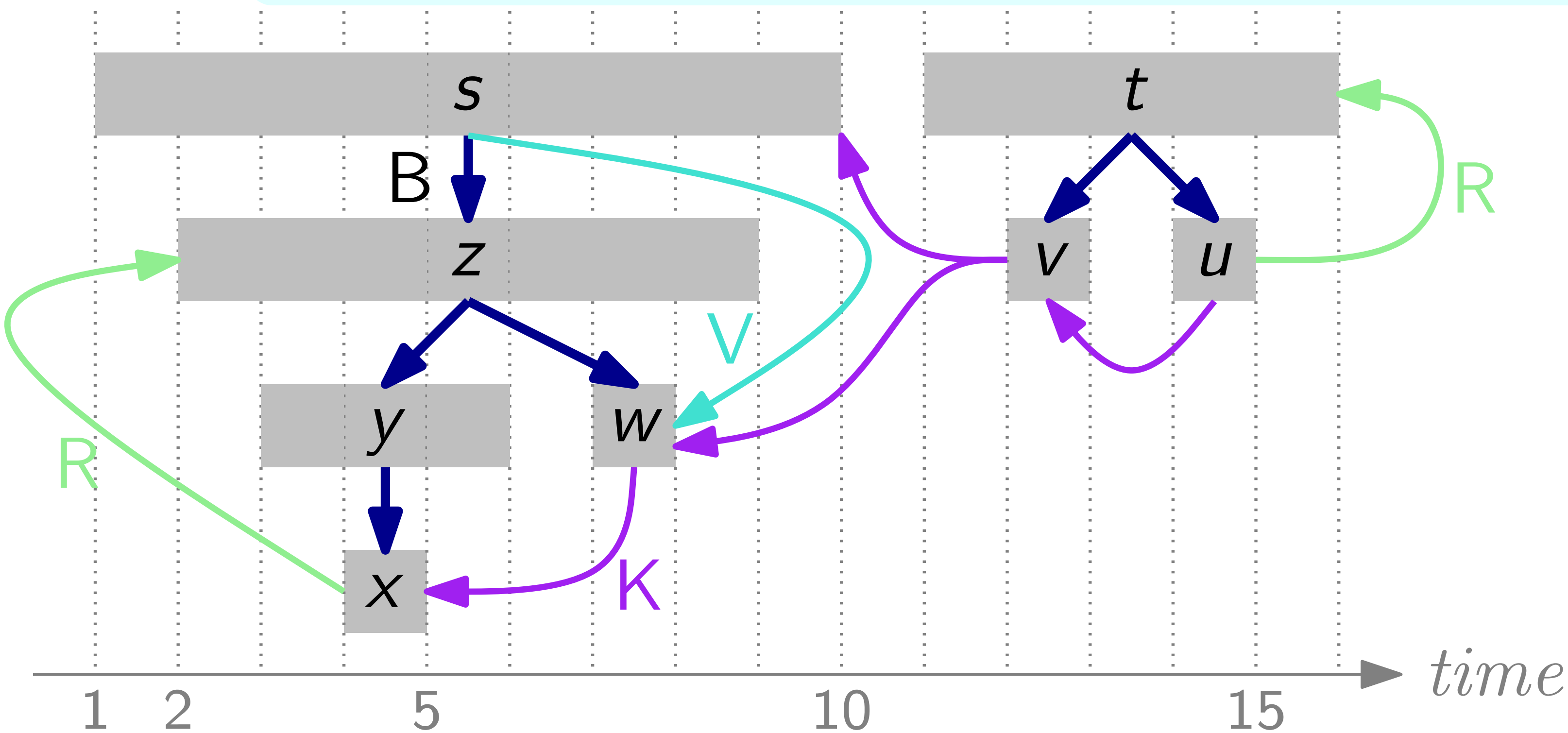
Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i)

(ii)

(iii)



Tiefensuche – Analyse

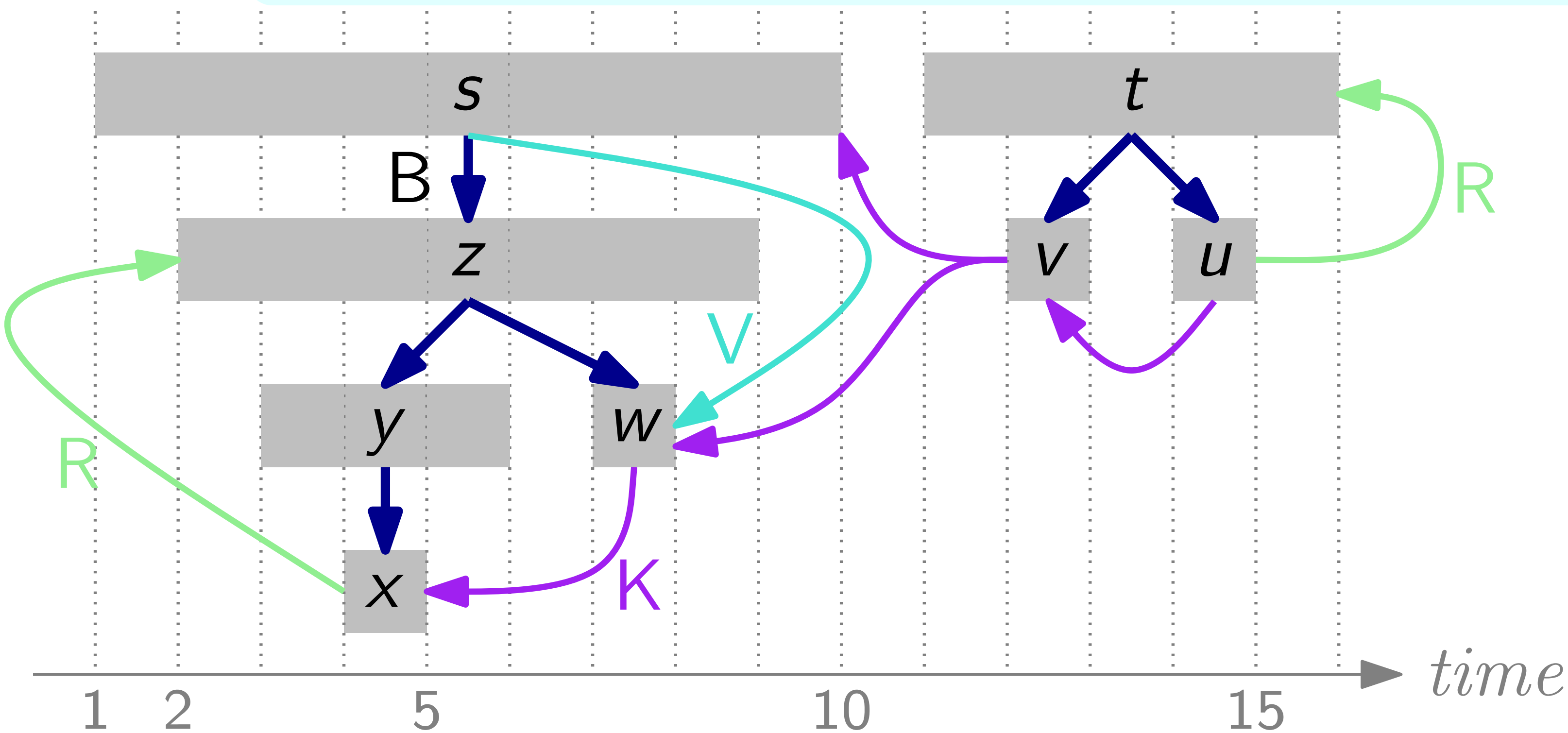
Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i)

(ii)

(iii)



Tiefensuche – Analyse

d.h. für jedes Paar $\{u, v\}$ von Knoten (mit $u \neq v$)

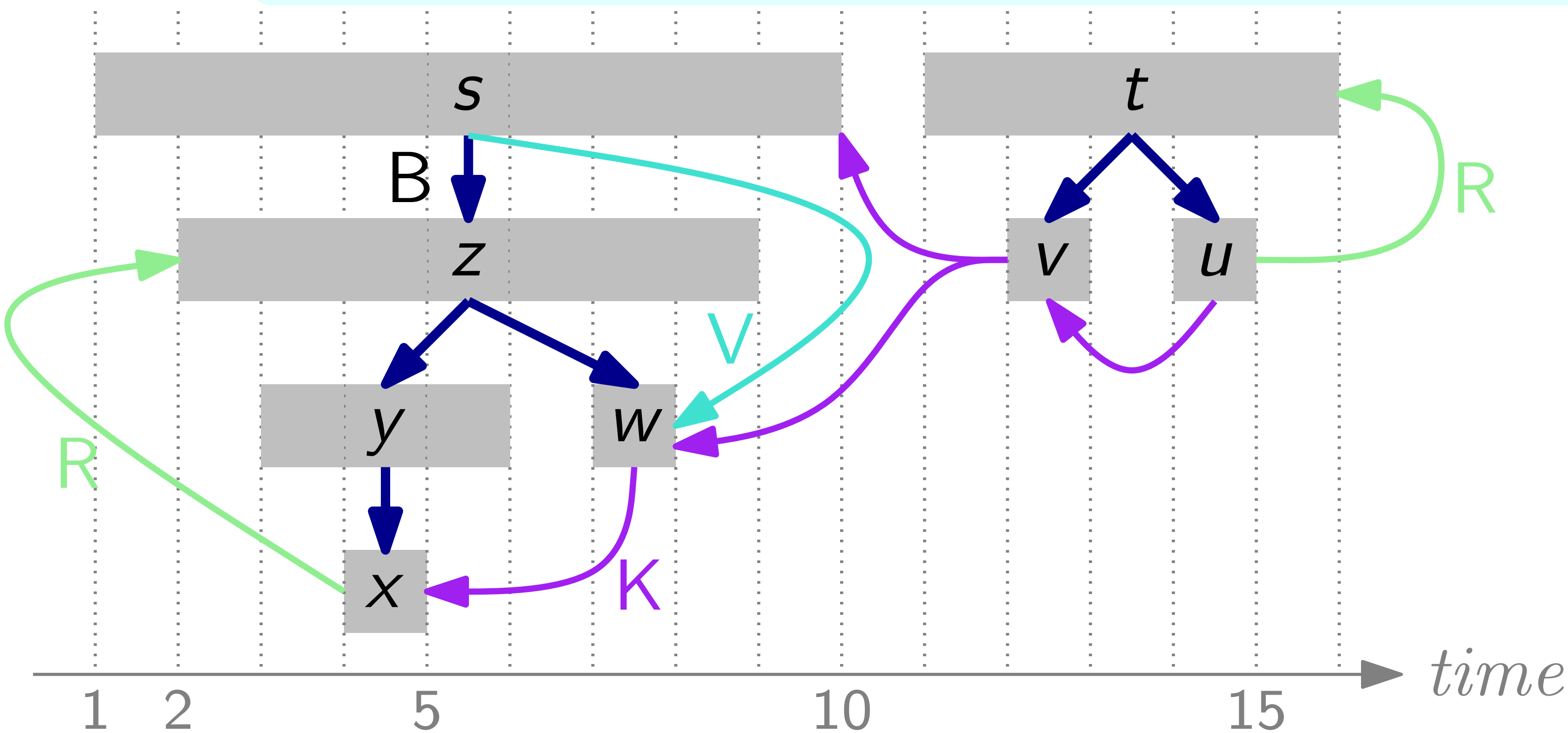
Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i)

(ii)

(iii)



Tiefensuche – Analyse

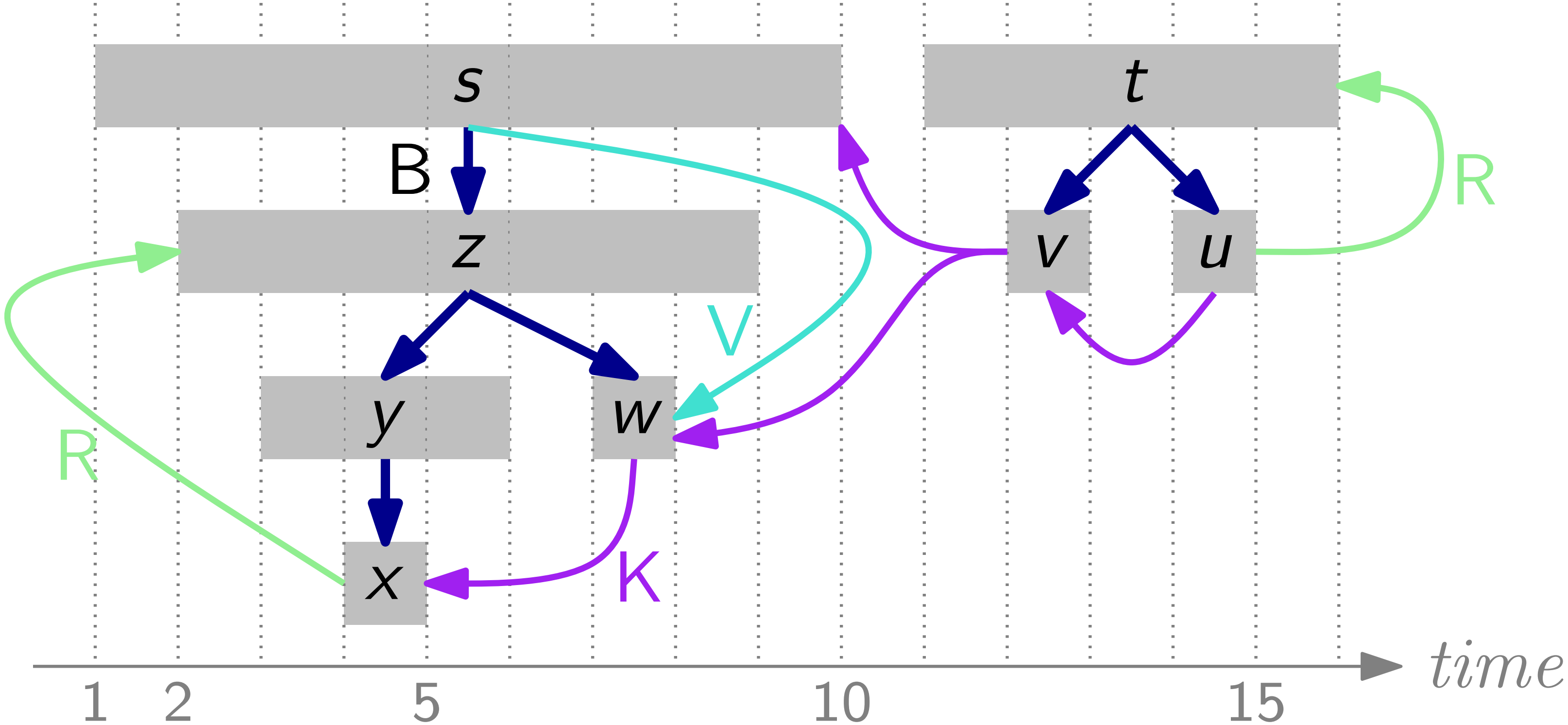
Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii)

(iii)



Tiefensuche – Analyse

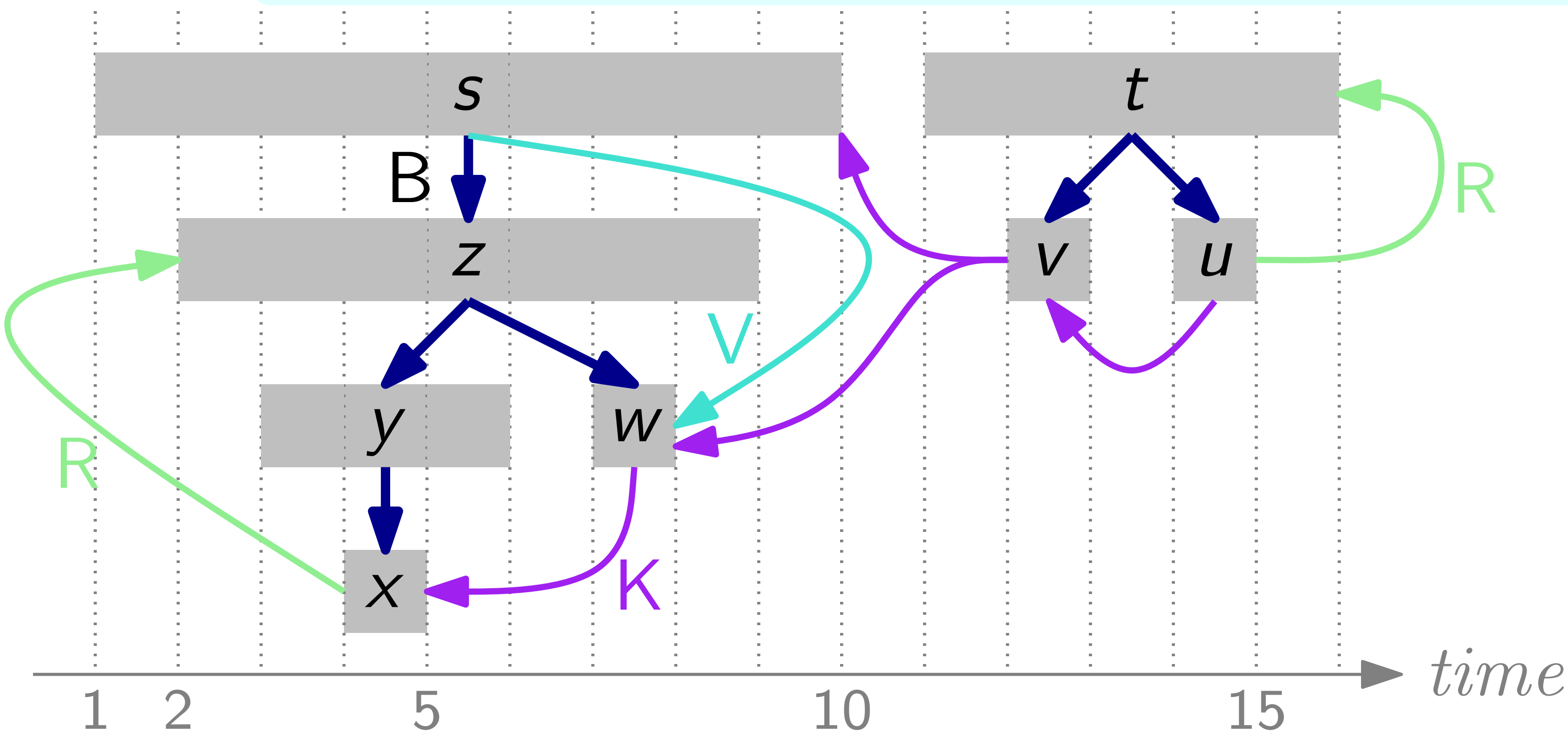
Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii)



