Es werden dann standardnormalverteilte Zufallszahlen Z_A und Z_B gezogen:

$$Z_A, Z_B \sim N(0;1).$$

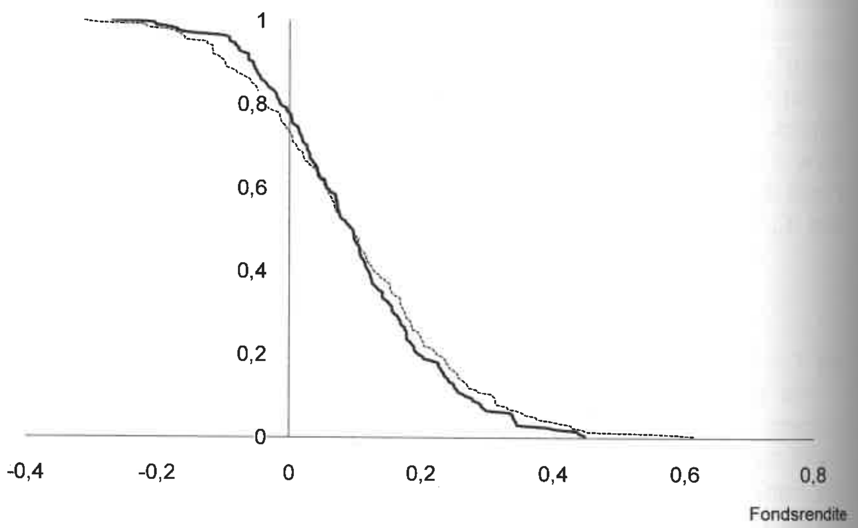
Die benötigten korrelierten Zufallszahlen ergeben sich aus der Multiplikation der Matrix G mit dem Vektor z der beiden Zufallszahlen Z_A und Z_B:

$$Y_A = Z_A,$$
$$Y_B = 0{,}5 \cdot Z_A + 0{,}866 \cdot Z_B.$$

Die Größen werden darauf in die gewünschte Normalverteilung transformiert:

$$X_A = Y_A \cdot \sigma_A + \mu_A,$$
$$X_B = Y_B \cdot \sigma_B + \mu_B.$$

Nun kann die Fondsrendite wieder als Durchschnitt der Renditen von Bank A und B errechnet werden. Ordnet man die Realisationen X_{Fonds} aufsteigend an, lässt sich ein Risikoprofil (für $n=200$ Simulationsläufe des Fondsbeispiels mit [gestrichelte Linie] und ohne [schwarze Linie] korrelierte Aktienkurse) zeichnen:



Das Risikoprofil zeigt, dass im Fall korrelierter Renditen sowohl höhere Kursgewinne als auch stärkere Kursverluste möglich sind. Der Expected Shortfall kann einfach als Durchschnitt über die schlechtesten 5 % der Realisationen von X_{Fonds} berechnet werden. Würde das Fondsmanagement die wahre Korrelation der beiden Aktien kennen, würde es anhand der in der Abbildung dargestellten Daten von einem Expected Shortfall von –23,2 % ausgehen. Ohne Berücksichtigung einer Korrelation zwischen den Aktienrenditen von A und B ergibt sich ein Expected Shortfall von –16,4 %. Der Investmentfonds würde vermutlich vorsichtiger agieren, wenn er um die tatsächliche Korrelation wüsste.

Kapitel 9: Entscheidung bei Risiko und einem Ziel

9.0 Zusammenfassung

1. Für Entscheidungen bei Risiko bildet die Erwartungsnutzentheorie die Grundlage rationalen Handelns.
2. Eine Präferenz bezüglich riskanter Alternativen lässt sich durch eine Nutzenfunktion abbilden, wenn die Präferenz die Axiome „Vollständigkeit", „Stetigkeit" und „Unabhängigkeit" erfüllt.
3. Es gibt ein Maß von Arrow und Pratt für die Risikoeinstellung eines Entscheiders bezüglich Lotterien über der jeweiligen Zielgröße. Das Maß ist größer (kleiner) als null, wenn die Nutzenfunktion konkav (konvex) ist. Eine konkave Nutzenfunktion ist gleichbedeutend mit Risikoscheu, eine konvexe Nutzenfunktion mit Risikofreude.
4. Bei der Benutzung der Begriffe Risikoscheu bzw. -freude ist jedoch zu beachten, dass in einer Nutzenfunktion Risiko- und Wertaspekte untrennbar miteinander verbunden sind.
5. Die Erwartungswert-Varianz-Regel ist nur in wenigen Fällen mit der Erwartungsnutzentheorie verträglich. Sie sollte nur mit großer Vorsicht angewendet werden.
6. Sie lernen fünf Methoden zur Bestimmung einer Nutzenfunktion kennen: Die Mittelwert-Kettungs-Methode, die Fraktilmethode, die Methode variabler Wahrscheinlichkeiten, die Methode gleicher Nutzendifferenzen und die Trade-Off-Methode für Nutzenfunktionen. Alle Methoden basieren auf der wiederholten Beurteilung von einfachen Lotterien.
7. Konsistenzprüfungen sind ein essentieller Bestandteil der Methoden zur Bestimmung einer Nutzenfunktion.
8. In einem einstufigen Modell kann der erwartete Nutzen einfach berechnet werden. Die optimale Alternative ist die mit dem höchsten Nutzenerwartungswert. In einem mehrstufigen Modell lässt sich die optimale Alternative mit Hilfe des *Roll-back*-Verfahrens ermitteln.

9.1 Bewertung riskanter Alternativen

Im siebten und achten Kapitel wurden Darstellungsformen für Entscheidungen bei Risiko ausführlich vorgestellt. Insbesondere wurde das Wahrscheinlichkeitskalkül präsentiert und gezeigt, wie subjektive Wahrscheinlichkeiten aus Urteilen von Entscheidern bestimmt werden können. In diesem Kapitel wollen wir die Präferenz eines Entscheiders abbilden, wenn riskante Alternativen vorliegen. Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass die Entscheidungssituation in Form eines einstufigen Modells abgebildet werden kann; das heißt, die Alternativen können in Form von einstufigen Lotterien definiert werden. Mehrstufige Alternativen, die durch Entscheidungsbäume oder Strategien abgebildet werden, werden in Abschnitt 9.5 genauer analysiert. Zur Vereinfachung werden wir überwiegend Alternativen mit endlich vielen Konsequenzen betrachten.

Besteht die Alternativenmenge aus zwei riskanten Alternativen a und b, so können die Alternativen durch die Vektoren $(a_1,p_1;\ldots;a_n,p_n)$ und $(b_1,q_1;\ldots;b_n,q_n)$ abgebildet werden. Diese Vektorschreibweise besagt, dass eine Konsequenz a_i mit Wahrscheinlichkeit p_i auftritt. Alternativ können die Entscheidungsalternativen durch eine Entscheidungsmatrix oder graphisch, wie in Abbildung 9-1, dargestellt werden.

