

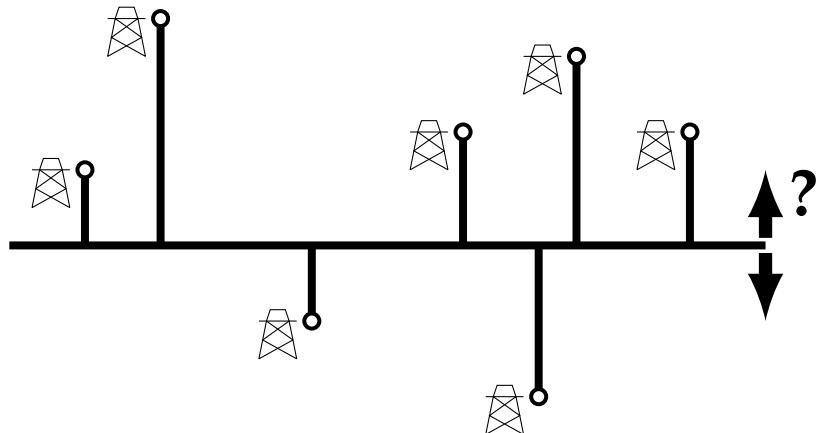
5. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen (Winter 2020/21)

Aufgabe 1 – Pipelines

Jett Rink möchte eine Pipeline in Ost-West-Richtung bauen, an die er seine Ölquellen möglichst kostengünstig anschließen kann. Jede Ölquelle soll über eine Zuleitung, die in Nord-Süd-Richtung verlaufen soll, an die Pipeline angeschlossen werden. Jett Rink fragt sich, wo die billigste Ost-West-Pipeline verläuft, also die, bei der die Gesamtlänge aller Zuleitungen minimiert wird.

Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit in $O(n)$ an, der für eine Menge von n Ölquellen $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ die y-Koordinate einer billigsten Ost-West-Pipeline zurückgibt. Begründen Sie, warum der Algorithmus korrekt ist.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass die x-Koordinaten aller Ölquellen paarweise verschieden sind. **4 Punkte**



Aufgabe 2 – Probabilistische Laufzeiten

Gegeben sei folgender Algorithmus:

```

Algo1(int[] A)
1 n = A.length
2 for i = 1 to n do
3   rnd = eine zufällige Zahl  $\in \{1, 2, \dots, n\}$ 
4   if rnd  $\leq$  i then
5     for j = i to n do
6       print A[j]

```

- a) Angenommen der Zufallsgenerator (Zeile 3) gäbe stets n zurück. Wie viele Zahlen würden dann ausgegeben? **1 Punkt**
- b) Angenommen der Zufallsgenerator (Zeile 3) gäbe stets 1 zurück. Wie viele Zahlen würden dann ausgegeben? **1 Punkt**
- c) Im Folgenden gebe der Zufallsgenerator jede Zahl zwischen 1 und n mit gleicher Wahrscheinlichkeit zurück. Definieren Sie eine Indikatorzufallsvariable X_i , die beschreibt, ob in Iteration i Zeile 5 ausgeführt wird. Berechnen Sie außerdem $E[X_i]$. **2 Punkte**
- d) Ermitteln Sie nun, wie viele Zahlen X der Algorithmus erwartet ausgibt. **2 Punkte**
- e) Geben Sie, basierend auf der vorherigen Teilaufgabe, die erwartete Laufzeit des Algorithmus in Θ -Notation an. Vergleichen Sie sie mit der Worst-Case- und der Best-Case-Laufzeit des Algorithmus. **2 Punkte**

Aufgabe 3 – Hashing

Die Schlüssel 44, 12, 23, 88, 71, 11, 94, 39, 20, 5 und 16 sollen in dieser Reihenfolge nacheinander in eine Hashtabelle $T[0..15]$ eingefügt werden. Dabei können verschiedene Verfahren eingesetzt werden, um Kollisionen aufzulösen.

- a) Zeichnen Sie für jedes der folgenden Verfahren die resultierende Hashtabelle.
1. Kollisionen werden durch Verkettung aufgelöst;
die Hashfunktion ist $h(k) = (3k + 7) \bmod 16$.
 2. Kollisionen werden durch lineares Sondieren aufgelöst;
die Hashfunktion ist $h(k, i) = (h_0(k) + i) \bmod 16$
mit $h_0(k) = (3k + 7) \bmod 16$.
 3. Kollisionen werden durch quadratisches Sondieren aufgelöst;
die Hashfunktion ist $h(k, i) = (h_0(k) + c_1i + c_2i^2) \bmod 16$
mit $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ und $h_0(k) = (3k + 7) \bmod 16$.
 4. Kollisionen werden durch doppeltes Hashing aufgelöst;
die Hashfunktionen ist $h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod 16$
mit $h_1(k) = (3k + 7) \bmod 16$ und $h_2(k) = 7 - 2(k \bmod 4)$.

Bei den Verfahren 2. bis 4. durchläuft i die Werte $0, \dots, 15$.

Geben Sie bei jedem Verfahren (außer bei 1.) und für jeden Schlüssel an, wie viele Zellen Sie testen mussten, bevor Sie eine freie Zelle gefunden haben. Geben Sie für jedes Verfahren auch die Gesamtzahl der erfolglosen Tests an. **6 Punkte**

- b) Welches Problem tritt beim doppelten Hashing auf, wenn die Hashfunktion $h(k, i) = (h_1(k) + ih_2(k)) \bmod 16$ mit $h_1(k) = (3k + 7) \bmod 16$ und $h_2(k) = 8 - (k \bmod 8)$ verwendet wird?

Beim quadratischen Sondieren können durch ungeschickte Wahl der Parameter c_1 und c_2 ähnliche Probleme auftreten. Geben Sie ein Beispiel mit $c_1, c_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ an.

2 Punkte

Bitte geben Sie Ihre Lösungen bis **Montag, 21. Dezember 2020, 16:00 Uhr** einmal pro Gruppe über Wuecampus als pdf-Datei ab. Vermerken Sie dabei stets die Namen und Übungsgruppen aller BearbeiterInnen auf der Abgabe.

Grundsätzlich sind stets alle Ihrer Aussagen zu begründen und Ihr Pseudocode ist stets zu kommentieren.

Die Lösungen zu den mit **PABS** gekennzeichneten Aufgaben, geben Sie bitte nur über das PABS-System ab. Vermerken Sie auf Ihrem Übungsblatt, in welchem Repository (sXXXXXX-Nummer) die Abgabe zu finden ist. Geben Sie Ihre Namen hier als Kommentare in den Quelltextdateien an.