

Algorithmen und Datenstrukturen

Wintersemester 2020/21

1. Vorlesung

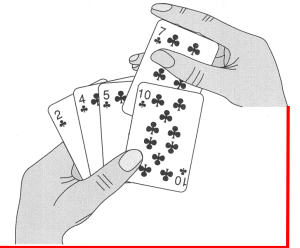
Kapitel 1: Sortieren

Frage an alle Erstis

Wie sortieren Sie?

Eine Lösung

InsertionSort



- Linke Hand anfangs leer. Alle Karten liegen auf dem Tisch.
- Rechte Hand nimmt Karten **nacheinander** auf und steckt sie (von rechts kommend) an **die richtige** Position zwischen die Karten in der linken Hand. *inkrementeller Alg.*
- Linke Hand hält **immer eine sortierte Reihenfolge** aufrecht.

Invariante!



Korrektheit: am Ende sind alle Karten in der linken Hand –
und zwar *sortiert!*

Ein inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

IncrementalAlg(array of ... A)

Typ der Eingabe (hier ein Feld von ...)

Name des Alg. Eingabe Variable

Ein inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

IncrementalAlg(array of ... A)

berechne Lösung für A[1] // Initialisierung

for $j = 2$ to $A.length$ do // Schleifenkopf

Anzahl der Elemente des Feldes A

Zuweisungsoperator – in manchen Sprachen $j := 2$
– in manchen Büchern $j \leftarrow 2$
– in Java $j = 2$

Ein inkrementeller Algorithmus

// In Pseudocode

```
IncrementalAlg( array of ... A )  
    berechne Lösung für A[1]           // Initialisierung  
    for  $j = 2$  to  $A.length$  do     // Schleifenkopf  
        // Schleifenkörper; wird  $(A.length - 1)$ -mal durchlaufen  
        berechne Lösung für  $A[1..j]$  mithilfe der für  $A[1..j - 1]$   
    return Lösung                       // Ergebnisrückgabe
```

Teilarray von A mit den Elementen $A[1], A[2], \dots, A[j]$

Ein inkrementeller Algorithmus

InsertionSort

~~IncrementalAlg~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int[]** A

~~berechne Lösung für A[1]~~ // nix zu tun: A[1..1] ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für A[1..j] mithilfe der für A[1..j - 1]

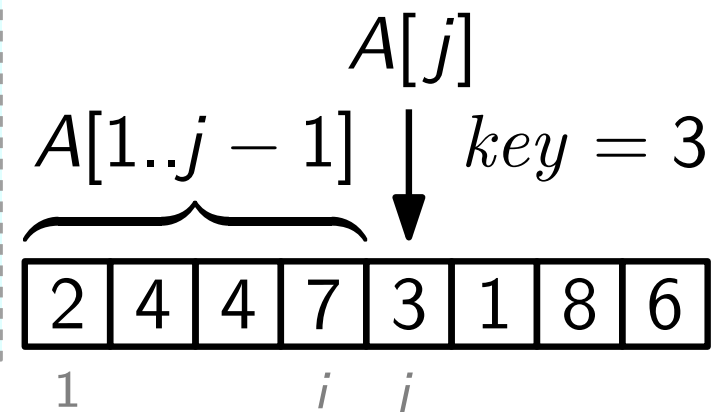
// hier: füge A[j] in die sortierte Folge A[1..j - 1] ein

$key = A[j]$

$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

Wie verschieben wir die Einträge größer key nach rechts?



Ein inkrementeller Algorithmus

InsertionSort

~~IncrementalAlg~~(array of **int** A) // Schreiben wir künftig so: **int[]** A

~~berechne Lösung für A[1]~~ // nix zu tun: A[1..1] ist sortiert

for $j = 2$ **to** $A.length$ **do**

// berechne Lösung für A[1..j] mithilfe der für A[1..j - 1]

// hier: füge A[j] in die sortierte Folge A[1..j - 1] ein

$key = A[j]$

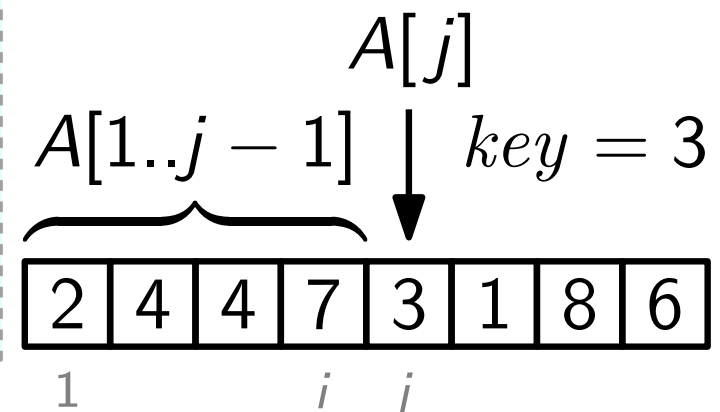
$i = j - 1$

while $i > 0$ **and** $A[i] > key$ **do**

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$

$A[i + 1] = key$



Fertig?

Nicht ganz...

Wir interessieren uns heute (und im Rest dieser Vorlesung) für folgende zentrale Fragen:

- Ist der Algorithmus **korrekt**?
- Welche **Laufzeit** hat der Algorithmus?
- Wie viel **Speicherplatz** benötigt der Algorithmus?

Korrektheit *beweisen*

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Hier enthält $A[1..j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Idee der *Schleifeninvariante*:

Wo? am Beginn jeder Iteration der for-Schleife...