Tiefensuche – Analyse

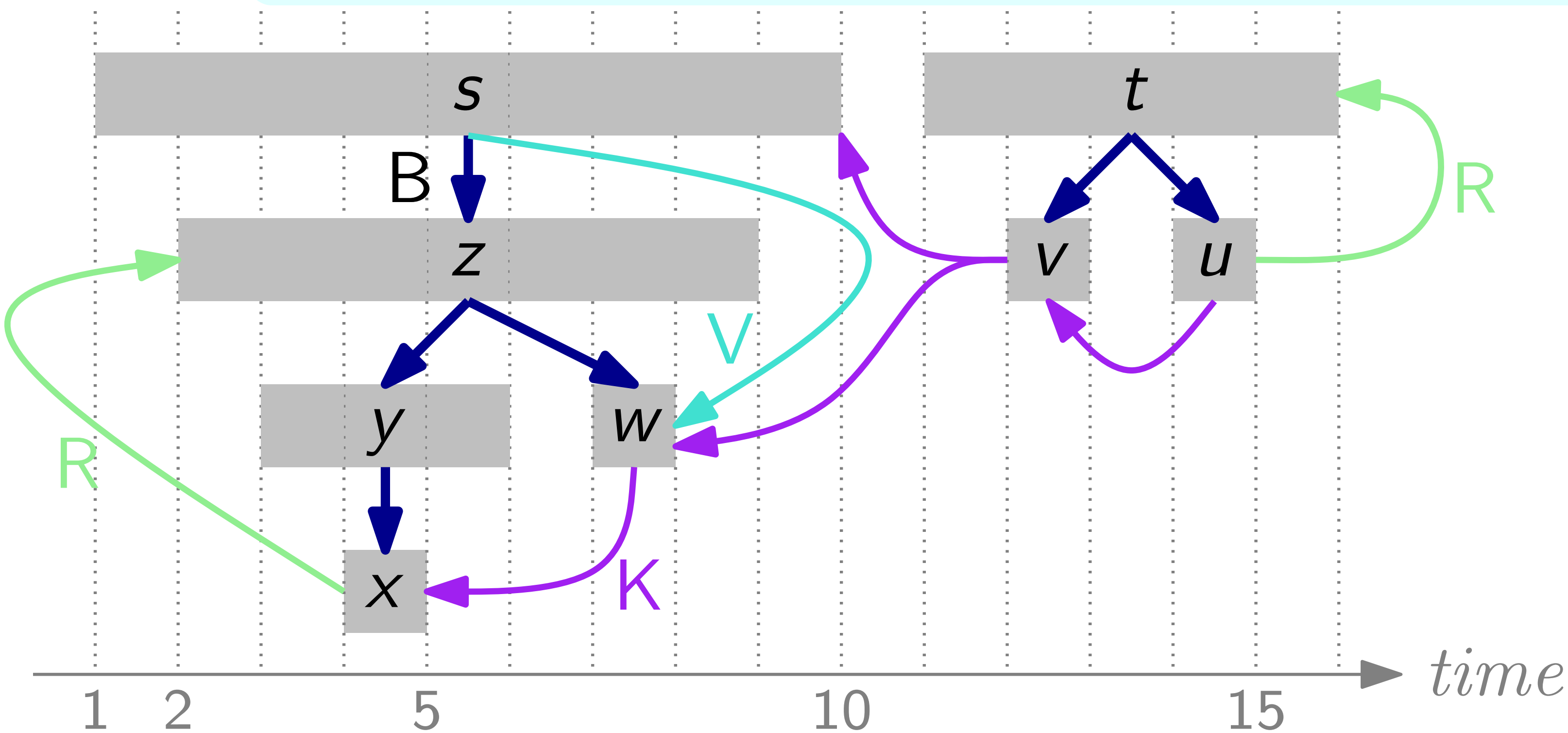
Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.



Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

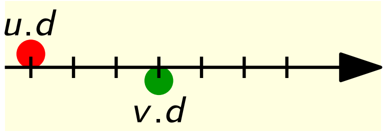
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

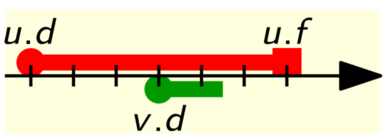
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$.

Tiefensuche – Analyse

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

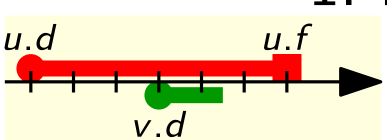
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

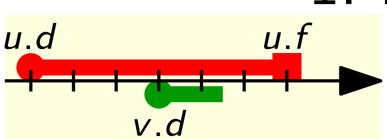
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.

$\Rightarrow$ v ist *Nachfolger* von u

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

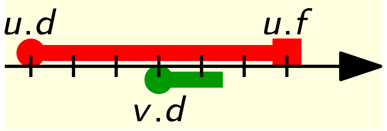
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.

$\Rightarrow$ v ist *Nachfolger* von u, d.h. es gibt einen u-v-Weg.

Tiefensuche – Analyse

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
$time = time + 1$
$u.d = time$; $u.color = gray$
foreach $v \in \text{Adj}[u]$ **do**
  if $v.color == white$ **then**
    $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
$time = time + 1$
$u.f = time$; $u.color = black$

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

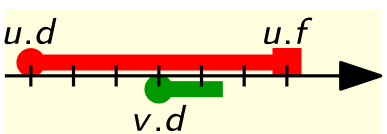
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.
$\Rightarrow$ v ist *Nachfolger* von u, d.h. es gibt einen u-v-Weg.
Wegen $u.d < v.d$ gilt:

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

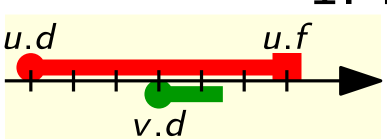
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.

$\Rightarrow$ v ist *Nachfolger* von u, d.h. es gibt einen u-v-Weg.

Wegen $u.d < v.d$ gilt: v wurde später als u entdeckt.

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Tiefensuche – Analyse

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

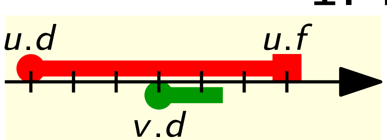
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.

$\Rightarrow$ v ist *Nachfolger* von u, d.h. es gibt einen u-v-Weg.

Wegen $u.d < v.d$ gilt: v wurde später als u entdeckt.

$\Rightarrow$ alle Kanten, die v verlassen, sind erforscht;
v wird schwarz, *bevor* DFS zu u zurückkehrt und u schwarz macht

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

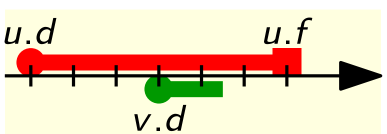
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.

$\Rightarrow$ v ist *Nachfolger* von u, d.h. es gibt einen u-v-Weg.

Wegen $u.d < v.d$ gilt: v wurde später als u entdeckt.

$\Rightarrow$ alle Kanten, die v verlassen, sind erforscht;
v wird schwarz, *bevor* DFS zu u zurückkehrt und u schwarz macht $\Rightarrow$ $[v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$,

Tiefensuche – Analyse

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
$time = time + 1$
$u.d = time$; $u.color = gray$
foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
  if $v.color == white$ **then**
    $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
$time = time + 1$
$u.f = time$; $u.color = black$

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

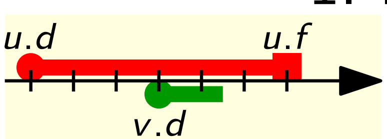
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$, d.h. v wurde entdeckt, als u noch grau war.

$\Rightarrow$ v ist *Nachfolger* von u, d.h. es gibt einen u-v-Weg.

Wegen $u.d < v.d$ gilt: v wurde später als u entdeckt.

$\Rightarrow$ alle Kanten, die v verlassen, sind erforscht;
v wird schwarz, *bevor* DFS zu u zurückkehrt und u schwarz macht $\Rightarrow$ $[v.d, v.f] \subset [u.d, u.f]$, d.h. (iii) ✓

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

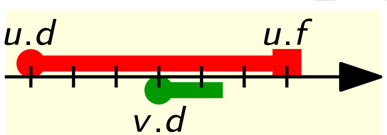
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

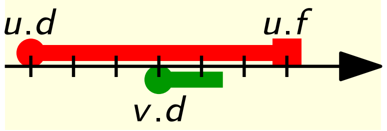
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Tiefensuche – Analyse

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

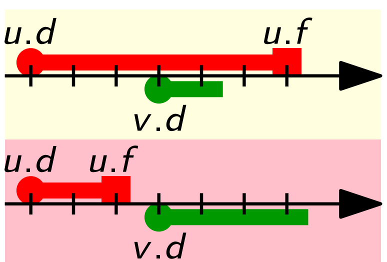
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Tiefensuche – Analyse

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

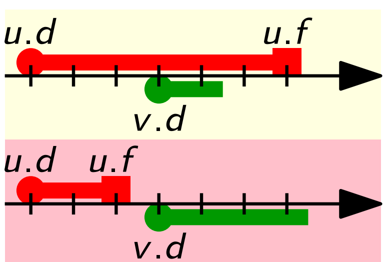
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

$u.f < v.d$

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Tiefensuche – Analyse

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

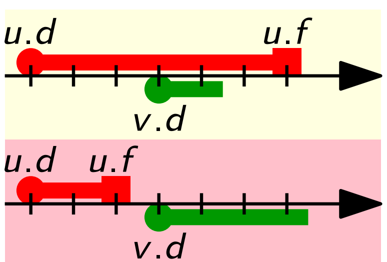
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.f < v.d$

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

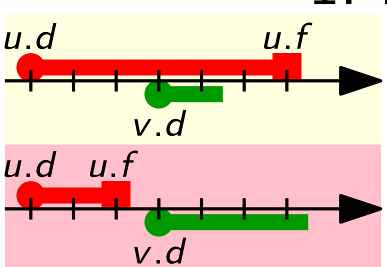
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d$

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

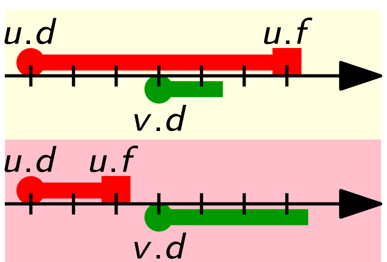
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

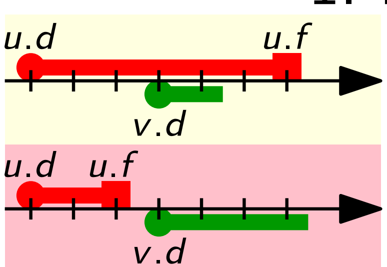
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow$

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

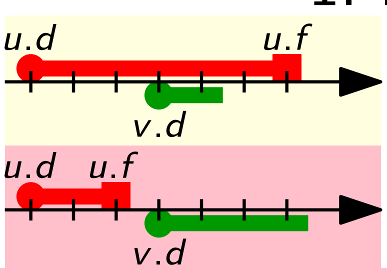
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

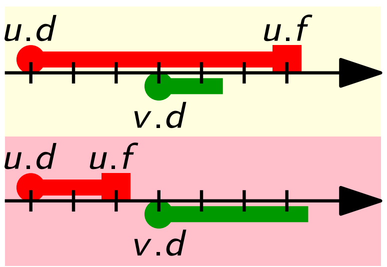
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

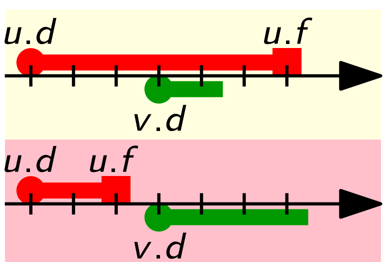
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen.

Tiefensuche – Analyse

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

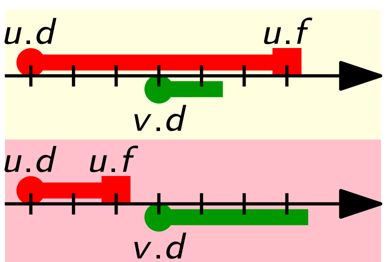
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$.

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen. $\Uparrow$ (i)

DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  $time = time + 1$
  $u.d = time$; $u.color = gray$
  foreach $v \in \mathrm{Adj}[u]$ **do**
    if $v.color == white$ **then**
      $v.\pi = u$; DFSVisit(G, v)
  $time = time + 1$
  $u.f = time$; $u.color = black$

Tiefensuche – Analyse

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

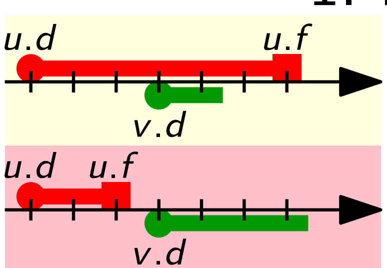
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$.



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$. ✓

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

(i) $\Uparrow$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

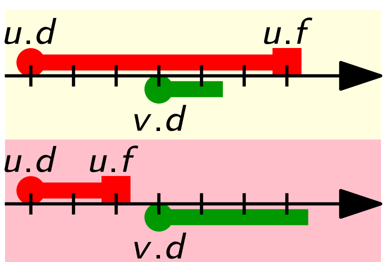
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$. ✓



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$. ✓

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

(i)

$\Uparrow$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

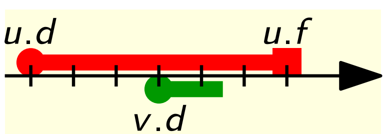
(i) Besuchsintervalle disjunkt und
Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

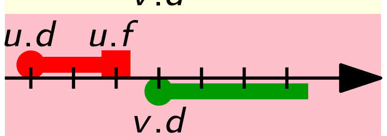
(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$. $\checkmark$ 2. Fall: $v.d < u.d$.



A) $v.d < u.f$. $\checkmark$



B) $u.f < v.d$. $\checkmark$

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

(i) $\Uparrow$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

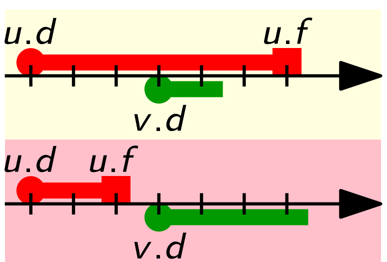
(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$. ✓ 2. Fall: $v.d < u.d$. Symmetrisch!



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$. ✓

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$ (i)

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während $\Uparrow$ der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

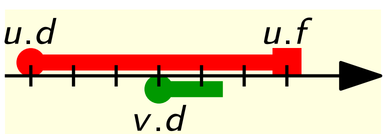
(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

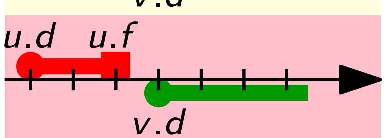
Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$. ✓ 2. Fall: $v.d < u.d$. Symmetrisch!

(Vertausche im Beweis $u \leftrightarrow v$.)



A) $v.d < u.f$. ✓



B) $u.f < v.d$. ✓

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

(i)

$\Uparrow$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen.

Tiefensuche – Analyse

```
DFSVisit(Graph G, Vertex u)
  time = time + 1
  u.d = time; u.color = gray
  foreach v ∈ Adj[u] do
    if v.color == white then
      v.π = u; DFSVisit(G, v)
  time = time + 1
  u.f = time; u.color = black
```

Satz. (Klammerntheorem)

Nach DFS(G) gilt für $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ genau eine der Bedingungen

(i) Besuchsintervalle disjunkt und Baumkanten enthalten weder u-v- noch v-u-Weg.

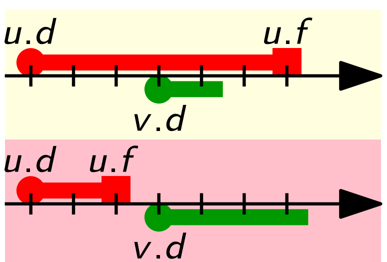
(ii) $[u.d, u.f] \subset [v.d, v.f]$ und Baumkanten enthalten v-u-Weg.

(iii) Wie (ii), nur umgekehrt.

Beweis. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Fall: $u.d < v.d$. ✓ 2. Fall: $v.d < u.d$. Symmetrisch! ✓

(Vertausche im Beweis $u \leftrightarrow v$.)



A) $v.d < u.f$. ✓

B) $u.f < v.d$. ✓

Laut Code gilt außerdem $u.d < u.f < v.d < v.f$

$\Rightarrow [u.d, u.f] \cap [v.d, v.f] = \emptyset$

$\Rightarrow$ Keiner der beiden Knoten wurde entdeckt, während der andere noch grau war, d.h. keiner Nachf. des anderen. $\Uparrow$ (i)

Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis.

Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.
O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz,
bevor u schwarz gefärbt wird

Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz,
bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).

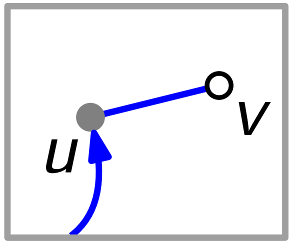
Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz, bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*.

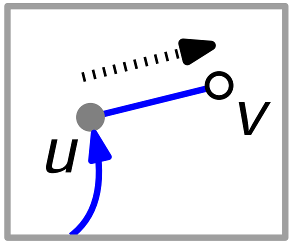
Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz, bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*.

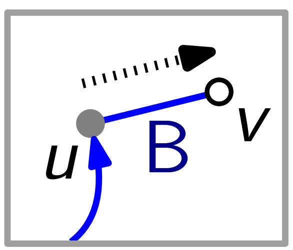
Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz, bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*. Dann ist uv Baumkante.

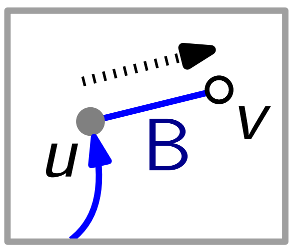
Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

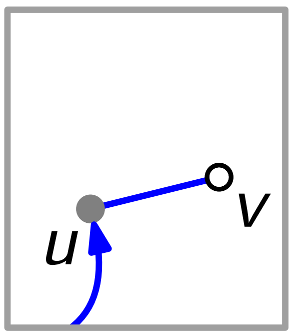
Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz,
bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*. Dann ist uv Baumkante.



- Andernfalls wird uv zum ersten Mal von v nach u überschritten.

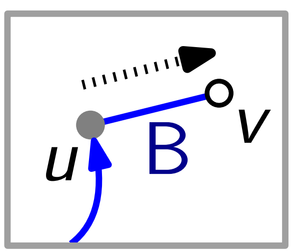
Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

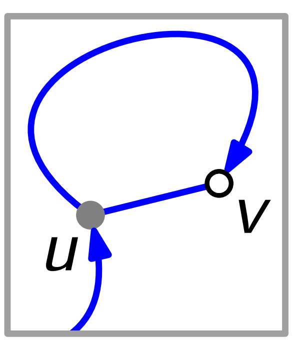
Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz, bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*. Dann ist uv Baumkante.



- Andernfalls wird uv zum ersten Mal von v nach u überschritten.

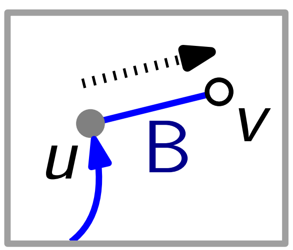
Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

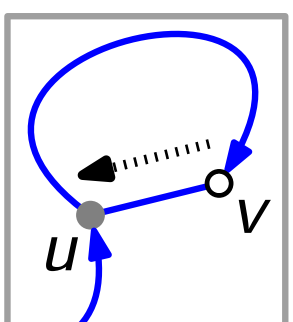
Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz,
bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*. Dann ist uv Baumkante.



- Andernfalls wird uv zum ersten Mal von v nach u überschritten.

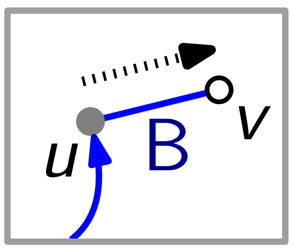
Tiefensuche in ungerichteten Graphen

Satz. G ungerichtet
$\Rightarrow$ G hat nur Baum- und Rückwärtskanten.

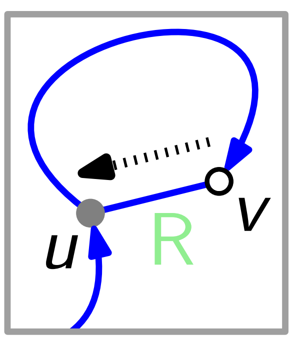
Beweis. Sei uv (kurz für $\{u, v\}$) eine beliebige Kante von G.

O.B.d.A. gilt $u.d < v.d$.

Dann entdeckt DFS v und färbt v schwarz,
bevor u schwarz gefärbt wird (da $v \in \mathrm{Adj}[u]$).



- Falls DFS uv zum ersten Mal von u nach v überschreitet, ist v zu diesem Zeitpunkt *weiss*. Dann ist uv Baumkante.



- Andernfalls wird uv zum ersten Mal von v nach u überschritten. Dann ist uv R-Kante, da u dann schon (und immer noch) *grau* ist.

$\square$

Ablaufplanung

Unterhose Socken

Hose Schuhe

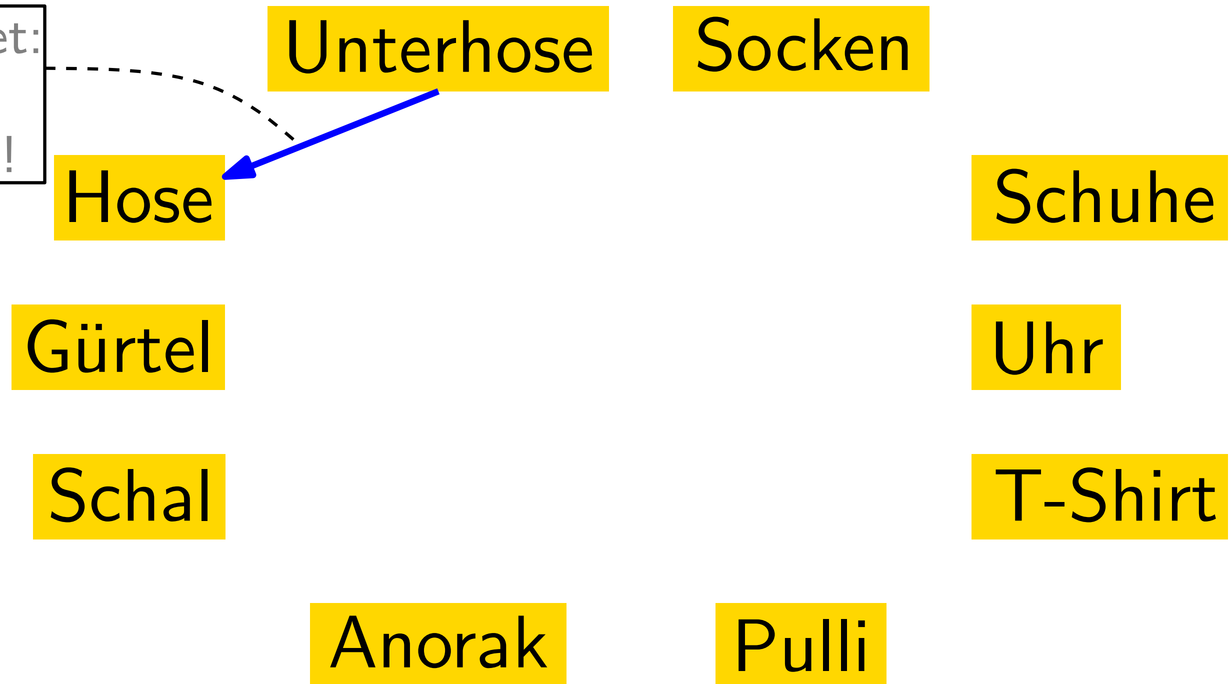
Gürtel Uhr

Schal T-Shirt

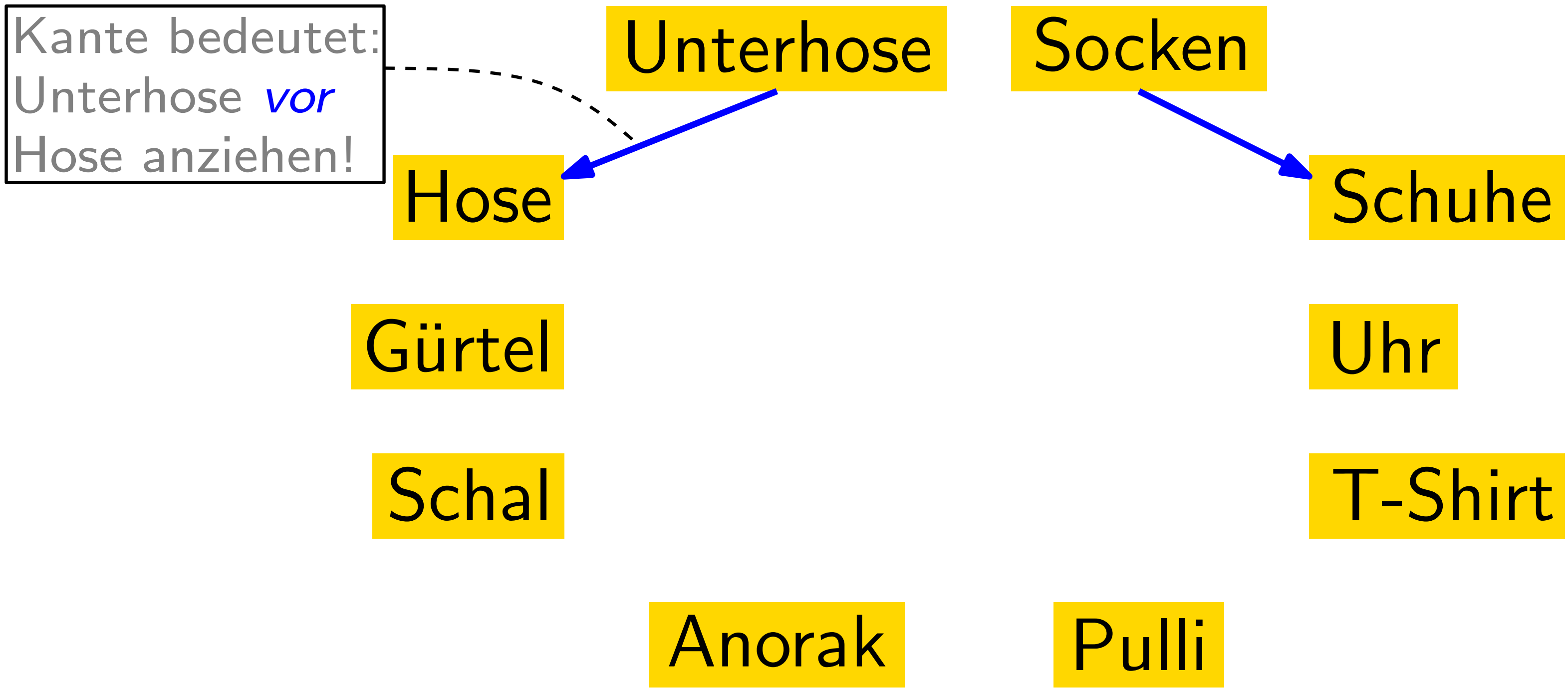
Anorak Pulli

Ablaufplanung

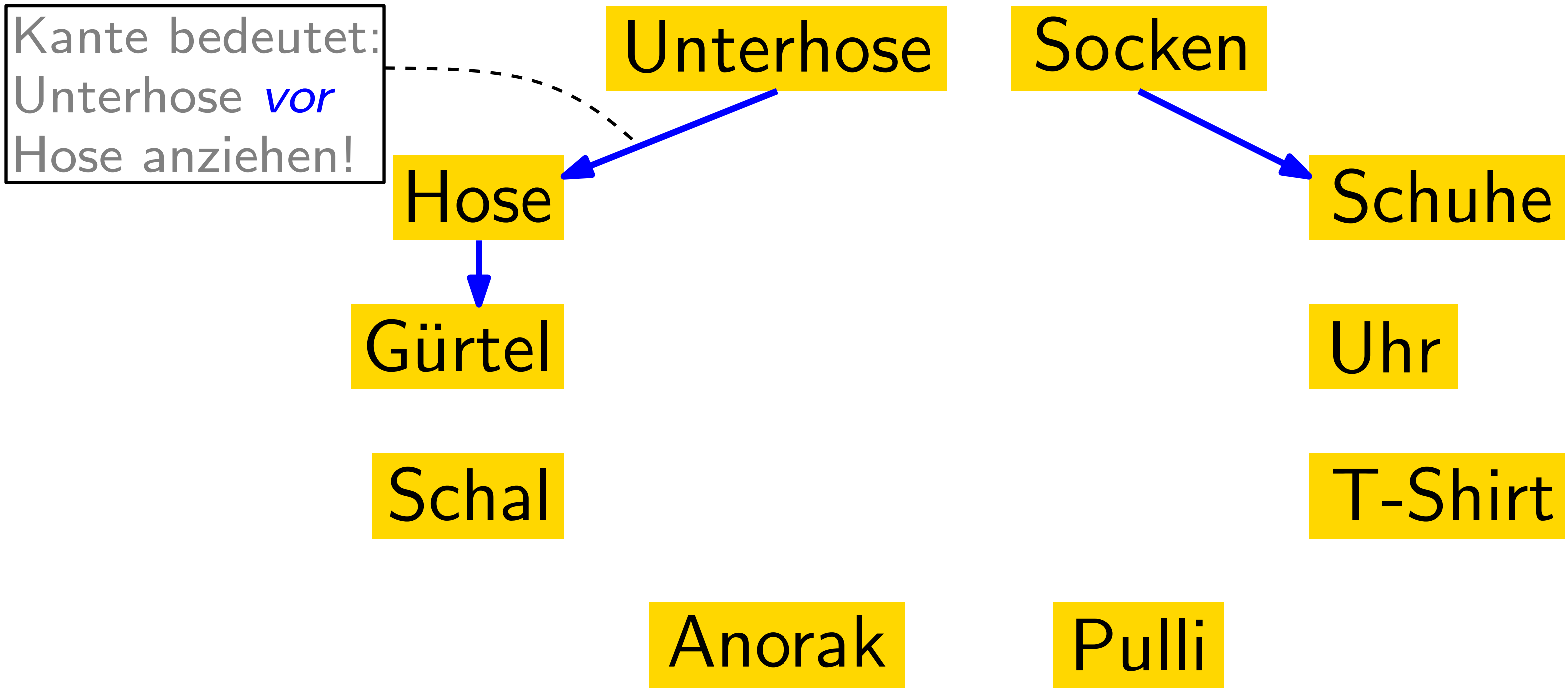
Kante bedeutet:
Unterhose *vor*
Hose anziehen!