Abb. 9-1: Graphische Darstellung einstufiger Lotterien

Denken Sie bitte noch einmal an Kapitel 5 zurück. Dort haben wir für Entscheidungen bei Sicherheit und einem Ziel gezeigt, wie die Präferenz des Entscheiders abgebildet werden kann. Analog werden wir in diesem Kapitel erläutern, wie die Präferenz des Entscheiders für riskante Alternativen abgebildet und mit welchen Methoden die Präferenz des Entscheiders ermittelt, das heißt gemessen, werden kann.

Wie ein Entscheider riskante Alternativen beurteilen soll, wird in der Ökonomie schon seit langem diskutiert. Da eine Alternative a durch die Konsequenzen a_i und deren Wahrscheinlichkeiten p_i definiert ist, muss die Bewertung einer Alternative „irgendwie" auf diesen Größen basieren. Dabei muss die Einstellung des Entscheiders zum Risiko der Lotterie und zum Wert der Konsequenzen berücksichtigt werden. Ziel unserer weiteren Überlegungen ist es, ein Präferenzkalkül zu entwickeln, das auf möglichst einfache, jedoch „vernünftige" Art und Weise jeder Alternative einen Wert zuweist. Dieser Wert soll, völlig analog zur Entscheidung bei Sicherheit, die Präferenz des Entscheiders bezüglich der riskanten Alternativen abbilden.

Nehmen wir zur Vereinfachung zunächst an, dass die Konsequenzen auf einer Intervallskala gemessen werden. Als statistisch geschulter Leser könnten Sie dann vorschlagen, den Erwartungswert (EW) einer riskanten Alternative a als Grundlage einer rationalen Präferenz zu definieren:

$$\mathrm{EW}(a)=\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot a_i. \tag{9.1}$$

Diesem Kalkül entsprechend würde eine Alternative a genau dann gegenüber einer Alternative b präferiert, wenn der Erwartungswert von a größer als der Erwartungswert von b ist.

Schon im 18. Jahrhundert hat Bernoulli (1738, 1954) mit Hilfe des St. Petersburger Spiels argumentiert, dass Entscheider systematisch von der durch den Erwartungswert vorgeschlagenen Präferenz abweichen und dies auch als nicht unvernünftig bezeichnet werden kann. Das St. Petersburger Spiel, angepasst an unsere heutige Währung, ist in Abbildung 9-2 dargestellt.

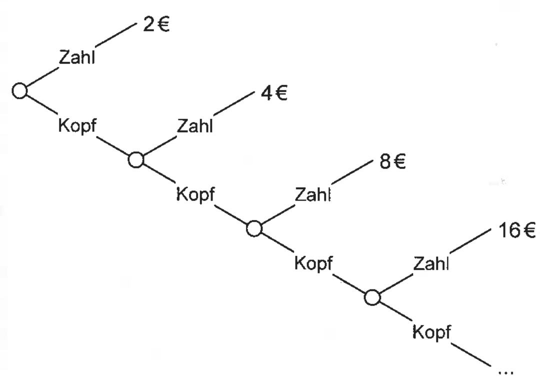


Abb. 9-2: Das St. Petersburger Spiel

Beim St. Petersburger Spiel hat der Entscheider eine mehrstufige Lotterie zu beurteilen. In der ersten Stufe wird eine faire Münze geworfen. Bei Zahl erhält der Spieler 2 €, bei Kopf wird die Münze noch einmal geworfen. Wird die Münze im zweiten Versuch so geworfen, dass Zahl oben liegt, erhält der Spieler $2^2=4$ €. Kommt Kopf, wird die Münze ein drittes Mal geworfen. Im n-ten Schritt erhält der Spieler 2^n € bei Zahl und bei Kopf die Möglichkeit, die Münze noch einmal zu werfen. Da die Münze fair ist, besteht in jeder Stufe eine Wahrscheinlichkeit von 50 % sowohl für das Ereignis Kopf als auch für das Ereignis Zahl. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{EW}(\text{St. Petersburger Spiel}) &= \frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 4+\frac{1}{8}\cdot 8+\ldots\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\cdot 2^i \text{ Euro}\\ &= \text{unendlich.}\end{aligned} \tag{9.2}$$

Der Erwartungswert für das St. Petersburger Spiel ist unendlich. Stehen Sie vor der Entscheidung, an diesem Spiel teilzunehmen oder eine Million Euro sicher zu erhalten, müssten Sie daher nach dem Erwartungswertprinzip die Teilnahme am St. Petersburger Spiel wählen. Sie werden jedoch, wie die meisten anderen Menschen, die sichere Zahlung von einer Million Euro bevorzugen, und wir werden Ihnen das kaum als Irrationalität vorwerfen können. Befragt man Studierende etwa im Rahmen einer unserer Entscheidungsvorlesungen, so gibt es nur wenige, die mehr als 20 € für die Teilnahme am St. Petersburger Spiel zahlen würden.

Das Spiel zeigt, dass die durch das Erwartungswertprinzip definierte Präferenz nicht mit dem intuitiven Entscheidungsverhalten übereinstimmt. Eine Diskrepanz zwischen präskriptiv wünschenswertem und tatsächlich gezeigtem Verhalten ist zunächst in der Entscheidungstheorie nichts Außergewöhnliches. Das Erwartungswertkalkül schreibt jedoch ein Verhalten vor, das auch nach vielem Nachdenken von den meisten Entscheidern nicht gewünscht wird. Das St. Petersburger Spiel legt den Finger in die Wunde des Erwartungswertkalküls: Es zeigt Implikationen des Kalküls auf, die von den meisten Entscheidern nicht als rational angesehen werden. Einfache Entscheidungsprobleme, die derart deutlich Schwächen eines Kalküls aufzeigen, werden auch als Paradoxa bezeichnet. Das St. Petersburger Paradoxon zeigt damit, dass es nötig ist, ein besseres Entscheidungskalkül für Entscheidungen bei Risiko zu entwickeln. Zur Modellierung von Präferenzen bei Risiko könnten jetzt alternative Entscheidungsprinzipien vorgeschlagen werden. Bernoulli folgend, könnte man die Zahlungen durch eine bestimmte Wertfunktion transformieren (Bernoulli schlägt eine logarithmische Wertfunktion vor) und den erwarteten Wert der Alternativen berechnen. Stattdessen könnte man auch vom Erwartungswert einer Alternative eine Größe subtrahieren, die das Risiko der Lotterie widerspiegelt. Viele weitere Kalküle lassen sich durch etwas Nachdenken ableiten und haben (leider) Eingang in die Literatur gefunden.