Was? **WANTED:** Bedingung, die

- an dieser Stelle immer erfüllt ist und
- bei Abbruch der Schleife Korrektheit liefert

Korrektheit *beweisen*

```

InsertionSort(int[] A)
  for  $j = 2$  to  $A.length$  do
     $key = A[j]$ 
     $i = j - 1$ 
    while  $i > 0$  and  $A[i] > key$  do
       $A[i + 1] = A[i]$ 
       $i = i - 1$ 
     $A[i + 1] = key$ 
  
```

Hier enthält $A[1..j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) *Initialisierung*

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:

$A[1..j - 1] = A[1..1]$ ist unverändert und „sortiert“.

Korrektheit *beweisen*

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Hier enthält $A[1..j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) *Initialisierung* 2.) *Aufrechterhaltung*

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Eigentlich: Invariante für while-Schleife aufstellen und beweisen!

Korrektheit *beweisen*

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Hier enthält $A[1..j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) *Initialisierung* ✓ 2.) *Aufrechterhaltung* ✓

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Beob.: Elemente werden so lange nach rechts geschoben wie nötig. *key* wird korrekt eingefügt.

Korrektheit *beweisen*

```

InsertionSort(int[] A)
  for j = 2 to A.length do
    key = A[j]
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key do
      A[i + 1] = A[i]
      i = i - 1
    A[i + 1] = key
  
```

Hier enthält $A[1..j - 1]$ dieselben Elemente wie zu Beginn des Algorithmus – jedoch sortiert.

Schleifeninvariante

Beweis nach Schema „F“: Wir brauchen noch drei Zutaten...

1.) *Initialisierung* ✓ 2.) *Aufrechterhaltung* ✓ 3.) *Terminierung* ✓

Zeige: Zusammengenommen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Verletzte Schleifenbedingung ist $j > A.length$.

D.h. $j = A.length + 1$. Einsetzen in Inv. \Rightarrow korrekt!

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
Factorial(int k)
  if k < 0 then error(...)
  f = 1
  j = 2
  while j ≤ k do
    f = f · j
    j = j + 1
  return f
```

Korrekt?

Was passiert, wenn die Schleife gar nicht betreten wird?

Dann ist $j > k$. Da $j = 2 \Rightarrow$

$k = 0$ oder $k = 1$. Also $k! = 1$.

Rückgabewert ist $f = 1$. \Rightarrow korrekt.

Zur Erinnerung: k Fakultät $:= k! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k - 1) \cdot k$,
wobei $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, ...

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
Factorial(int k)
```

```
  if k < 0 then error(...)
```

```
  f = 1
```

```
  j = 2
```

```
  while j ≤ k do
```

```
    f = f · j
```

```
    j = j + 1
```

```
  return f
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) Initialisierung ✓

Zeige: Invariante ist beim 1. Schleifendurchlauf erfüllt.

Hier: klar, denn für $j = 2$ gilt:

$$f = (2 - 1)! = 1! = 1$$

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
Factorial(int k)
```

```
  if k < 0 then error(...)
```

```
  f = 1
```

```
  j = 2
```

```
  while j ≤ k do
```

```
    f = f · j
```

```
    j = j + 1
```

```
  return f
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) *Initialisierung* ✓ 2.) *Aufrechterhaltung* ✓

Zeige: Wenn die Invariante vor dem j . Schleifendurchlauf erfüllt ist, dann auch vor dem $j + 1$.

Hier: Vor dem j . Durchlauf gilt **INV**, d.h. $f = (j - 1)!$

Dann wird f mit j multipliziert $\Rightarrow f = j!$

Dann wird j um 1 erhöht $\Rightarrow f = (j - 1)! \Rightarrow$ **INV**

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
Factorial(int k)
```

```
  if k < 0 then error(...)
```

```
  f = 1
```

```
  j = 2
```

```
  while j ≤ k do
```

```
    f = f · j
```

```
    j = j + 1
```

```
  return f
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

1.) *Initialisierung* ✓ 2.) *Aufrechterhaltung* ✓ 3.) *Terminierung*

Zeige: Algo terminiert. Zusammen ergeben Invariante und verletzte Schleifenbedingung die Korrektheit.

Hier: Algo terminiert, da j in jedem Durchlauf erhöht wird.
Verletzte Schleifenbedingung: $j > k$, also $j = k + 1$.
Einsetzen von „ $j = k + 1$ “ in **INV** liefert **$f = k!$**

Noch ein Beispiel: Fakultät berechnen

```
Factorial(int k)
```

```
  if k < 0 then error(...)
```

```
  f = 1
```

```
  j = 2
```

```
  while j ≤ k do
```

```
    f = f · j
```

```
    j = j + 1
```

```
  return f
```

Schleifeninvariante:

$$f = (j - 1)!$$

- 1.) *Initialisierung* ✓ 2.) *Aufrechterhaltung* ✓ 3.) *Terminierung* ✓

Der Algorithmus **Factorial(int)** terminiert und liefert das korrekte Ergebnis.

Selbstkontrolle

- *Programmieren Sie InsertionSort in Java!*
- *Lesen Sie Kapitel 1 und Anhang A des Buchs von Cormen et al. durch und machen Sie dazu so viel Übungsaufgaben wie möglich!*
- *Bringen Sie Fragen in die Übung mit!*
- *Bleiben Sie von Anfang an am Ball!*
- *Schreiben Sie sich in die Vorlesung ein:*
 - wuecampus2.uni-wuerzburg.de
 - wuestudy.zv.uni-wuerzburg.de
 - chat.uni-wuerzburg.de



Zählen Sie Vergleiche für verschiedene Eingaben.