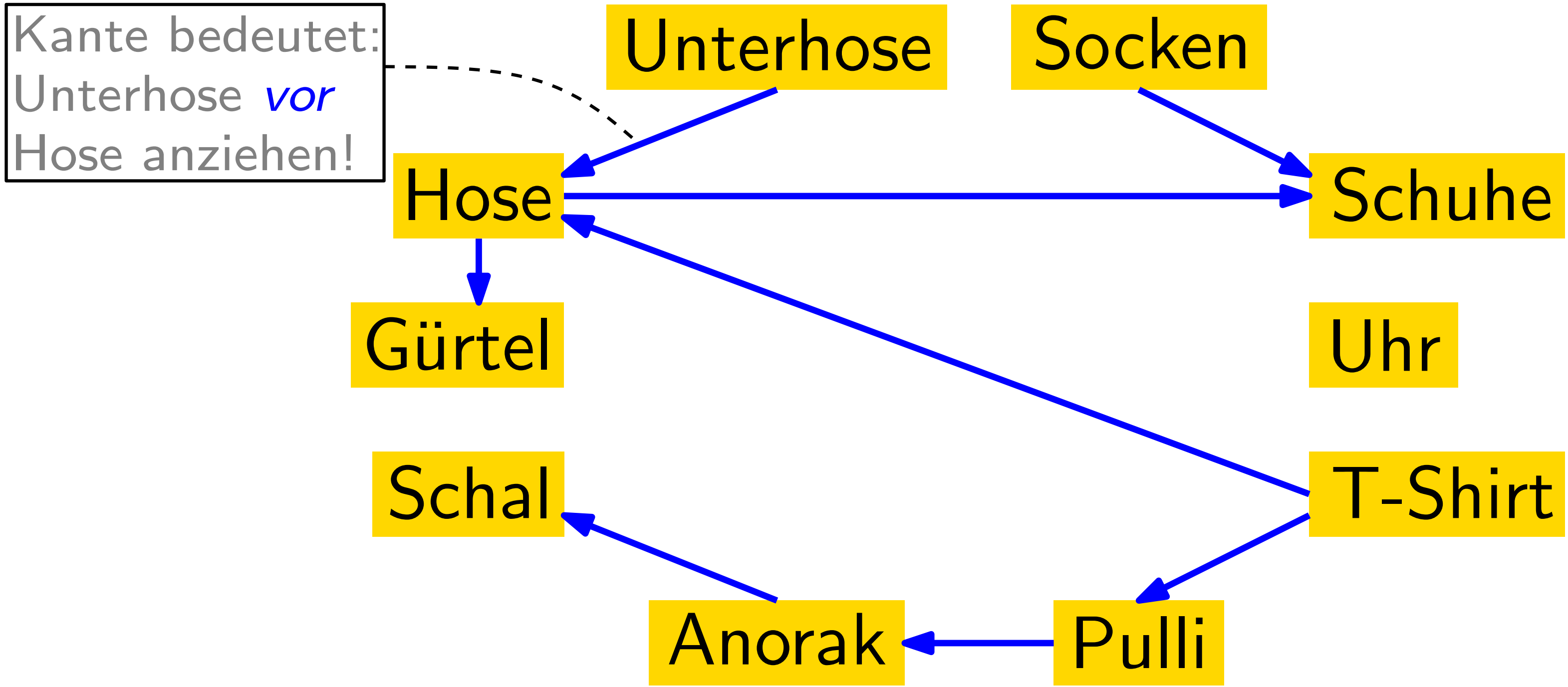
Ablaufplanung



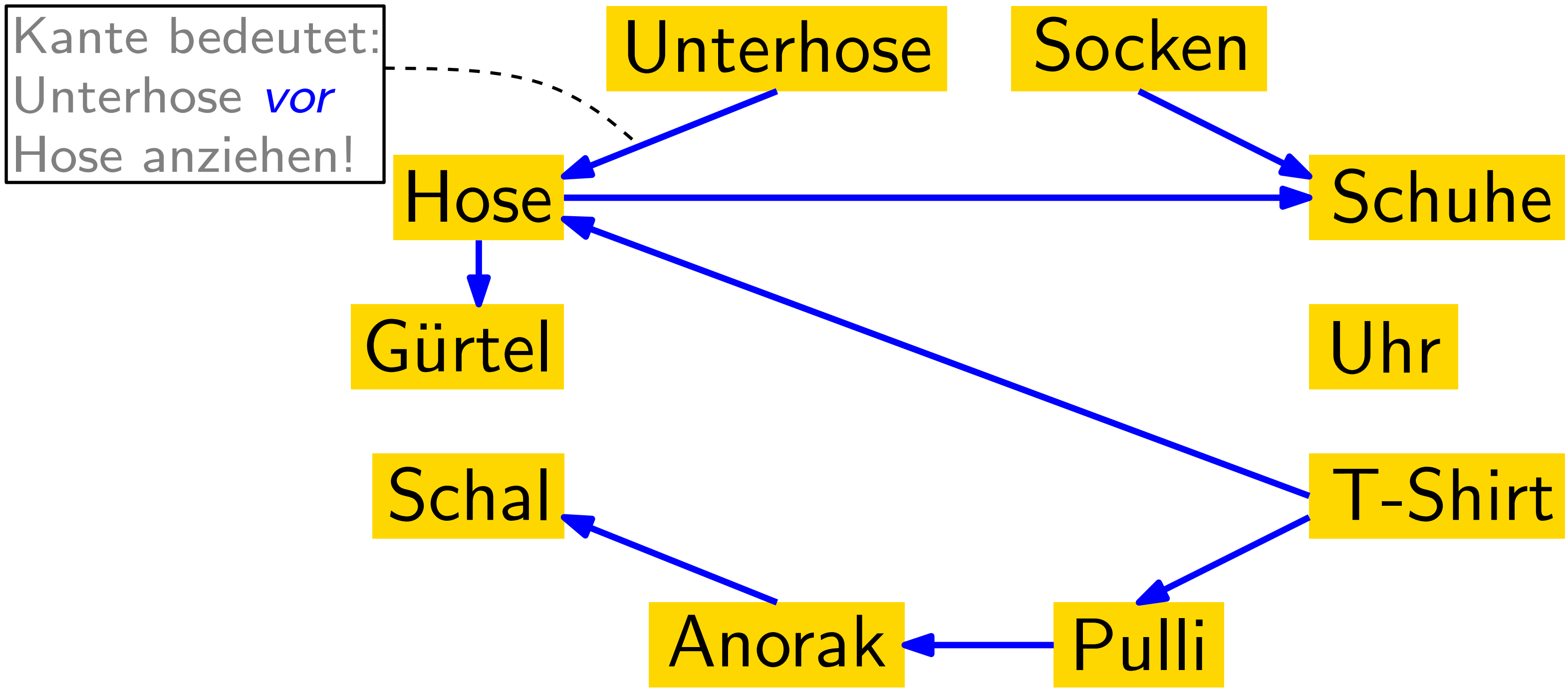
Ablaufplanung



Ablaufplanung



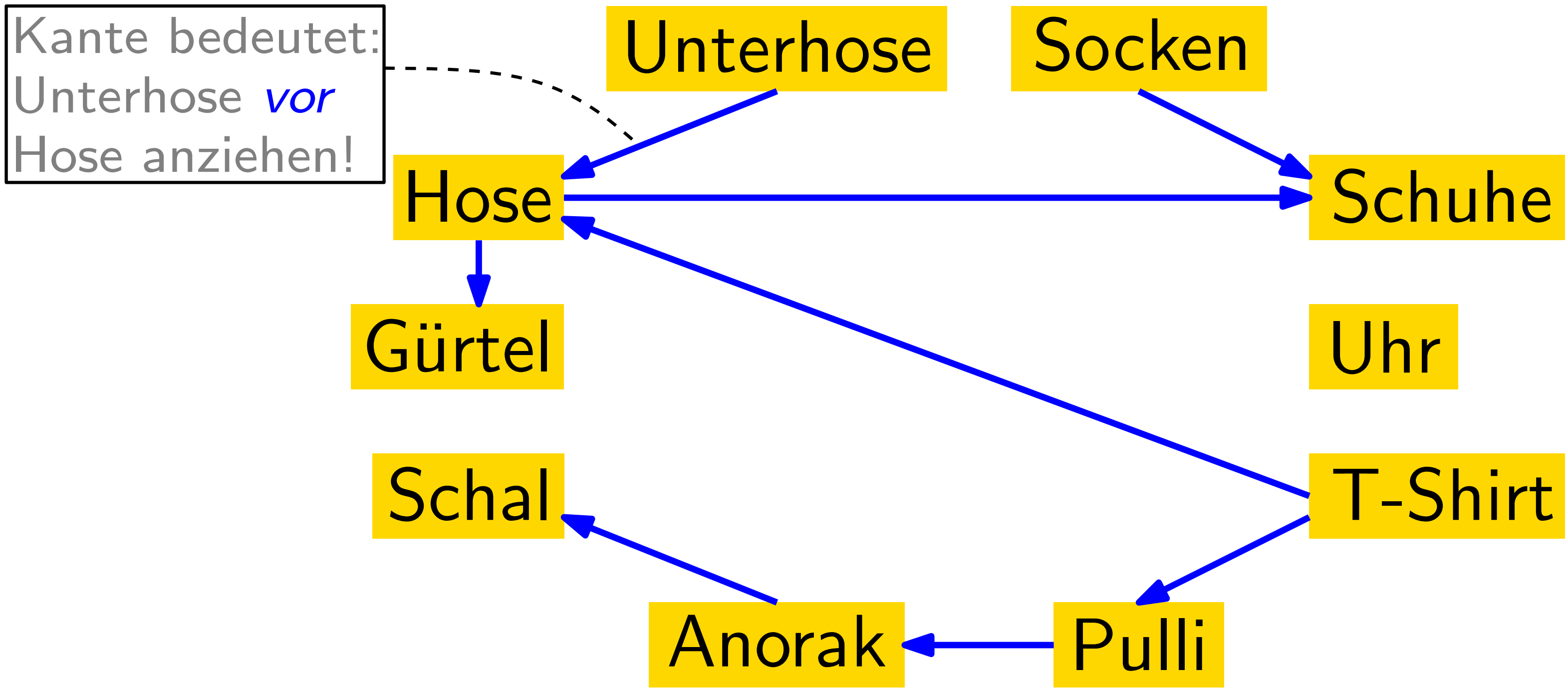
Ablaufplanung



Aufgabe: Finde Ablaufplan –

d.h. Reihenfolge der Knoten, so dass alle Einschränkungen erfüllt sind (z.B. T-Shirt vor Pulli).

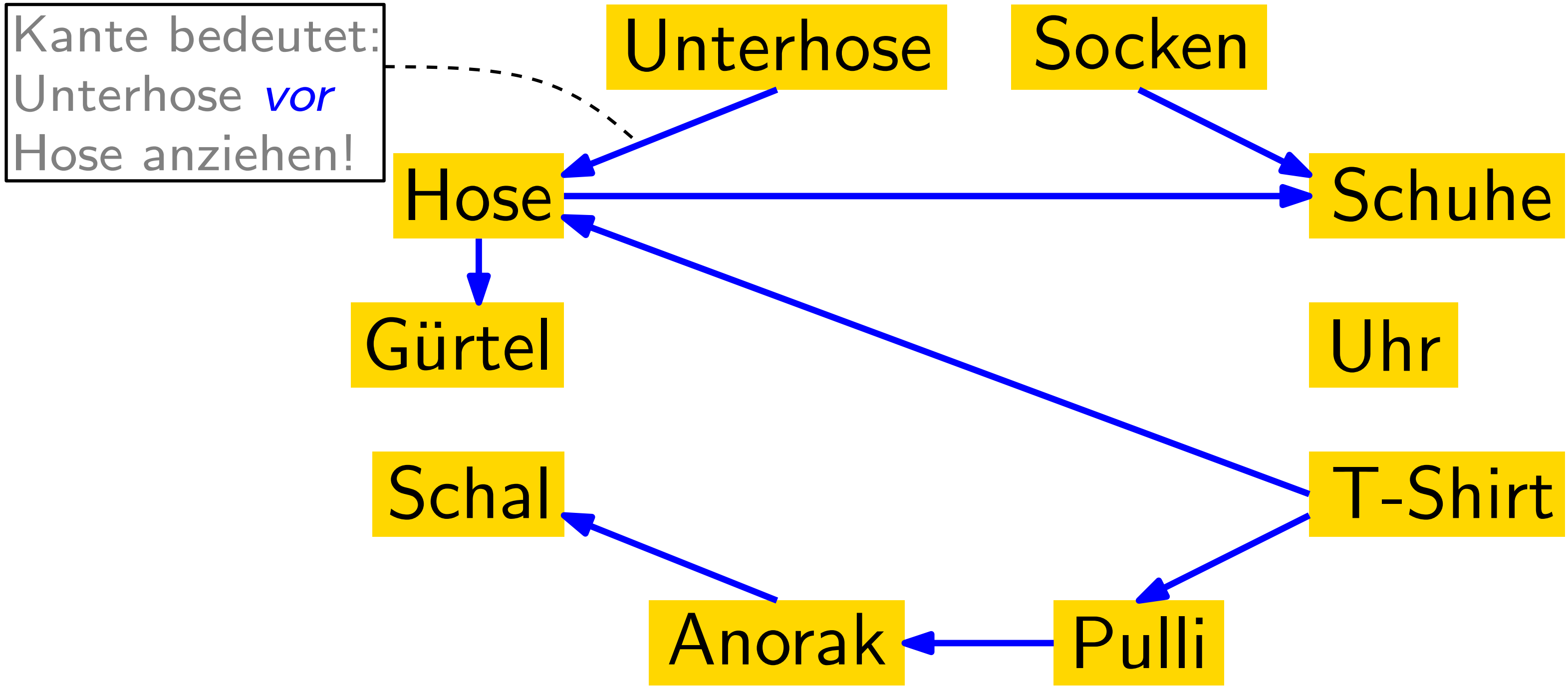
Ablaufplanung



Aufgabe: Finde Ablaufplan –
d.h. Reihenfolge der Knoten, so dass alle Einschränkungen erfüllt sind (z.B. T-Shirt vor Pulli).

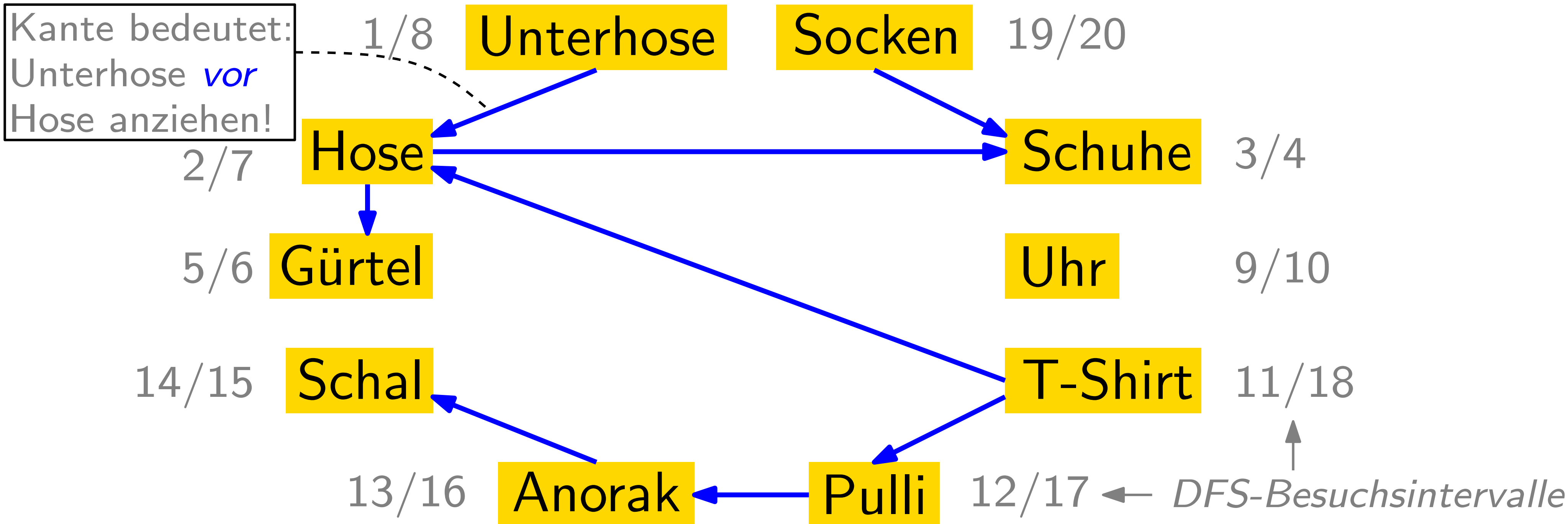
Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

Ablaufplanung



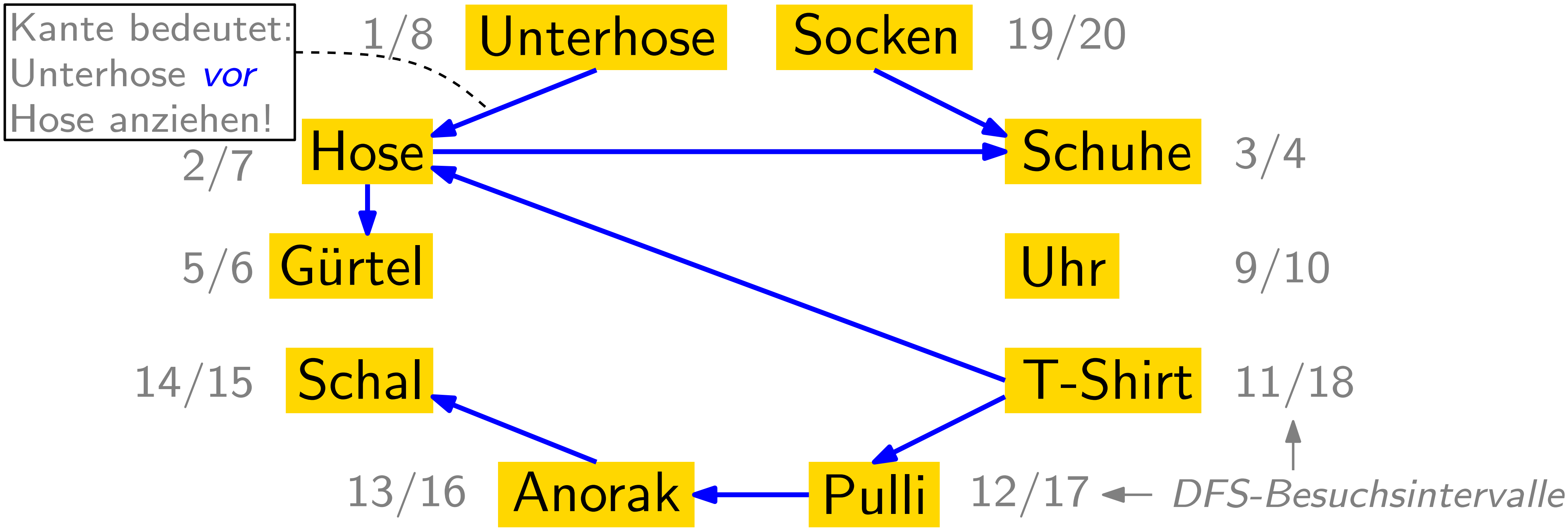
Idee: Nutze Tiefensuche!

Ablaufplanung



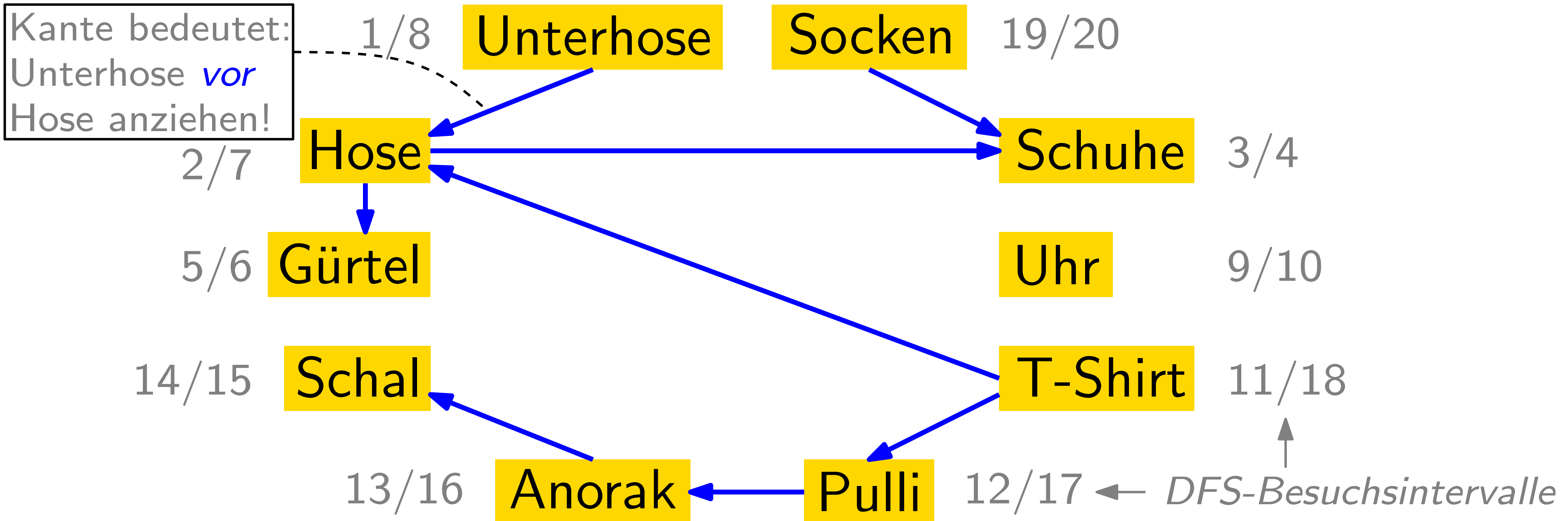
Idee: Nutze Tiefensuche!