Wir wollen dieser Vorgehensweise nicht folgen. Analog zum Vorgehen in Kapitel 5 (Entscheidung bei Sicherheit und einem Ziel) sollen Anforderungen an eine rationale Präferenz gestellt werden. Diese Axiome definieren, was wir als rationales Verhalten bei Entscheidungen unter Risiko verstehen wollen. Aus den Anforderungen an eine rationale Präferenz wird das korrekte Entscheidungskalkül abgeleitet. Gleichzeitig kann daraus eine Messvorschrift zur Abbildung der Präferenz gewonnen werden.

9.2 Die Erwartungsnutzentheorie

9.2.1 Der Erwartungsnutzen

Die im Folgenden dargestellte Erwartungsnutzentheorie wurde durch von Neumann und Morgenstern (1947) begründet. Sie definierten Axiome und leiteten daraus ein Präferenzkalkül ab. Nachdem von Neumann und Morgenstern die Nutzentheorie vorgestellt hatten, wurde eine ganze Reihe von Axiomensystemen entwickelt, die alle (bis auf mathematische Feinheiten, vgl. Fishburn 1970) zu demselben Erwartungsnutzenkalkül führen. Die meisten Axiomensysteme sind Variationen des von Herstein und Milnor (1953) aufgestellten Systems, an dem wir uns im Folgenden orientieren wollen.

Erfüllt die Präferenz eines Entscheiders bezüglich riskanter Alternativen die Axiome

- vollständige Ordnung,
- Stetigkeit und
- Unabhängigkeit,

so existiert eine Funktion u, genannt „Nutzenfunktion“, deren Erwartungswert („Erwartungsnutzen“) die Präferenz abbildet. Bevor wir die Axiome genauer erläutern, sei das Konzept der Nutzenfunktion näher erläutert. Eine Lotterie a wird genau dann einer Lotterie b vorgezogen, falls der erwartete Nutzen von a, $\mathrm{EU}(a)$ (*E*xpected *U*tility), größer als der erwartete Nutzen der Lotterie b ist. Der erwartete Nutzen einer riskanten Alternative a ist definiert durch:

$$\mathrm{EU}(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(a_i). \tag{9.3}$$

Die Nutzenfunktion u ordnet jeder Konsequenz eine reelle Zahl zu. Dieses Konzept kennen Sie auch schon von der Bewertung unter Sicherheit aus Kapitel 5. Allerdings bildet eine Nutzenfunktion sowohl die Einstellung zum Wert der Konsequenz als auch die Einstellung zum Risiko ab. Diese wichtige Unterscheidung drückt sich auch sprachlich aus: im Fall sicherer Erwartungen sprechen wir bekanntlich von einer Wertfunktion v, bei Entscheidungen unter Risiko ist es hingegen üblich, von einer Nutzenfunktion u zu sprechen. Die Nutzenfunktion ist bis auf positive lineare Transformationen eindeutig, das heißt jede Funktion u' mit $u' = \alpha \cdot u + \beta$ $(\alpha > 0)$ ordnet jegliche Lotterien in derselben Weise wie u. Eine Nutzenfunktion erfordert keine besondere Art der Skalierung der Konsequenzen. Sie können – wie bei der Wertfunktion – den Nutzen von Geld, von Kindergartenplätzen oder der Farbe einer Krawatte ermitteln.

Stellen Sie sich vor, Sie hätten beim Gemeinderat um 20 zusätzliche Kindergartenplätze gebeten. Der Gemeinderat beschließt, zehn neue Plätze einzurichten. Sie sind damit unzufrieden und überlegen, ob Sie gegen den Beschluss klagen sollen. Sie schätzen, dass Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}6$ gewinnen und 20 Plätze erhalten und mit $p = 0{,}4$ verlieren und gar keinen neuen Platz erhalten (der Gemeinderat ist verärgert und nimmt seinen ursprünglichen Beschluss zurück).

Das Erwartungsnutzenkriterium gibt Ihnen jetzt eine klare Anleitung zum rationalen Entscheiden. Sie bestimmen zunächst die Nutzenfunktion mit einer der noch darzustellenden Methoden und erhalten zum Beispiel: $u(0\,\text{Plätze}) = 0$, $u(10\,\text{Plätze}) = 0{,}55$ und $u(20\,\text{Plätze}) = 1$. Der erwartete Nutzen der sicheren Alternative beträgt 0,55, der des Gangs zum Gericht $0{,}4 \cdot u(0\,\text{Plätze}) + 0{,}6 \cdot u(20\,\text{Plätze}) = 0{,}6$. Als rationaler Entscheider klagen Sie gegen den Beschluss, weil der erwartete Nutzen dieser Alternative am größten ist.

Denken Sie bei der Farbwahl an das Problem, das Sie unter dem Weihnachtsbaum befällt. Sie haben die Möglichkeit, Ihrer Oma die rosa Krawatte zurückzugeben und dafür vielleicht selbst eine Krawatte Ihrer Lieblingsfarbe kaufen zu dürfen oder Ihre Oma mit der Rückgabe des Geschenks zu verärgern und gar keine Krawatte zu erhalten. Auch hier kann Ihnen der Erwartungsnutzenansatz helfen: Sie müssen den Nutzen der sicheren Alternative (rosa Krawatte) mit dem erwarteten Nutzen der riskanten Alternative (Lieblingsfarbe vs. keine Krawatte) vergleichen.

Das Erwartungsnutzenkriterium gewinnt seine Bedeutung dadurch, dass es kein willkürliches Kriterium ist. Erkennt ein Entscheider die oben aufgeführten Axiome als Grundlage seines (rationalen) Verhaltens an, so *muss* er sich in riskanten Entscheidungssituationen gemäß der Erwartungsnutzentheorie verhalten. *Optimal* ist eine Alternative für einen rational handelnden Entscheider genau dann, wenn sie den höchsten Erwartungsnutzen der betrachteten Alternativen besitzt.

Lehnt ein Entscheider die Axiome ab oder möchte er sein Entscheidungsverhalten auf einem alternativen Axiomensystem basieren, lassen sich unter Umständen alternative Präferenztheorien ableiten. Wir werden auf diesen Punkt im Weiteren noch mehrmals hinweisen und insbesondere im Kapitel 13 darauf ausführlicher eingehen. Es sei jedoch schon an dieser Stelle deutlich gesagt, dass wir keine Theorie kennen, die eine überzeugendere Grundlage für rationales Entscheiden bildet.

