

9. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2020/21)

Aufgabe 1 – Zweifärbbarkeit

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *zweifärbbar*, wenn eine Abbildung $c: V \rightarrow \{\text{rot}, \text{blau}\}$ existiert, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ gilt, dass $c(u) \neq c(v)$. Zwei zueinander benachbarte Knoten erhalten also stets unterschiedliche Farben.

- a) Welches ist der kleinste Graph, der nicht zweifärbbar ist? **1 Punkt**
- b) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und eine gegebene Färbung c testet, ob es zwei benachbarte Knoten mit derselben Farbe gibt. Was ist die asymptotische Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus? **2 Punkte**
- c) Entwerfen Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ermittelt, ob er zweifärbbar ist. Die Laufzeit des Algorithmus soll $O(|V| + |E|)$ sein. Achtung: G ist nicht notwendigerweise zusammenhängend. **3 Punkte**

Aufgabe 2 – Tiefensuche

Geben Sie für jedes der geforderten Beispiele den Graphen und das Ergebnis einer Tiefensuche in Form der resultierenden Bäume sowie der Entdeckungs- und Abschlusszeiten an. In dieser Aufgabe sind keine Selbst- oder Mehrfachkanten erlaubt.

- a) Geben Sie ein Beispiel an, das folgende Behauptung widerlegt:
Sei G ein gerichteter Graph, der einen Pfad von u nach v enthält, und sei $u.d < v.d$ das Resultat einer Tiefensuche in G . Dann folgt, dass v im Tiefensuchbaum ein Nachkomme von u ist (d.h. es gibt in diesem Baum einen u - v -Pfad). **2 Punkte**
- b) Geben Sie ein Beispiel an, das folgende Behauptung widerlegt:
Sei G ein gerichteter Graph, der einen Pfad von u nach v enthält. Für die Entdeckungs- und Abschlusszeiten jeder Tiefensuche in G gilt dann $v.d < u.f$. **1 Punkt**
- c) Geben Sie ein Beispiel für eine Tiefensuche in einem gerichteten Graphen G an, in der ein Baum mit einem einzelnen Knoten u gebildet wird, obwohl u sowohl eingehende als auch ausgehende Kanten hat. **2 Punkte**

Aufgabe 3 – Leichte Kanten und Schnitte

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichtsfunktion $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Sei weiter $T = (V, E_T)$ ein minimaler Spannbaum von G bezüglich w . Zeigen Sie: für jede Kante $\{u, v\} \in E_T$ gibt es einen Schnitt, für den $\{u, v\}$ *leicht* ist.

4 Punkte

Aufgabe 4 – Faire Geschenke

Sie sind Mutter/Vater von Zwillingen, deren Geburtstag naht. Sie haben eine Menge an n Geschenken gekauft und möchten diese nun fair verteilen. Dabei hat jedes Geschenk i einen bestimmten ganzzahligen positiven Wert w_i . Alle Geschenke zusammen addieren sich zum Wert W . Wir nehmen an, dass dieser gerade ist. Die Aufteilung der Geschenke ist genau dann fair, wenn jeder Zwilling insgesamt den gleichen Wert an Geschenken erhält.

Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $O(n \cdot W)$ feststellt, ob eine faire Aufteilung aller Geschenke möglich ist.

5 Punkte

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Montag, 08. Februar 2021, 16:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.