Ablaufplanung



Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.

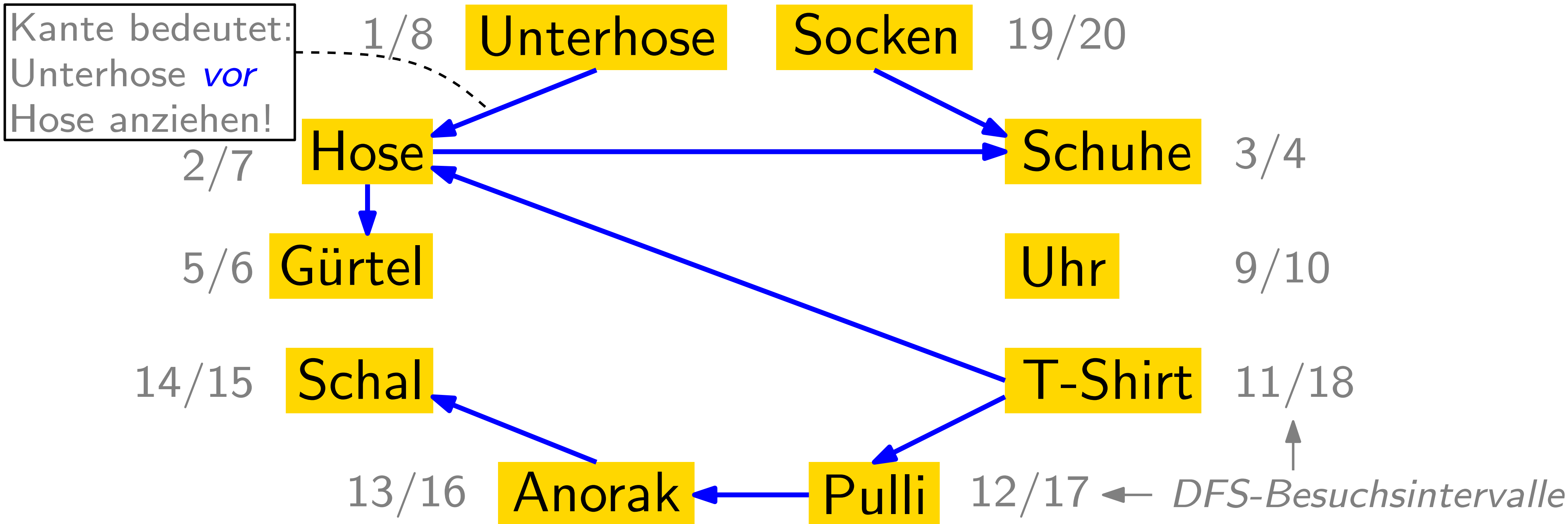
Ablaufplanung



Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.

19/20
Socken

Ablaufplanung

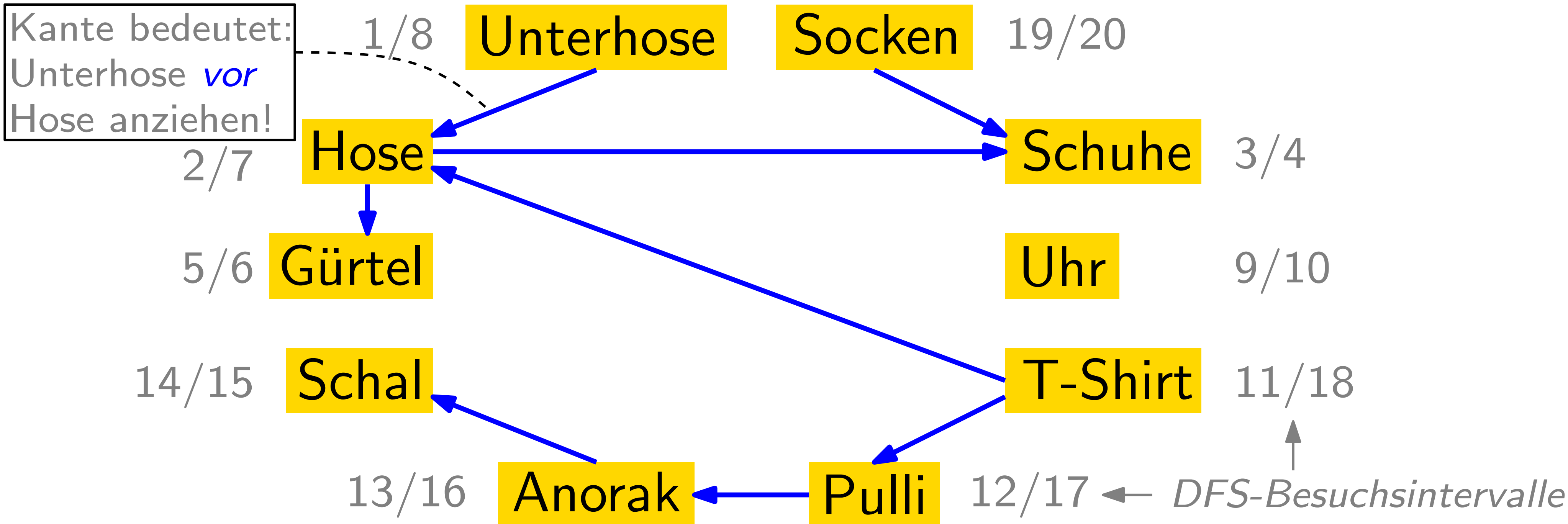


Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.

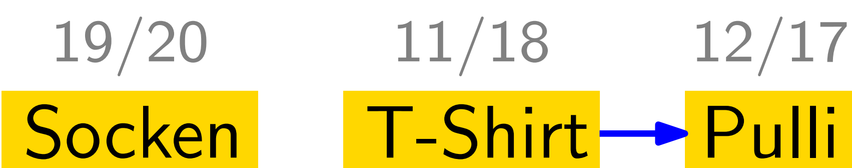
19/20 Socken

11/18 T-Shirt

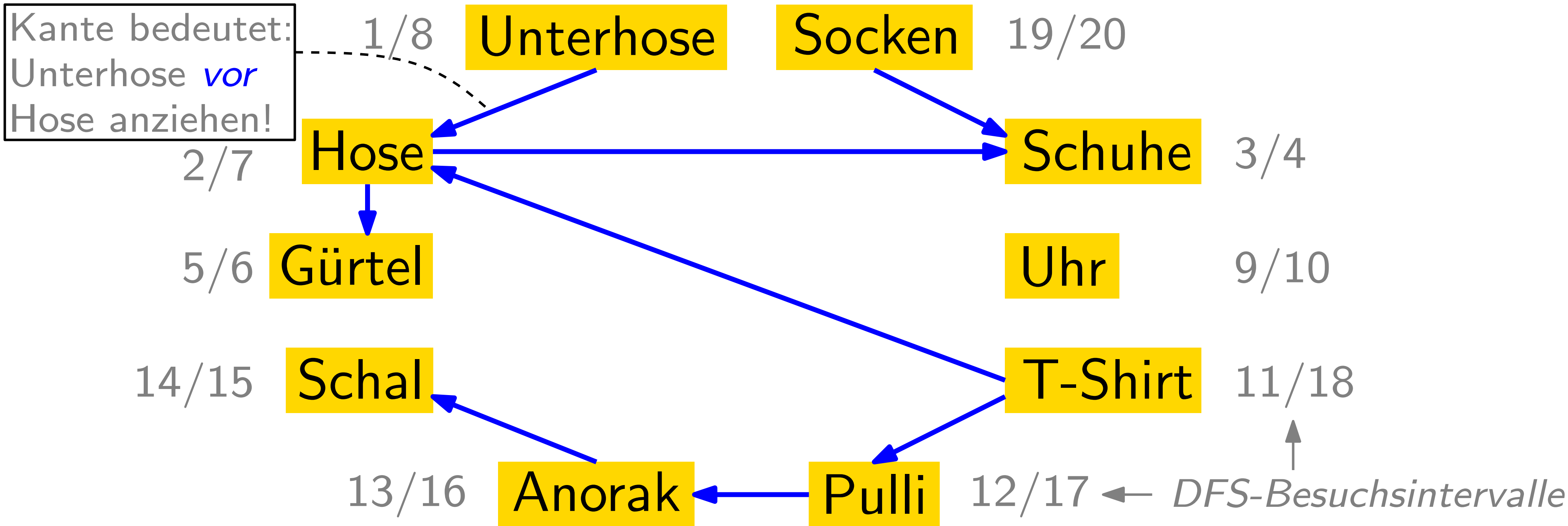
Ablaufplanung



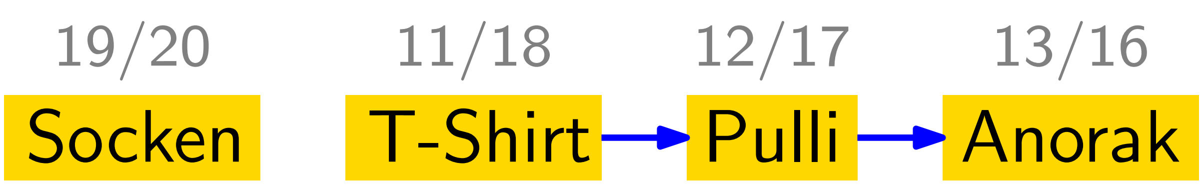
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



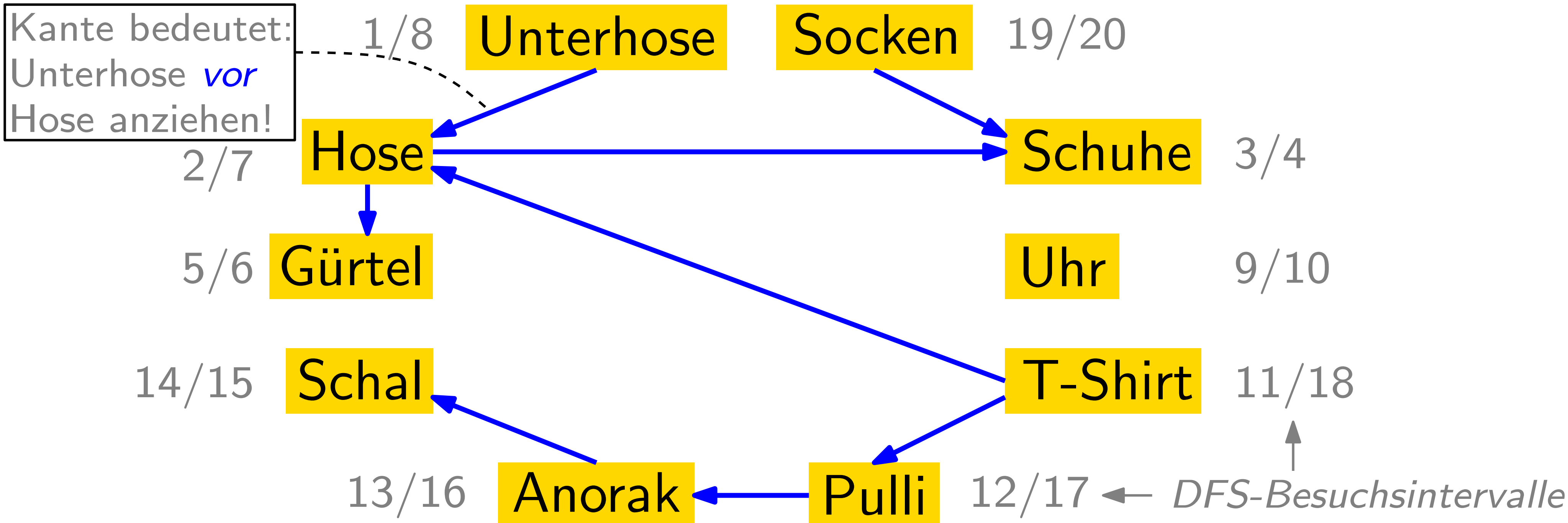
Ablaufplanung



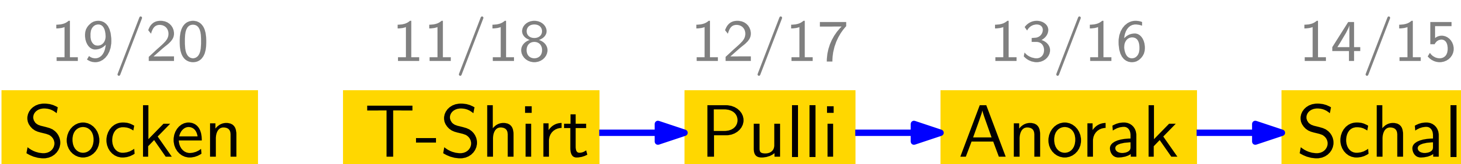
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



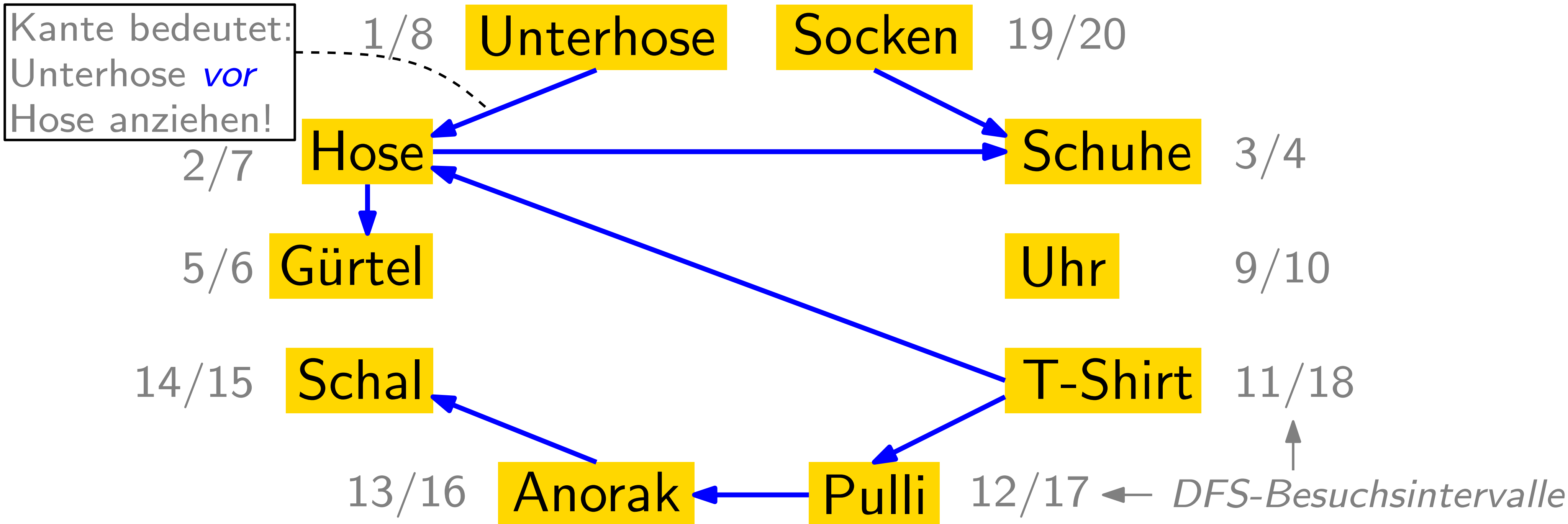
Ablaufplanung



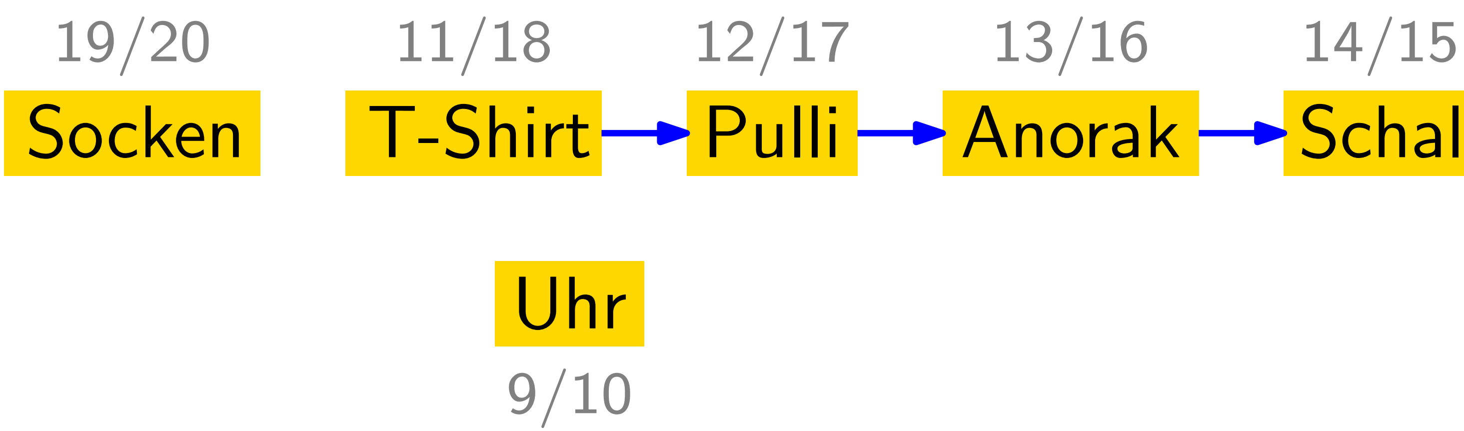
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