Noch nicht diskutiert haben wir, was Nutzen denn nun eigentlich bedeutet, d. h. ob und wenn ja welche inhaltliche Bedeutung dem Wort „Nutzen" zugeordnet werden kann. Diese Frage hat die Wissenschaft über Jahrzehnte stark beschäftigt. Die Vorgehensweise, der von Neumann und Morgenstern (und auch Savage) folgen, ist gerade dadurch ausgezeichnet, dass sie rationales Entscheiden bei Risiko auch ohne eine inhaltliche Definition des Nutzenbegriffs ermöglicht. Bei der Ableitung der Erwartungsnutzentheorie sind wir nur von der beobachtbaren Präferenz des Entscheiders bezüglich riskanter Alternativen ausgegangen. Wir haben *keine* inhaltliche Interpretation für den Nutzen einer Konsequenz benötigt. Die Nutzenfunktion ist ausschließlich eine Funktion, die dazu dient, Lotterien zu ordnen – nicht mehr, aber auch nicht weniger.

9.2.2 Axiomatische Grundlagen der Nutzentheorie

Da die Axiome die zentralen Bausteine der Erwartungsnutzentheorie sind, wollen wir sie im Folgenden ausführlich erläutern.

Vollständige Ordnung

Vollständigkeit: Für jedes Paar von Lotterien a und b gilt: $a \succ b$ oder $b \succ a$. Transitivität: Für alle Lotterien a, b und c gilt: Aus $a \succ b$ und $b \succ c$ folgt $a \succ c$.

Das Axiom der vollständigen Ordnung fordert, dass beliebige Lotterien miteinander verglichen werden können und dass die Präferenzordnung bezüglich der Lotterien transitiv ist. Das Axiom ist Ihnen im Prinzip schon aus dem Kapitel über Wertfunktionen bekannt; anstelle von sicheren Alternativen wird das Axiom hier für riskante Alternativen definiert. Das Axiom der vollständigen Ordnung fasst die beiden in Kapitel 5 vorgestellten Axiome der Vollständigkeit und der Transitivität zusammen.

Auch in diesem Kapitel wäre wieder zu diskutieren, ob die Forderung der Vollständigkeit wirklich sinnvoll ist. Man wird auf Situationen stoßen, in denen ein Entscheider keine Präferenz- oder Indifferenzaussage bezüglich zweier Lotterien

treffen kann. Wer möchte beispielsweise eine einprozentige Chance, bei einem Autounfall zu sterben, mit einer einprozentigen Chance, bei einem Fahrradunfall zu sterben, vergleichen? Vom präskriptiven Standpunkt aus sollte ein Entscheider jedoch auch in diesem traurigen Fall eine Präferenz besitzen. Die Erwartungsnutzentheorie soll in der Lage sein, Präferenzaussagen für beliebige Alternativenpaare zu treffen. Dafür ist die Vollständigkeit eine unabdingbare Voraussetzung. Auch die Transitivitätsforderung könnte wie in Kapitel 5 kontrovers diskutiert werden. Wir wollen jedoch Transitivität als Grundlage für rationales Verhalten fordern.

Stetigkeit

Sind Lotterien a, b, c mit $a \succ b \succ c$ gegeben, dann gibt es eine Wahrscheinlichkeit p, bei der $b \sim p \cdot a + (1-p) \cdot c$.[1]

Der Ausdruck $p \cdot a + (1-p) \cdot c$ bezeichnet eine zusammengesetzte Lotterie – das heißt eine Lotterie, deren Ergebnisse wieder Lotterien sind – bei der die Lotterie a mit der Wahrscheinlichkeit p und die Lotterie c mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ eintritt. Ist beispielsweise $a = (100\,€, 0{,}8; 0\,€, 0{,}2)$ und $c = (200\,€, 1)$, so ist die Lotterie $0{,}5 \cdot a + 0{,}5 \cdot c$ gleich $(200\,€, 0{,}5; 100\,€, 0{,}4; 0\,€, 0{,}1)$. Abbildung 9-3 stellt die Lotterie $0{,}5 \cdot a + 0{,}5 \cdot c$ als zweistufige und äquivalente einstufige Lotterie dar.

Das Stetigkeitsaxiom impliziert, dass für jede Lotterie b, die von der Präferenz her zwischen a und c liegt, immer eine Kombination von a und c gefunden werden kann, die genauso gut wie b ist. Das Stetigkeitsaxiom wird vielfach als Bedingung angesehen, die man zwar zur mathematischen Ableitung des Erwartungsnutzenprinzips benötigt, die aber nicht weiter problematisiert werden muss. In Einzelfällen wird jedoch auch die Gültigkeit dieses Axioms diskutiert werden müssen. Gewinnt man zum Beispiel bei a mit Sicherheit 2 €, bei b mit Sicherheit 1 €, und erleidet man bei c innerhalb der nächsten Woche mit Sicherheit einen schweren Autounfall, werden viele Entscheider keine Kombination von a und c angeben können oder wollen, bei der sie indifferent zu b sind. Selbst eine noch so große Wahrscheinlichkeit p (die jedoch kleiner als eins bleiben muss) führt zu keiner Indifferenzaussage. Sieht man von solchen zugegebenermaßen sehr konstruierten und für das praktische Entscheiden irrelevanten Beispielen ab, ist das Stetigkeitsaxiom unumstritten und wird allgemein als Grundlage rationalen Handelns anerkannt.

Die Axiome der Stetigkeit und der vollständigen Ordnung sind im Prinzip identisch mit den Anforderungen an Präferenzen, die bei sicheren Erwartungen die Existenz einer Wertfunktion garantieren. Wie im Fall sicherer Erwartungen kann aus diesen beiden Axiomen die Existenz einer Präferenzfunktion für riskante Alternativen abgeleitet werden, die die Lotterien gemäß der Präferenz des Entscheiders ordnet. Die Aussage, dass eine Präferenzfunktion existiert, hilft Ihnen bei der Lösung eines praktischen Entscheidungsproblems jedoch noch nicht viel weiter. Die Besonderheit der Erwartungsnutzentheorie liegt vielmehr darin, wie die Präfe-

[1] Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass nur beschränkte Nutzenfunktionen existieren und somit die Nutzenerwartungswerte aller Lotterien stets endlich sind.

renzfunktion als einfache Funktion der Wahrscheinlichkeiten und der Konsequenzen dargestellt werden kann. Das Axiom, das dem Risikoentscheidungskalkül von von Neumann und Morgenstern seine spezielle Form gibt und für das einfache, additive Modell der Erwartungsnutzentheorie verantwortlich ist, ist das Unabhängigkeitsaxiom.

