Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen und Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 25. Januar 2021

Prof. Dr. Alexander Wolff
Felix Klesen, M. Sc.

8. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2020/21)

Aufgabe 1 – Wandern im Gebirge

Sie planen eine gefährliche Wanderung in einem gebirgigen Terrain, bei der Sie immer wieder über tiefe Schluchten springen müssen. Ihnen steht eine Wanderkarte zur Verfügung, auf der Berggipfel und Wegabschnitte eingezeichnet sind. Ein Wegabschnitt verbindet immer zwei Berggipfel und enthält genau eine Schlucht, die man auf dem Wegabschnitt überwinden muss. Zu jedem Wegabschnitt ist zusätzlich die Breite der zu überwindenden Schlucht in Zentimetern angegeben. Einige Wegabschnitte kann man nur in eine Richtung gehen, weil man z.B. herunter springen muss.

Sie starten Ihre Wanderung auf einem Berggipfel s und möchten herausfinden, wie weit man in der Lage sein muss zu springen, um jeden Berggipfel von s aus zu erreichen. (Ein Berggipfel t ist für Sie von s aus erreichbar, wenn es einen Weg von s nach t gibt, bei der Sie jede Schlucht überspringen können.)

a) Noch aus dem Sportunterricht in der Schule wissen Sie, dass Sie lediglich ℓ Zentimeter weit springen können, Sie also über Schluchten der Breite größer als ℓ nicht springen können.

   Sie möchten herausfinden, welche Berggipfel Sie von s aus erreichen können. Modellieren Sie zunächst das Problem als ein Problem auf einem Graphen. Geben Sie anschließend einen Algorithmus in Worten an, der dieses Problem löst und eine Worst-Case-Laufzeit hat, die linear in der Anzahl der Berggipfel und Wegabschnitte ist. **6 Punkte**

b) Sie möchten vor Ihrer Wanderung trainieren und Ihre Sprungweite verbessern. Hierzu möchten Sie für jeden Berggipfel t herausfinden, wie weit Sie in der Lage sein müssen zu springen um t von s zu erreichen.

   Geben Sie in Worten einen Algorithmus an, der dieses Problem möglichst effizient löst. Geben Sie seine Worst-Case-Laufzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Berggipfel und der Anzahl der Wegabschnitte an. **4 Punkte**

Aufgabe 2 – Schlange aus zwei Stapeln analysieren

Zwei Stapel S_1, S_2 können wie folgt eine Schlange Q simulieren:

- Enqueue(x): führe S_1.Push(x) aus – lege also x auf den ersten Stapel.
- Dequeue(): Ist S_2 leer, führe solange S_2.Push(S_1.Pop()) aus, bis S_1 leer ist – verschiebe die Elemente der Reihe nach von S_1 auf S_2. Danach führe S_2.Pop() aus.
- Empty(): gibt true zurück, falls S_1 und S_2 leer sind, sonst false.

Betrachten Sie nun eine zufällige Folge der Länge n bestehend aus Enqueue-, Dequeue- und Empty-Operationen auf Q.

a) Argumentieren Sie, warum die *Worst-Case*-Laufzeit einer einzelnen Dequeue-Operation auf Q in $\Theta(n)$ liegt. **3 Punkte**

b) Zeigen Sie mit amortisierter Analyse: die Gesamtlaufzeit für jede Folge liegt ebenfalls in $\Theta(n)$. Eine einzelne Dequeue-Operation benötigt amortisiert also nur konstante Laufzeit. Wieso ist dies kein Widerspruch zu Teilaufgabe a)? **3 Punkte**

Aufgabe 3 – MultiPop

Gegeben sei die folgende Funktion, welche auf einem Stapel S arbeitet:

MultiPoP(k)
while S *nicht leer* **and** $k > 0$ **do**
    S.Pop()
    $k = k - 1$

Wir betrachten nun eine Sequenz von n Stapel-Operationen (Push, Pop und MultiPop).

a) Zeigen Sie, dass die *Worst-Case*-Laufzeit einer einzelnen MultiPop-Operation auf S in $\Theta(n)$ liegt. **2 Punkte**

b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von amortisierter Analyse, dass die Gesamtlaufzeit einer solchen Sequenz ebenfalls in $\Theta(n)$ liegt. Wieso ist dies kein Widerspruch zu Teilaufgabe a)? **2 Punkte**

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Montag, 01. Februar 2021, 16:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit PABS gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (*sXXXXXX*-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.