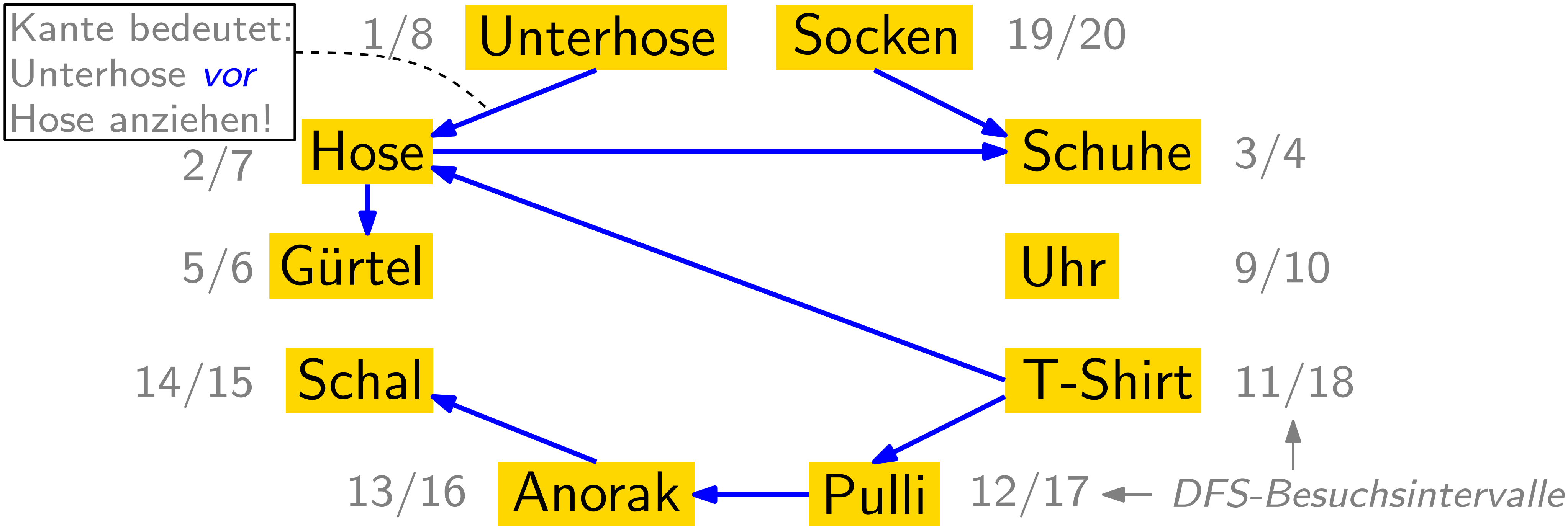
Ablaufplanung



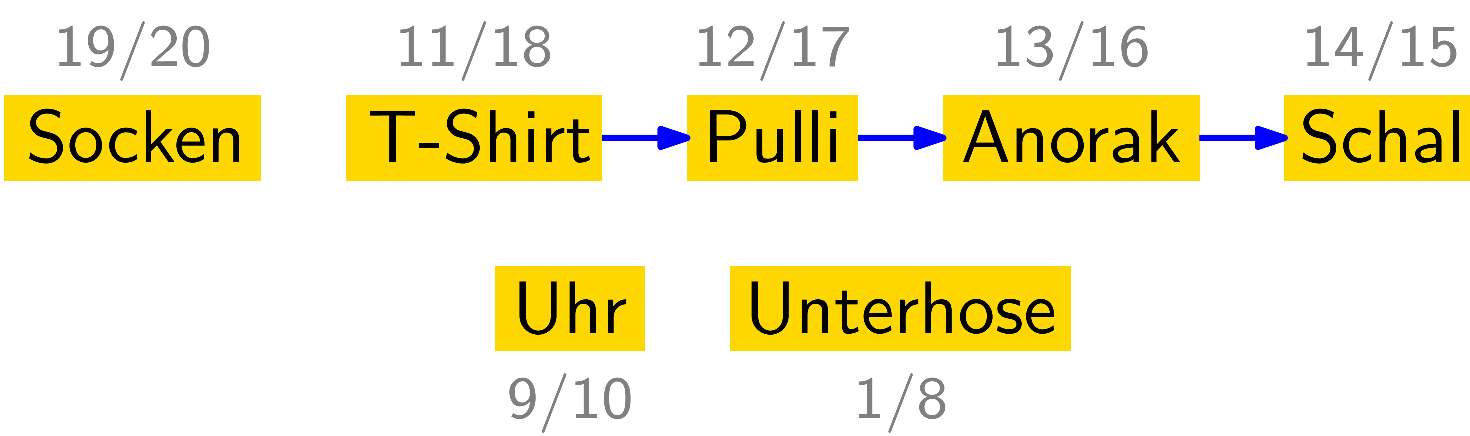
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



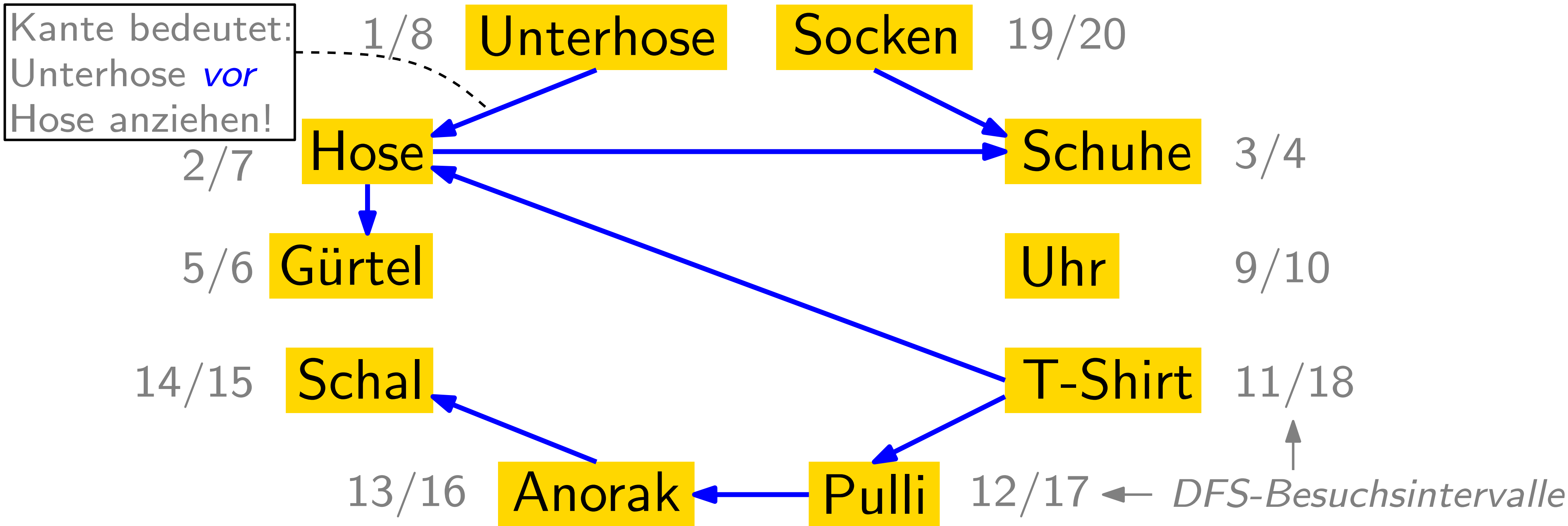
Ablaufplanung



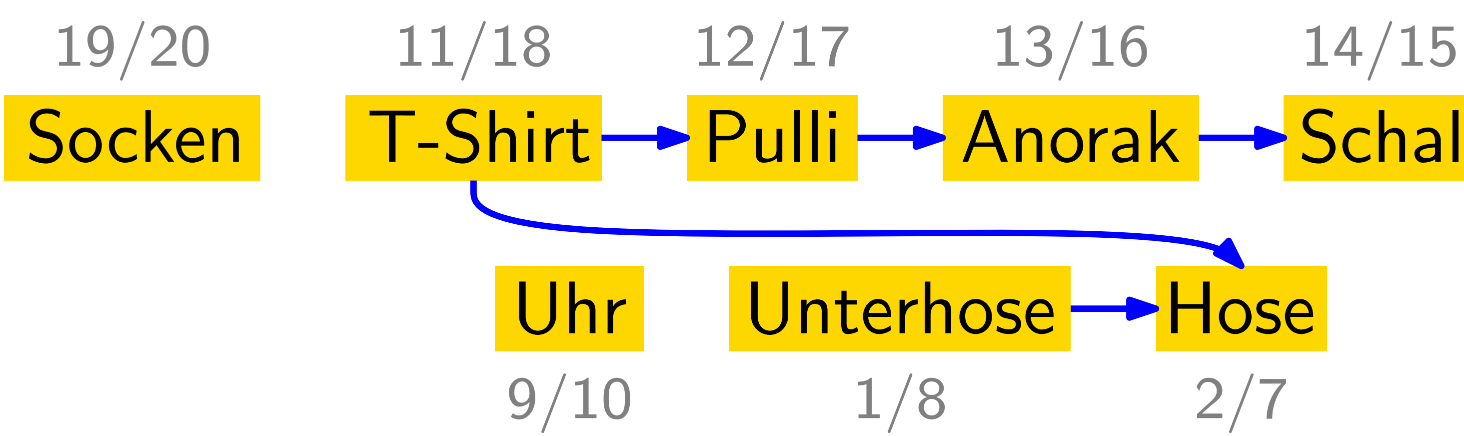
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



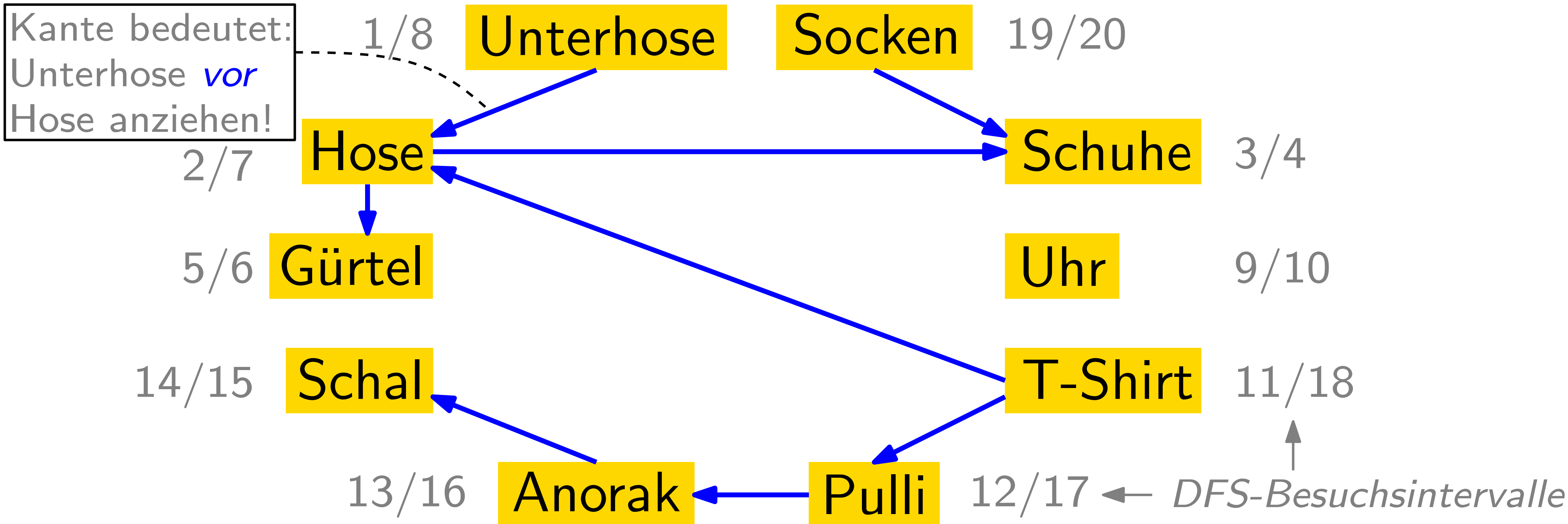
Ablaufplanung



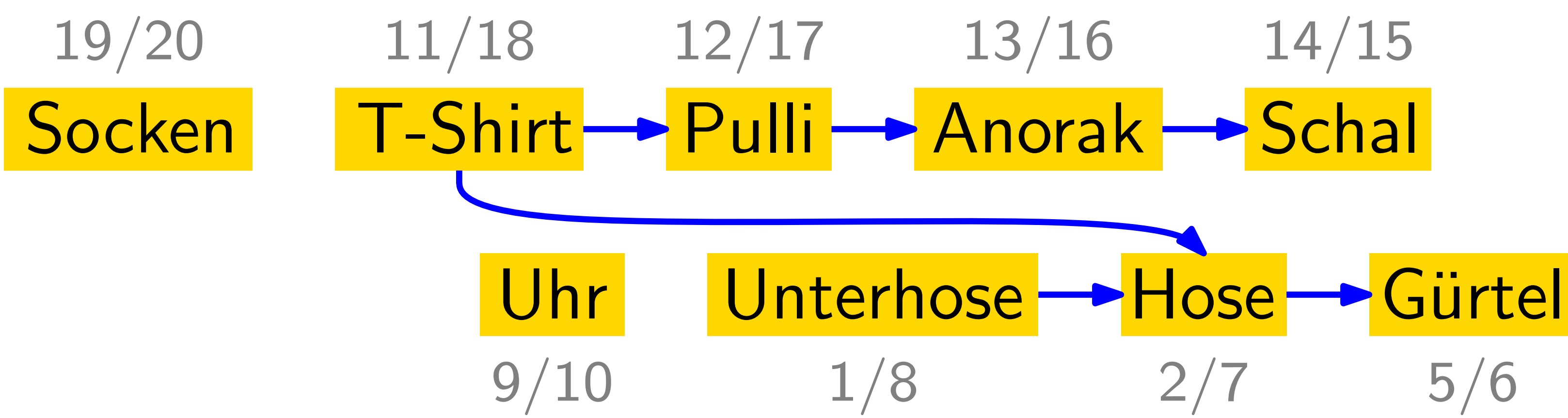
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



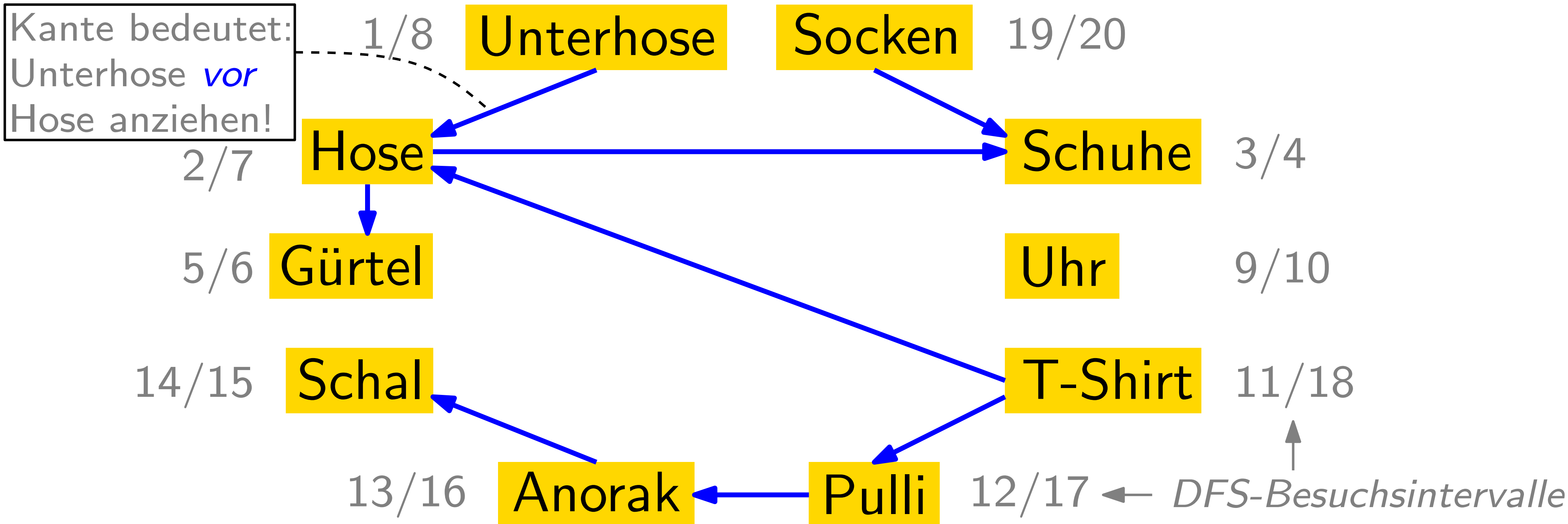
Ablaufplanung



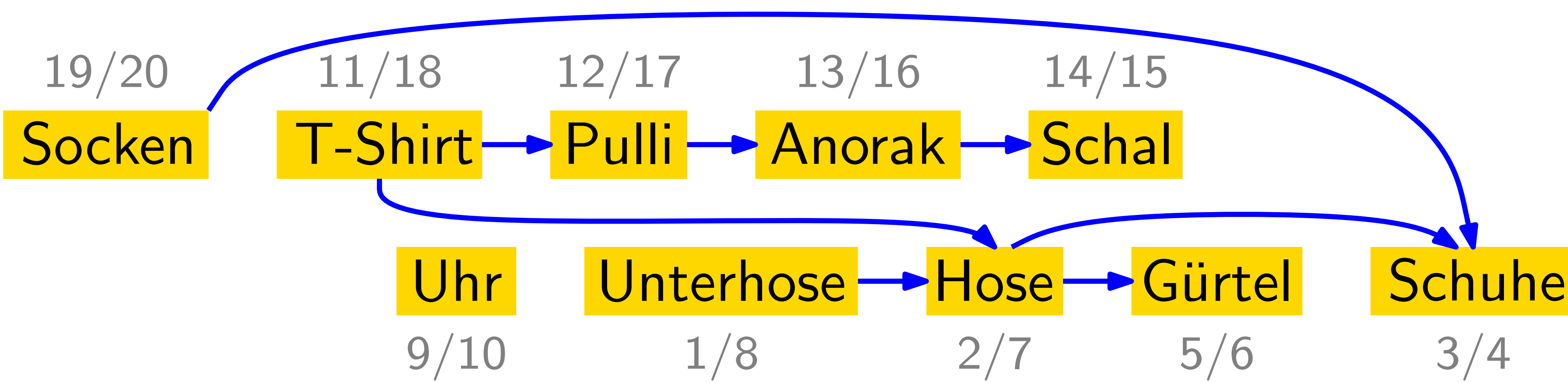
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