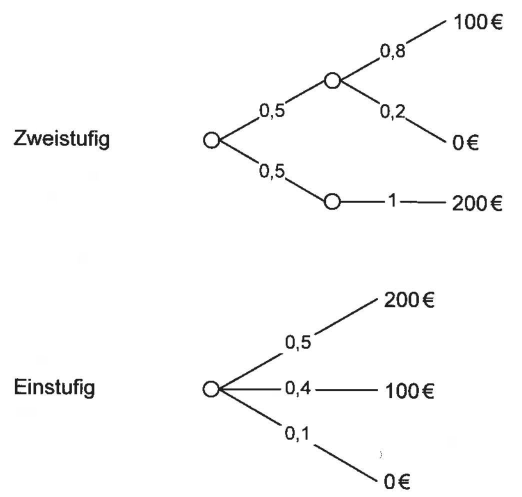


Abb. 9-3: Zusammengesetzte Lotterie: Zweistufige und äquivalente einstufige Lotterie

Unabhängigkeit

Gilt für zwei Lotterien $a \succeq b$, so muss auch für alle Lotterien c und alle Wahrscheinlichkeiten p gelten, dass $p \cdot a + (1-p) \cdot c \succeq p \cdot b + (1-p) \cdot c$.

Dem Unabhängigkeitsaxiom für Entscheidungen bei Risiko liegt dieselbe Idee zugrunde, die Ihnen schon aus Kapitel 6 von den Unabhängigkeitsbedingungen bei Mehrfachzielentscheidungen bekannt ist. Eine Präferenz zwischen zwei Lotterien a und b soll sich nicht ändern, wenn beide Lotterien mit ein- und derselben (somit für die Entscheidung irrelevanten) Lotterie verknüpft werden.

Wir wollen das Unabhängigkeitsaxiom anhand eines Beispiels erläutern (vgl. Abbildung 9-4). Ein Entscheider bevorzugt die Lotterie $a = (100€, 0{,}5; 0€, 0{,}5)$ gegenüber der Lotterie $b = (60€, 0{,}7; 10€, 0{,}3)$. Diese Präferenz muss erhalten bleiben, wenn er die Lotterien a und b mit der Lotterie $c = (50€, 1)$ für beliebige Wahrscheinlichkeiten mischt. In der Abbildung gilt $p = 0{,}8$. Die Mischung kann als zweistufige und als einstufige Lotterie dargestellt werden. In der zweistufigen Darstellungsweise sieht man die Implikationen des Unabhängigkeitsaxioms klar und deutlich: Die 20-prozentige Wahrscheinlichkeit, c zu erhalten, wird mit der 80-prozentigen Wahrscheinlichkeit verknüpft, Lotterie a oder Lotterie b zu erhalten.

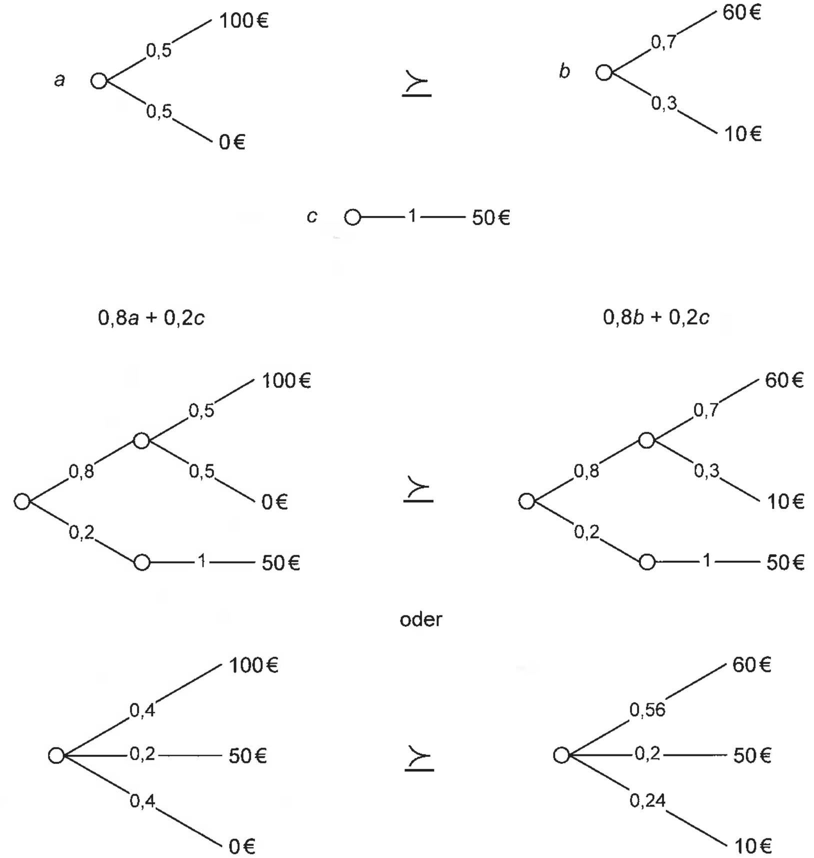


Abb. 9-4: Beispiel für das Unabhängigkeitsaxiom der Nutzentheorie

Es lässt sich leicht einsehen, dass das Unabhängigkeitsaxioms für zwei Lotterien a und b, zwischen denen der Entscheider indifferent ist, auch für die kombinierten Lotterien $p \cdot a + (1-p) \cdot c$ und $p \cdot b + (1-p) \cdot c$ eine Indifferenz fordert (weil eine Indifferenz ja sowohl $\succeq$ als auch $\preceq$ bedeutet). Dies erklärt auch, warum das Unabhängigkeitsaxiom oft als *Substitutionsaxiom* bezeichnet wird: Eine Lotterie (oder eine Konsequenz) darf dann durch eine andere Lotterie substituiert werden, wenn der Entscheider zwischen beiden Lotterien bzw. zwischen der Konsequenz und der Lotterie indifferent ist. Die Substitution hat keine Auswirkung auf die Präferenz des Entscheiders. Diese Aussage sei anhand von Abbildung 9-5 verdeutlicht. Alternative b wurde aus Alternative a abgeleitet, indem die Konsequenz 100€ in Alternative a durch die Lotterie $(250€, 0{,}5; 0€, 0{,}5)$ ersetzt wurde. Ist der Entscheider indifferent zwischen der Konsequenz 100€ und der Lotterie $(250€, 0{,}5; 0€, 0{,}5)$, so muss er auch indifferent zwischen Alternative a und Alternative b sein.

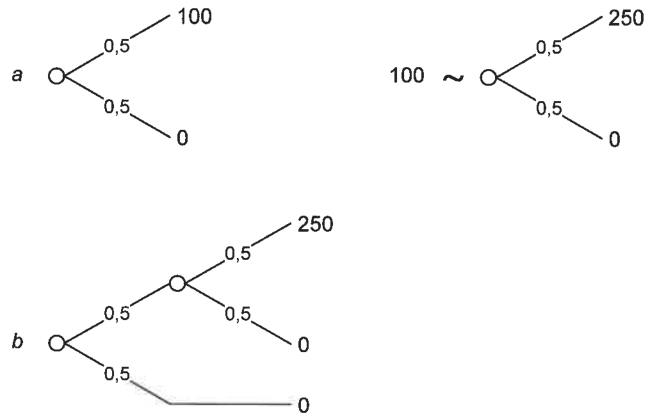


Abb. 9-5: Beispiel für das Substitutionsaxiom

Bei der bisherigen Diskussion des Unabhängigkeitsaxioms haben wir implizit die Gültigkeit eines weiteren Axioms unterstellt. Das Axiom über die Reduktion zusammengesetzter Lotterien (*Reduction of compound lotteries axiom*) besagt, dass ein Entscheider indifferent ist zwischen einer zweistufigen Lotterie (mittlerer Paarvergleich in Abbildung 9-4) und einer einstufigen Lotterie, deren Ergebnisse gleich denen der zweistufigen Lotterie sind und deren Wahrscheinlichkeiten durch Multiplikation der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der zweistufigen Lotterie gewonnen wurden (unterer Paarvergleich in Abbildung 9-4). Dieses Axiom bewegt sich jedoch auf einem anderen, viel grundlegenderen Niveau. Es gehört zur Klasse der Beschreibungsinvarianz-Forderungen, die besagen, dass die reine Darstellung eines Entscheidungsproblems die Entscheidung nicht beeinflussen darf, sofern die für die Entscheidung relevanten Größen (die Zielausprägungen und deren Wahrscheinlichkeiten) die gleichen sind. Wie wir in Kapitel 13 noch genauer besprechen werden, ist diese Forderung im intuitiven Entscheidungsverhalten keineswegs stets erfüllt. Daher ist es wichtig, dieses Axiom hier einmal explizit zu erwähnen, auch wenn es von anderer Art ist als die drei zuvor genannten Axiome. Es sollte Ihnen klar sein, dass eine Verletzung eines solch grundlegenden Axioms, welches das Durchmultiplizieren von Wahrscheinlichkeiten erlaubt, eine Verletzung der Kolmogoroff-Axiome für Wahrscheinlichkeiten (vgl. Kapitel 7) impliziert und daher wohl kaum als Grundlage für rationales Entscheiden dienen kann.

Das Unabhängigkeitsaxiom schränkt die Menge der zulässigen Präferenzen stark ein: Ist eine Präferenz für zwei Alternativen *a*, *b* gegeben, impliziert es eine Präferenz für alle Mischungen mit beliebigen Alternativen *c*. Mit anderen Worten: Die einfache Form des Erwartungsnutzenkalküls wird durch die relativ strenge Anforderung an die Präferenz erkauft. Wie wir bei der Darstellung neuerer deskriptiver Theorien in Kapitel 13 zeigen werden, wird das Unabhängigkeitsaxiom intuitiv verletzt und kann nicht zur Beschreibung von Entscheidungsverhalten dienen. Diese Verletzung des Axioms beim intuitiven Entscheiden hat sogar dazu geführt, dass die Nutzentheorie auch als Grundlage für rationales Verhalten abgelehnt wurde (Allais 1953). Inzwischen hat sich die auch von uns vorgenommene Trennung zwischen präskriptiver und deskriptiver Sichtweise in der Literatur verfestigt. Rationales Entscheiden soll gerade dadurch gekennzeichnet sein, dass Entscheider ihre Präferenz bezüglich Lotterien nicht von gemeinsamen Komponenten der Lotterien abhängig machen, dass die Substitution von Lotterien durch äquivalente Lotterien zu keiner Änderung der Präferenz führen darf und dass Wahrscheinlichkeiten durchmultipliziert werden dürfen. Präskriptiv wird das Unabhängigkeitsaxiom in der Literatur daher weitgehend bejaht (so auch von uns). Diese Diskussion verdeutlicht auch, dass erst eine Betrachtung der einer Theorie zugrundeliegenden Axiome eine vernünftige Auseinandersetzung über die Frage erlaubt, ob eine Theorie die Grundlage für „rationales Entscheiden“ bilden kann.

Axiome und Erwartungsnutzenformel

Möglicherweise wundern Sie sich, warum aus den drei Axiomen (Vollständige Ordnung, Stetigkeit und Unabhängigkeit) folgen sollte, dass sich ein rationaler Entscheider gemäß der Erwartungsnutzentheorie entscheiden muss. Zum Glück ist die Argumentation gar nicht so kompliziert und wir wollen sie Ihnen kurz skizzieren (vgl. allgemein Herstein und Milnor 1953). Die Grundidee ist, dass sich unter Verwendung der Axiome jede Lotterie zu einer gleich attraktiven Lotterie transformieren lässt, die nur die zwei Konsequenzen x_{max} und x_{min} besitzt und dadurch gut mit anderen Lotterien vergleichbar ist. Dabei bezeichnen wir mit x_{max} und x_{min} die beste und die schlechteste Konsequenz in der gegebenen Entscheidungssituation. Betrachten Sie die Alternative *a* in Abbildung 9-6. Nach dem Stetigkeitsaxiom gibt es für jede Konsequenz a_i eine Wahrscheinlichkeit q_i, so dass der Entscheider zwischen dem sicheren Erhalt der Konsequenz a_i und der Lotterie $(x_{max}, q_i; x_{min}, 1-q_i)$ indifferent ist. Nach dem Unabhängigkeitsaxiom ist der Entscheider dann auch indifferent zwischen der Lotterie *a* und der Lotterie a' in Abbildung 9-6 (die Konsequenzen dürfen durch gleichwertige Lotterien substituiert werden). Durch Reduktion der zweistufigen Lotterie zu einer einstufigen Lotterie erhalten wir a'', die gleichwertig zu a' und damit für den Entscheider gleich attraktiv wie *a* ist.

Die Transformation von *a* zu a'' kann auch für jede beliebige andere Lotterie *b* vorgenommen werden. Wegen der Indifferenz zwischen *a* und a'' sowie *b* und b'' muss die Präferenz zwischen *a* und *b* dann der Präferenz zwischen a'' und b'' entsprechen. Diese zweite Präferenz ist jedoch leicht zu ermitteln. Die Präferenzstärke eines Entscheiders bezüglich einer Lotterie *a* (bzw. *b*) drückt sich allein in der Wahrscheinlichkeit, bei a'' (bzw. b'') die Konsequenz x_{max} zu erhalten, aus. Folglich sollte eine Lotterie *a* einer Lotterie *b* vorgezogen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, x_{max} zu erzielen, für die (aus *a* transformierte) Lotterie a'' größer ist als für die aus *b* abgeleitete Lotterie b''. Definiert man jetzt $u(a_i)=q_i$, so wird deutlich, dass die Wahrscheinlichkeit, x_{max} zu erzielen, gleich dem erwarteten Nutzen der Alternative *a* ist. Die Präferenzen eines rationalen Entscheiders müssen demnach auf dem erwarteten Nutzen der Alternativen basieren.