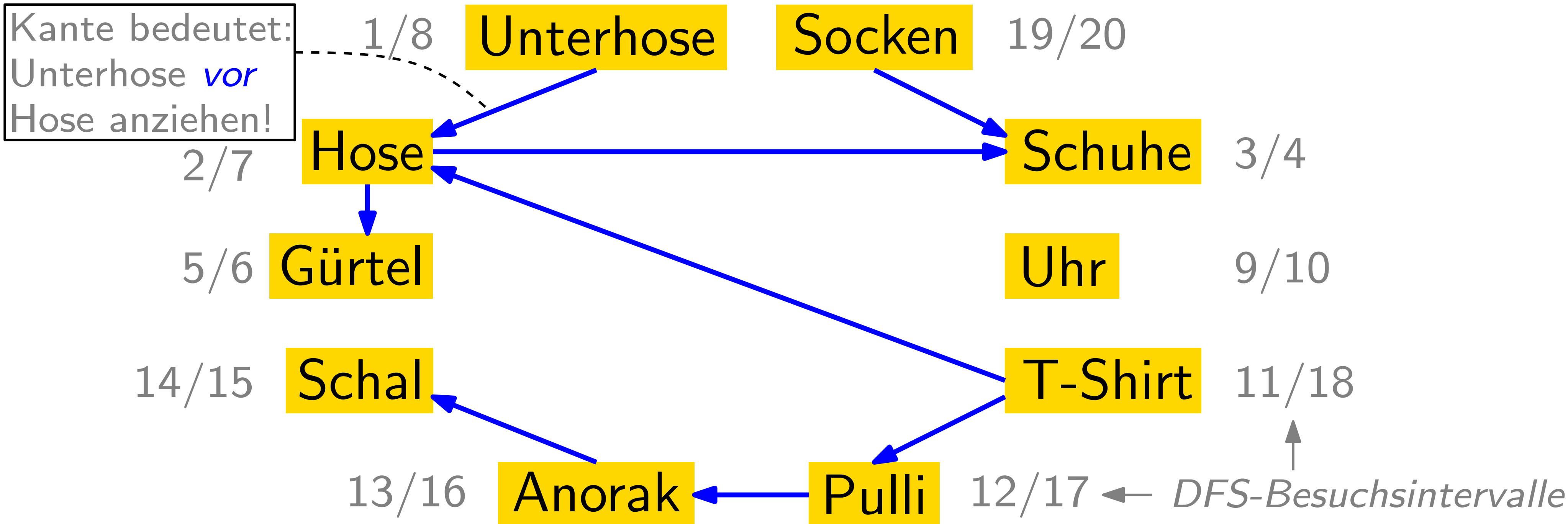
Ablaufplanung



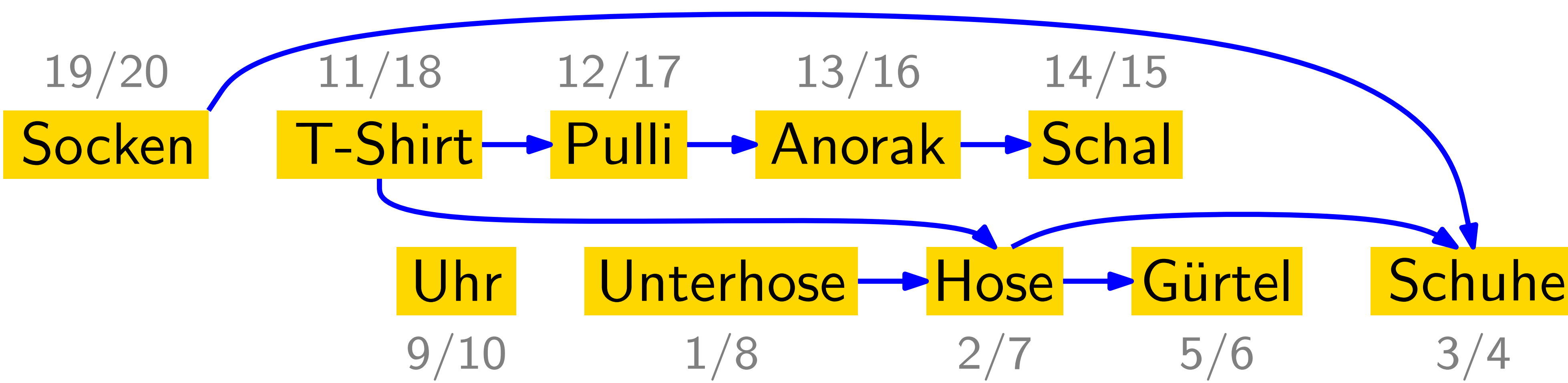
Idee: Nutze Tiefensuche!
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



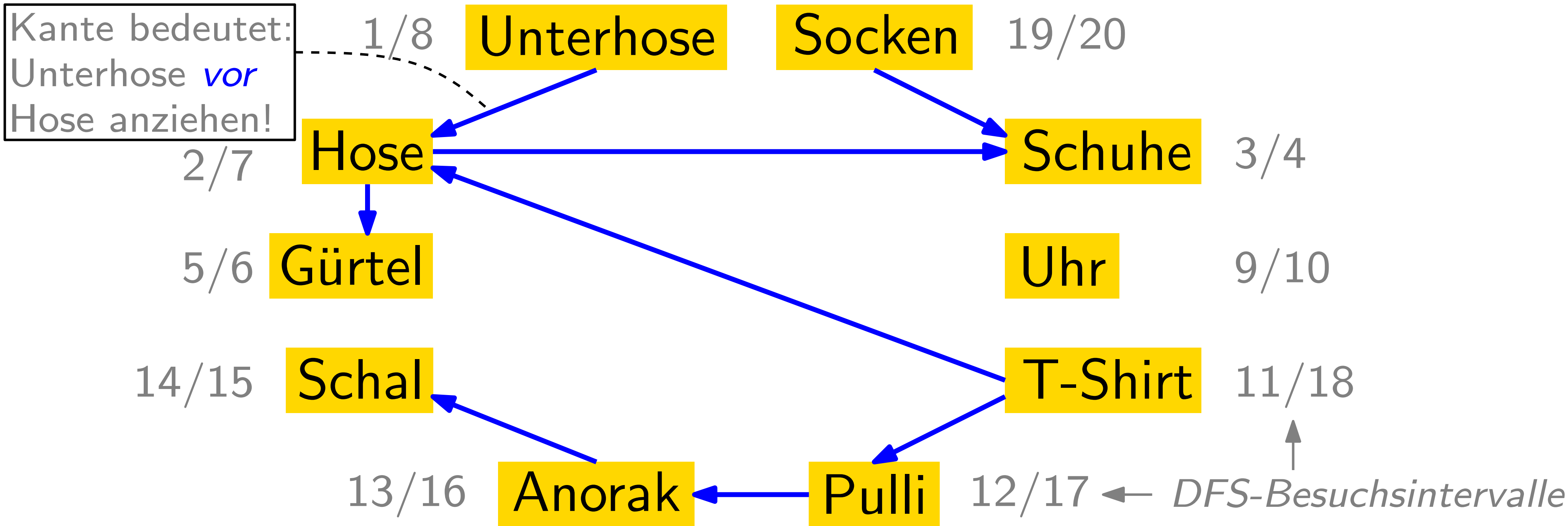
Ablaufplanung



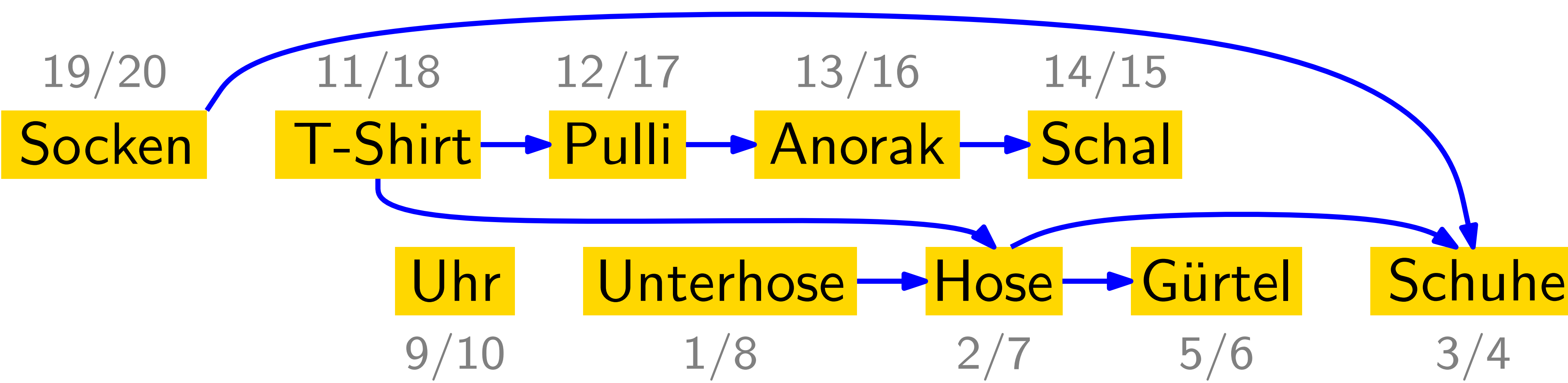
Idee: Nutze Tiefensuche! $\Rightarrow$ Alle Kanten sind...
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



Ablaufplanung



Idee: Nutze Tiefensuche! $\Rightarrow$ Alle Kanten sind nach rechts gerichtet.
Sortiere Knoten nach absteigenden f-Zeiten.



Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)

Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?

Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?

$O(V + E)$

Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?

$O(V + E)$

Korrekt?

Wann funktioniert's?

Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  L = **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?

$O(V + E)$

Korrekt?

Wann funktioniert's?

Def. Ein (gerichteter) Graph ist *kreisfrei*, wenn er keinen (gerichteten) Kreis enthält.

Topologisch sortieren

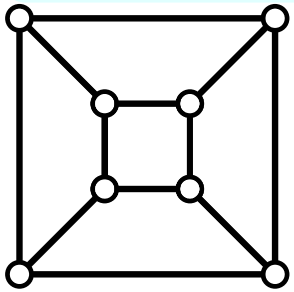
Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?
$O(V + E)$

Korrekt?
Wann funktioniert's?

Def. Ein (gerichteter) Graph ist *kreisfrei*, wenn er keinen (gerichteten) Kreis enthält.



Topologisch sortieren

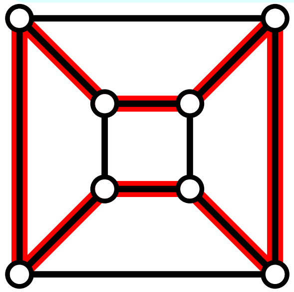
Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?
$O(V + E)$

Korrekt?
Wann funktioniert's?

Def. Ein (gerichteter) Graph ist *kreisfrei*, wenn er keinen (gerichteten) Kreis enthält.



Topologisch sortieren

Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

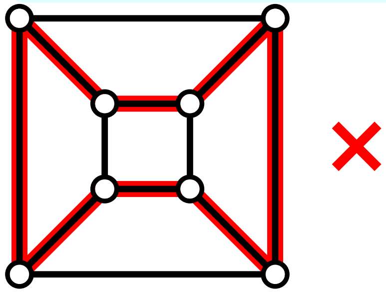
Laufzeit?

$O(V + E)$

Korrekt?

Wann funktioniert's?

Def. Ein (gerichteter) Graph ist *kreisfrei*, wenn er keinen (gerichteten) Kreis enthält.



Topologisch sortieren

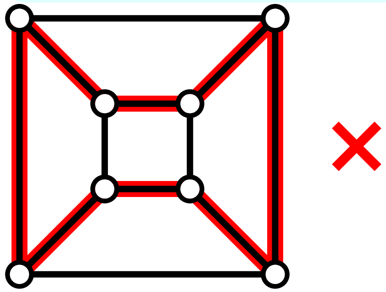
Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

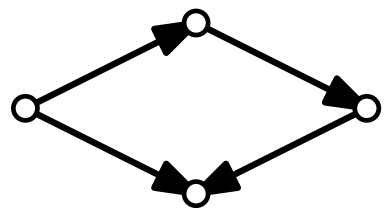
TopologicalSort(DirectedGraph G)
  L = **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?
$O(V + E)$

Korrekt?
Wann funktioniert's?

Def. Ein (gerichteter) Graph ist *kreisfrei*, wenn er keinen (gerichteten) Kreis enthält.





Topologisch sortieren

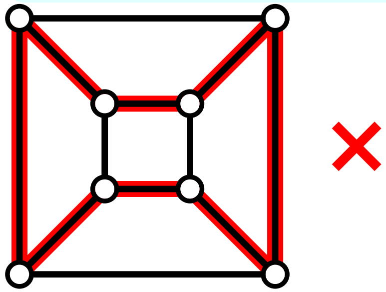
Topologische Sortierung: Lineare Ordnung der Knoten, so dass aus $(u, v) \in E$ folgt: u kommt vor v.

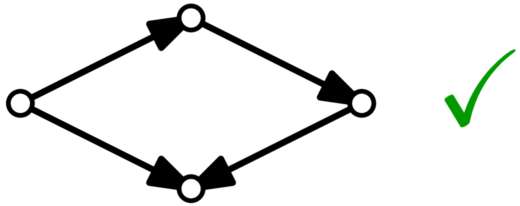
TopologicalSort(DirectedGraph G)
  $L =$ **new** List()
  DFS(G) mit folgender Änderung:
    Wenn ein Knoten schwarz gefärbt wird,
    häng ihn *vorne* an die Liste L an.
  return L

Laufzeit?
$O(V + E)$

Korrekt?
Wann funktioniert's?

Def. Ein (gerichteter) Graph ist *kreisfrei*, wenn er keinen (gerichteten) Kreis enthält.





Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$“

„$\Leftarrow$“

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei G kreisfrei.

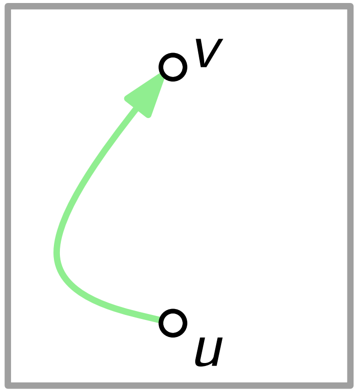
„$\Leftarrow$“

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei G kreisfrei.

Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).

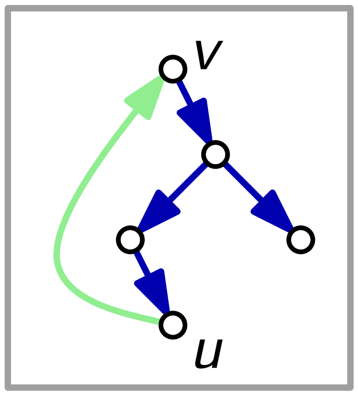


„$\Leftarrow$"

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).

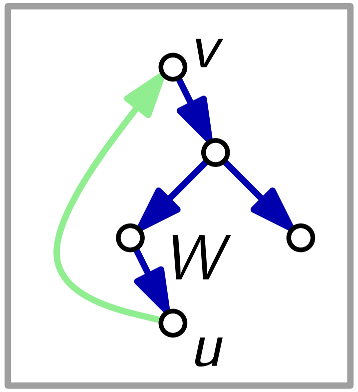
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.

„$\Leftarrow$“

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).

Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.

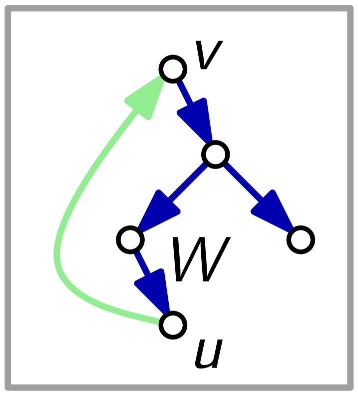
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.

„$\Leftarrow$"

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei G kreisfrei.



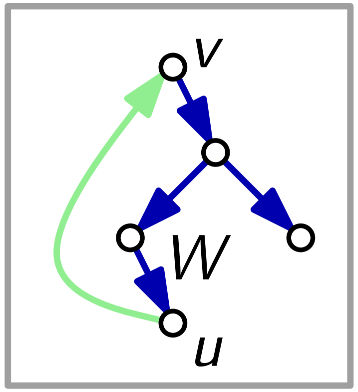
Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis.

„$\Leftarrow$"

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei G kreisfrei.



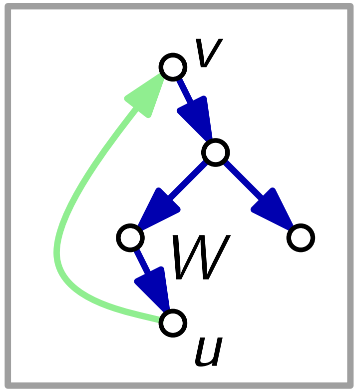
Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„$\Leftarrow$“

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei G kreisfrei.



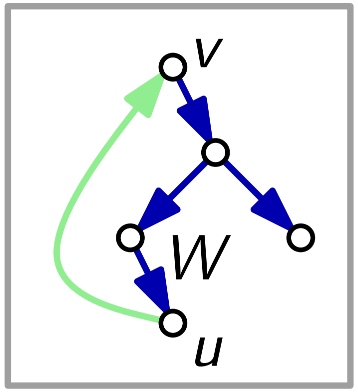
Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„$\Leftarrow$" DFS(G) liefere keine R-Kanten.

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei G kreisfrei.



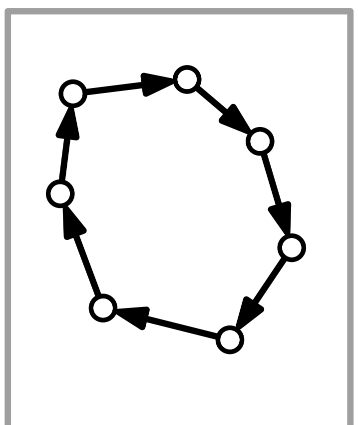
Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).

Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.

D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.

Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„$\Leftarrow$“ DFS(G) liefere keine R-Kanten.

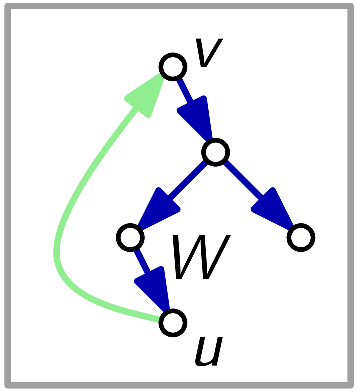


Ang. G enthält trotzdem Kreis $C = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

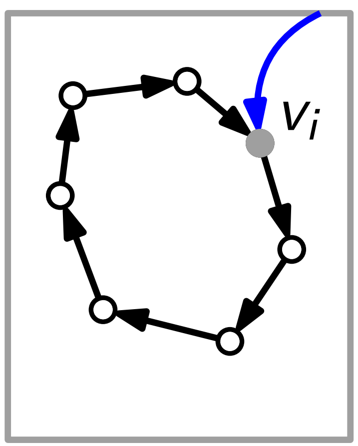
Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„$\Leftarrow$“ DFS(G) liefere keine R-Kanten.

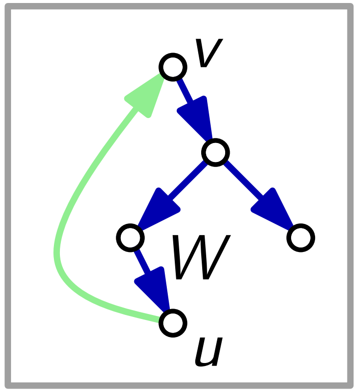


Ang. G enthält trotzdem Kreis $C = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.
Sei v_i der 1. Knoten in C, den DFS(G) erreicht.

Kreisfrei ⇔ keine R-Kanten

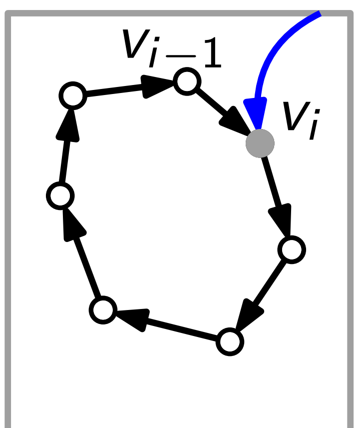
Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
⇔ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „⇒“ Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„⇐“ DFS(G) liefere keine R-Kanten.

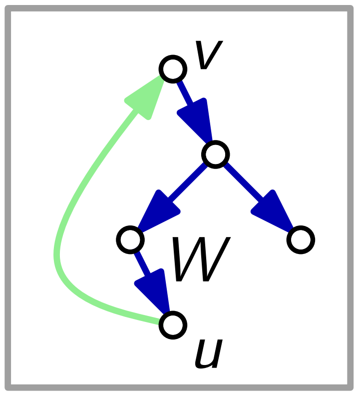


Ang. G enthält trotzdem Kreis $C = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
Sei v_i der 1. Knoten in C, den DFS(G) erreicht.
Es gibt einen Weg von v_i nach v_{i-1} in G.

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

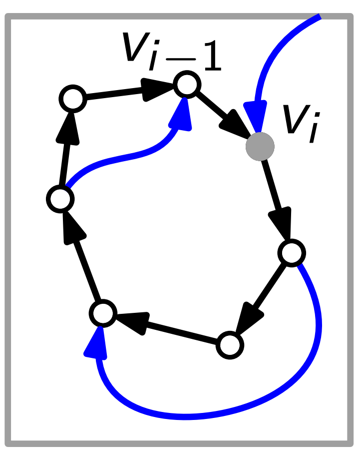
Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„$\Leftarrow$" DFS(G) liefere keine R-Kanten.

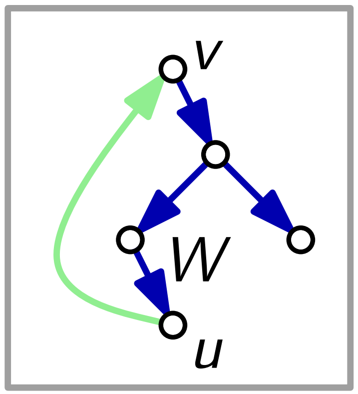


Ang. G enthält trotzdem Kreis $C = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.
Sei v_i der 1. Knoten in C, den DFS(G) erreicht.
Es gibt einen Weg von v_i nach v_{i-1} in G.
$\Rightarrow$ DFS gelangt zu v_{i-1}, solange v_i grau ist.

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

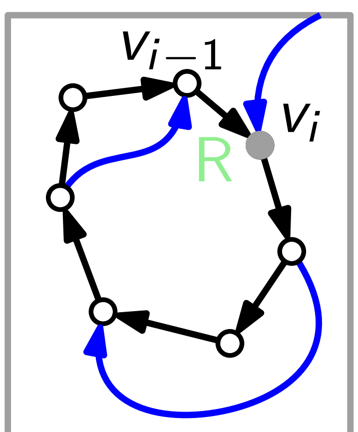
Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„$\Leftarrow$“ DFS(G) liefere keine R-Kanten.

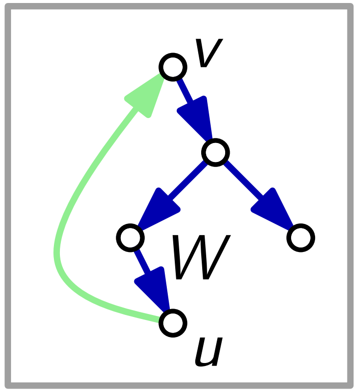


Ang. G enthält trotzdem Kreis $C = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.
Sei v_i der 1. Knoten in C, den DFS(G) erreicht.
Es gibt einen Weg von v_i nach v_{i-1} in G.
$\Rightarrow$ DFS gelangt zu v_{i-1}, solange v_i grau ist.
$\Rightarrow$ (v_{i-1}, v_i) ist R-Kante.

Kreisfrei $\Leftrightarrow$ keine R-Kanten

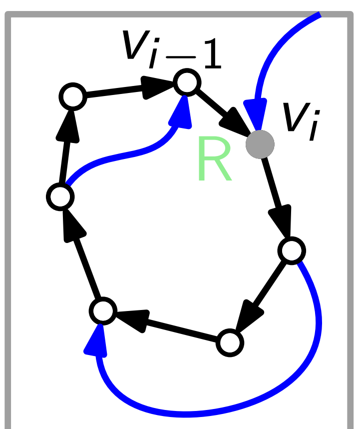
Lem. Ein gerichteter Graph G ist kreisfrei
$\Leftrightarrow$ DFS(G) liefert keine Rückwärtskanten.

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei G kreisfrei.



Angenommen DFS(G) liefert R-Kante (u, v).
Dann ist u Nachfolger von v im DFS-Wald.
D.h. G enthält einen gerichteten v-u-Weg W.
Aber dann ist $W \oplus (u, v)$ ein gerichteter Kreis. ↯

„$\Leftarrow$" DFS(G) liefere keine R-Kanten.



Ang. G enthält trotzdem Kreis $C = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.
Sei v_i der 1. Knoten in C, den DFS(G) erreicht.
Es gibt einen Weg von v_i nach v_{i-1} in G.
$\Rightarrow$ DFS gelangt zu v_{i-1}, solange v_i grau ist.
$\Rightarrow$ (v_{i-1}, v_i) ist R-Kante. ↯ $\square$

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

Dann gilt $v_n.f \quad \cdots \qquad\qquad v_1.f$.

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G.

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen:

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

Korrektheit von TopologicalSort

Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?

Korrektheit von TopologicalSort

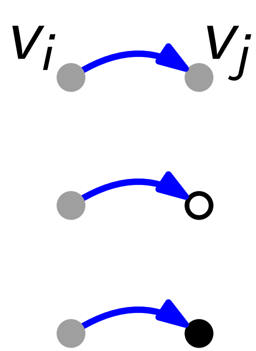
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



- v_j grau
- v_j weiß
- v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

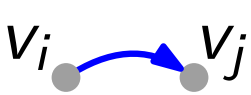
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

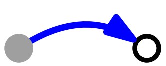
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

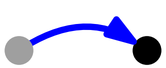
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$



– v_j weiß



– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

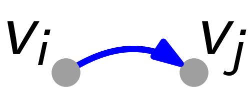
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

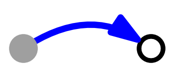
Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

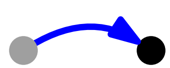
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante



– v_j weiß



– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

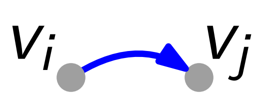
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

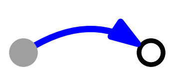
Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

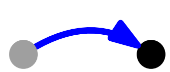
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante $\lightning$



– v_j weiß



– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

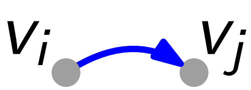
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

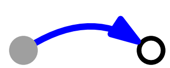
Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

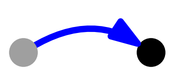
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß



– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

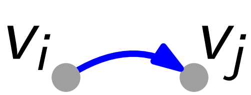
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

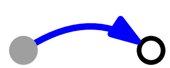
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

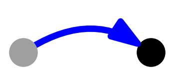
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$



– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

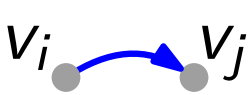
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

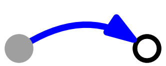
Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

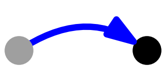
Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!


– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i


– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

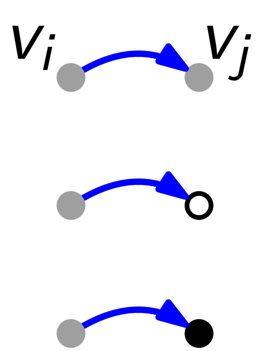
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!

– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow$

– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

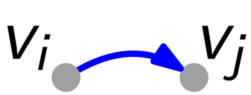
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

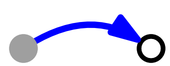
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

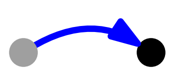
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow v_i.f > v_j.f$



– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

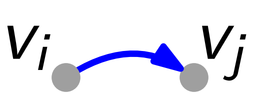
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

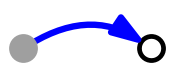
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

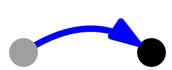
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow v_i.f > v_j.f$ ✓



– v_j schwarz

Korrektheit von TopologicalSort

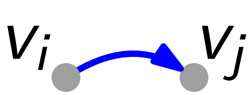
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

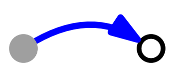
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

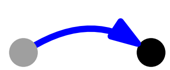
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow v_i.f > v_j.f$ ✓



– v_j schwarz $\Rightarrow$

Korrektheit von TopologicalSort

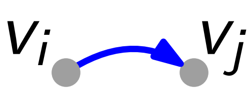
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

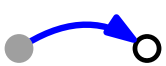
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

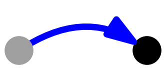
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow$ $v_i.f > v_j.f$ ✓



– v_j schwarz $\Rightarrow$ $v_i.f$ noch nicht gesetzt, $v_j.f$ gesetzt

Korrektheit von TopologicalSort

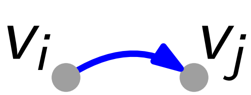
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle = \text{TopologicalSort}(G)$.

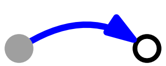
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

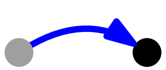
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow$ $v_i.f > v_j.f$ ✓



– v_j schwarz $\Rightarrow$ $v_i.f$ noch nicht gesetzt, $v_j.f$ gesetzt

$\Rightarrow$

Korrektheit von TopologicalSort

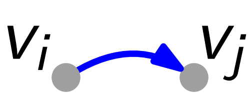
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

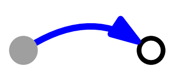
Dann gilt $v_n.f > \cdots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

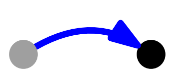
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow$ $v_i.f > v_j.f$ ✓



– v_j schwarz $\Rightarrow$ $v_i.f$ noch nicht gesetzt, $v_j.f$ gesetzt

$\Rightarrow$ $v_i.f > v_j.f$

Korrektheit von TopologicalSort

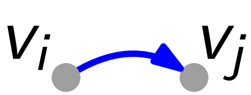
Satz. Sei G ein gerichteter kreisfreier Graph. Dann liefert TopologicalSort(G) eine topologische Sortierung von G.

Beweis. Sei $L = \langle v_n, v_{n-1}, \dots, v_1 \rangle =$ TopologicalSort(G).

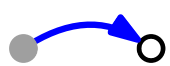
Dann gilt $v_n.f > \dots > v_2.f > v_1.f$.

Sei (v_i, v_j) Kante von G. Zu zeigen: $\boxed{v_i.f > v_j.f}$

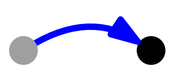
Welche Farbe hat v_j, wenn DFS (v_i, v_j) überschreitet?



– v_j grau $\Rightarrow$ (v_i, v_j) ist R-Kante ↯ Widerspruch zu Lemma: G kreisfrei!



– v_j weiß $\Rightarrow$ v_j Nachfolger von v_i $\Rightarrow v_i.f > v_j.f$ ✓



– v_j schwarz $\Rightarrow$ $v_i.f$ noch nicht gesetzt, $v_j.f$ gesetzt

$\Rightarrow$ $v_i.f > v_j.f$ ✓

$\square$

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit		
Ergebnis		
Datenstruktur		
Vorgehen		

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V + E)$	
Ergebnis		
Datenstruktur		
Vorgehen		

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V+E)$	$O(V+E)$
Ergebnis		
Datenstruktur		
Vorgehen		

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V+E)$	$O(V+E)$
Ergebnis	BFS-Baum, d.h. kürzeste Wege	
Datenstruktur		
Vorgehen		

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V + E)$	$O(V + E)$
Ergebnis	BFS-Baum, d.h. kürzeste Wege	d- und f-Werte, z.B. für top. Sortierung
Datenstruktur		
Vorgehen		

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V+E)$	$O(V+E)$
Ergebnis	BFS-Baum, d.h. kürzeste Wege	d- und f-Werte, z.B. für top. Sortierung
Datenstruktur	Schlange	
Vorgehen		

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V+E)$	$O(V+E)$
Ergebnis	BFS-Baum, d.h. kürzeste Wege	d- und f-Werte, z.B. für top. Sortierung
Datenstruktur	Schlange	Rekursion bzw. Stapel
Vorgehen		

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V+E)$	$O(V+E)$
Ergebnis	BFS-Baum, d.h. kürzeste Wege	d- und f-Werte, z.B. für top. Sortierung
Datenstruktur	Schlange	Rekursion bzw. Stapel
Vorgehen	nicht-lokal	

Vergleich Durchlaufstrategien für Graphen

	Breitensuche	Tiefensuche
Laufzeit	$O(V+E)$	$O(V+E)$
Ergebnis	BFS-Baum, d.h. kürzeste Wege	d- und f-Werte, z.B. für top. Sortierung
Datenstruktur	Schlange	Rekursion bzw. Stapel
Vorgehen	nicht-lokal	lokal