9.2.3 Das Drei-Ergebnis-Diagramm

Die Implikationen des Unabhängigkeitsaxioms und damit die speziellen Eigenschaften der Nutzentheorie können mit Hilfe von Nutzenindifferenzkurven in sogenannten *Drei-Ergebnis-Diagrammen* dargestellt werden (Machina 1982, Schauenberg 1990 und Weber und Camerer 1987). Seien x_n, x_m, x_h (*n*iedrig, *m*ittel, *h*och) drei beliebige Konsequenzen, für die gilt $x_n \prec x_m \prec x_h$. Alle Lotterien mit diesen Konsequenzen können im selben zweidimensionalen Drei-Ergebnis-Diagramm repräsentiert werden. Auf den Achsen dieses Diagramms (vgl. Abbildung 9-7) werden die Wahrscheinlichkeiten p_n und p_h aufgetragen, mit denen die Konsequenzen x_n und x_h auftreten. Da $p_m = 1 - p_n - p_h$ gilt, ist mit den beiden Wahrscheinlichkeiten p_n und p_h die gesamte Lotterie charakterisiert. In Abbildung 9-7 ist beispielhaft die Lotterie $(x_h, 0{,}62; x_m, 0{,}26; x_n, 0{,}12)$ als Punkt G eingezeichnet.

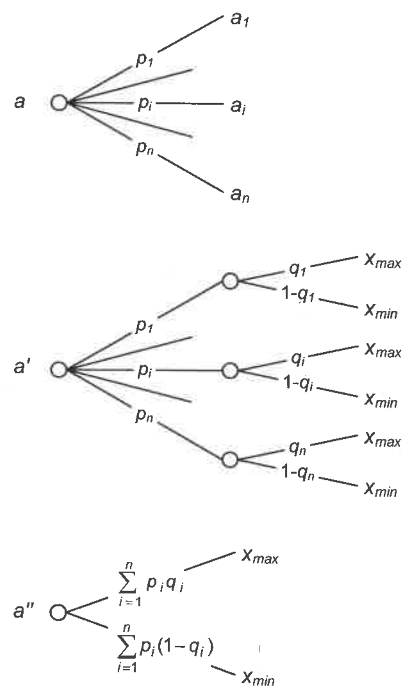


Abb. 9-6: Ableitung der Erwartungsnutzenformel aus den Axiomen

Die Präferenz eines Entscheiders lässt sich durch Nutzenindifferenzkurven in Drei-Ergebnis-Diagrammen verdeutlichen. Sei Eu^* ein bestimmtes Nutzenniveau, das durch eine Lotterie mit den drei Ergebnissen x_n, x_m, x_h erreicht werden kann. Schreibt man die Gleichung für den Erwartungsnutzen dieser Lotterien $(x_h, p_h; x_m, p_m; x_n, p_n)$ hin $(\text{EU} = u(x_h) \cdot p_h + u(x_m) \cdot p_m + u(x_n) \cdot p_n)$, setzt sie gleich Eu^* und löst nach p_h auf (denken Sie daran, es gilt $p_m = 1 - p_n - p_h$), so erhält man:

$$p_h = p_n \frac{u(x_m) - u(x_n)}{u(x_h) - u(x_m)} + \frac{Eu^* - u(x_m)}{u(x_h) - u(x_m)}. \tag{9.4}$$

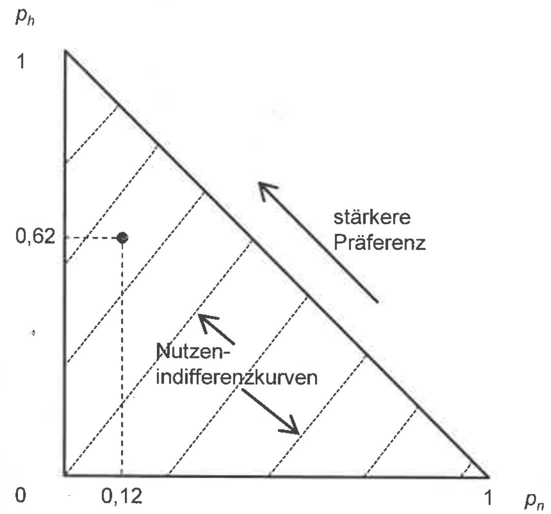


Abb. 9-7: Drei-Ergebnis-Diagramm

Für jedes Eu^* ist p_h eine lineare Funktion von p_n mit identischer Steigung, das heißt die Indifferenzkurven sind, wie in Abbildung 9-7 eingezeichnet, parallele Geraden. Eine Erhöhung des Nutzenniveaus Eu^* bedingt eine parallele Verschiebung der Nutzenindifferenzkurven nach links oben.

Den Zusammenhang zwischen Unabhängigkeitsaxiom und Parallelität der Erwartungsnutzen-Indifferenzkurven wollen wir noch einmal anhand eines konkreten Beispiels verdeutlichen (dieses wird uns unter dem Begriff Allais-Paradoxon auch in Kapitel 13 noch einmal beschäftigen). Betrachten wir die beiden Lotterien $a = (3.000\,€, 1)$ und $b = (4.000\,€, 0{,}8; 0\,€, 0{,}2)$. Sie können in ein Drei-Ergebnis-Diagramm für die Ausprägungen $x_h = 4.000\,€$, $x_m = 3.000\,€$ und $x_n = 0\,€$ eingezeichnet werden wie dies in Abbildung 9-8 getan ist.

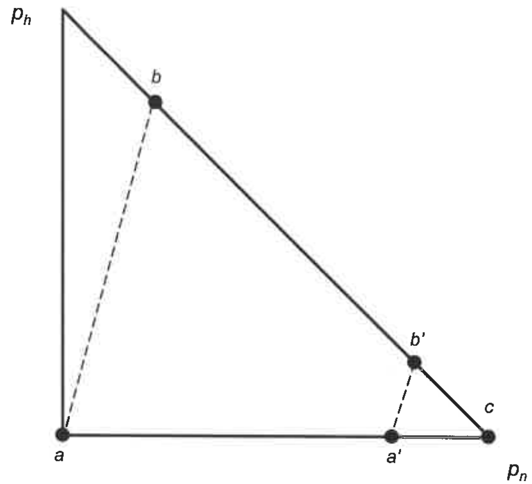


Abb. 9-8: Lotterien im Allais-Paradoxon

Verknüpfen wir nun diese beiden Lotterien jeweils mit einer Lotterie $c=(0\,€, 1)$ und unterstellen, dass letztere mit 75 % Wahrscheinlichkeit eintritt, so ergeben sich die Lotterien $a'=0{,}25 \cdot a+0{,}75 \cdot c=(3.000\,€, 0{,}25; 0\,€, 0{,}75)$ und $b'=0{,}25 \cdot b+0{,}75 \cdot c=(4.000\,€, 0{,}2; 0\,€, 0{,}8)$. Auch diese beiden Lotterien sind in Abbildung 9-8 abgetragen. Interessanterweise besitzen die Verbindungsgeraden von a nach b und die von a' nach b' die gleichen Steigungen (und das ist nicht nur in diesem Beispiel so, sondern immer der Fall). Damit lässt sich über die parallelen Indifferenzkurven sofort die Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms einsehen. Entweder sind die Indifferenzkurven eines Entscheiders wie auf der linken Seite von Abbildung 9-9 steiler als die Verbindungsgerade zwischen a und b (dann präferiert er Lotterie a). Oder sie sind wie auf der rechten Seite von Abbildung 9-9 flacher (dann präferiert der Entscheider Lotterie b). In jedem Falle überträgt sich diese Präferenz aber auch auf die Lotterien a' und b', die ja durch eine Linie mit gleich hoher Steigung verbunden sind. Ein Erwartungsnutzenmaximierer kann nicht gleichzeitig eine Präferenz $a \succ b$ und $a' \prec b'$ besitzen.

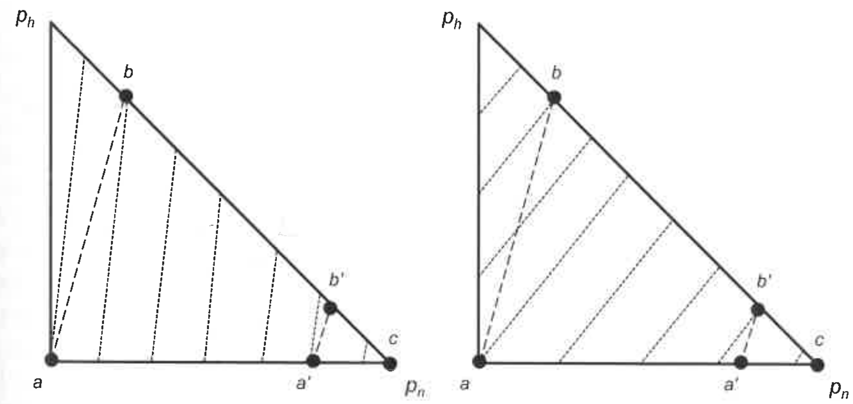


Abb. 9-9: Mögliche Indifferenzgeraden im Allais-Paradoxon

Das Drei-Ergebnis-Diagramm zeigt, dass die Erwartungsnutzentheorie trotz der weitgehenden Freiheiten bei der Form der Nutzenfunktion nur eine sehr beschränkte Menge von Präferenzen abbilden kann: Bedenken Sie, welche anderen Formen anstelle der parallelen Geraden noch prinzipiell denkbar wären. Durch die Vorgabe einer einzelnen Indifferenzkurve wird die Präferenzordnung für alle Lotterien festgelegt, die durch das Diagramm abgebildet werden können. Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Formel des Erwartungsnutzens, die der obigen Gleichung der Indifferenzkurve zugrunde liegt. Würde ein Entscheider sich nach dem Erwartungs*wert*kriterium entscheiden, wäre auch die Steigung der Indifferenzkurven vorgegeben. Die genaue Höhe der Steigung bestimmt sich durch die relative Lage von x_h, x_m und x_n. Generell gilt, dass in einem gegebenen Drei-Ergebnis-Diagramm (also bei fixierten x_h, x_m und x_n) steilere Indifferenzkurven eine höhere Risikoaversion widerspiegeln. Dieser Sachverhalt wird klar, wenn man die folgenden beiden Indifferenzaussagen betrachtet:

$$x_m \sim (x_h, 50\,\%; x_n, 50\,\%)$$
$$x_m \sim (x_h, 70\,\%; x_n, 30\,\%)$$

Da die Lotterie in der zweiten Indifferenzaussage einen höheren Erwartungswert jedoch das gleiche Sicherheitsäquivalent hat (nämlich x_m), ist dort die Risikoprämie größer. Die Indifferenzkurven zu beiden Aussagen sind Geraden durch den Ursprung (welcher ja x_m repräsentiert). Die erste Gerade läuft zusätzlich durch den Punkt (50 %, 50 %), die zweite Gerade durch den Punkt (30 %, 70 %). Somit verläuft die Gerade zur zweiten (risikoaverseren) Aussage steiler.

Neuere Theorien zur Beschreibung von Entscheidungsverhalten (vgl. Kapitel 13) wollen ein gegenüber der Nutzentheorie breiteres Spektrum von Präferenzen abbilden, um so auch „paradoxes" Verhalten abbilden zu können. Entsprechend besitzen diese Theorien Indifferenzkurven im Drei-Ergebnis-Diagramm, die entweder nicht parallel oder nicht einmal linear sind. Solche Theorien könnten dann in Abbildung 9-8 durchaus auch Verhaltensmuster $a \succ b$ und $a' \prec b'$ abbilden.

9.2.4 Die subjektive Erwartungsnutzentheorie

Die Erwartungsnutzentheorie, wie sie von von Neumann und Morgenstern entwickelt wurde, befasst sich nicht mit dem Problem, wie die bei der Entscheidung benötigten Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden. Sie setzt einfach voraus, dass die Wahrscheinlichkeiten gegeben sind. Dies ist jedoch eine Annahme, die in vielen praktischen Entscheidungssituationen nicht erfüllt ist. Erinnern Sie sich bitte an die Verfahren zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten im Kapitel 7. Bei den indirekten Verfahren werden dem Entscheider jeweils zwei Lotterien vorgelegt, bei denen er die in der einen Lotterie auftretenden Wahrscheinlichkeiten (symbolisiert zum Beispiel durch ein Wahrscheinlichkeitsrad) so abändern muss, dass er indifferent zwischen beiden Lotterien ist. Aus dieser Indifferenzaussage wurde die subjektive Wahrscheinlichkeit des zu beurteilenden Ereignisses abgeleitet. Die Idee, dass Wahrscheinlichkeitsaussagen aus Präferenzaussagen abgeleitet werden können, wurde von Savage (1954, 1972) axiomatisiert und stellt die am weitesten anerkannte Grundlage für rationales Entscheiden bei Risiko dar. Viele neue deskriptive Theorien erweitern den von Savage entwickelten Ansatz.
Bei Savage wählt ein Entscheider zwischen Alternativen a (*acts*), die abhängig von Zuständen der Natur $s \in S$ (*states of nature*), auch Ereignisse genannt, zu Konsequenzen $a(s)$ (*consequences*) führen. Präferenzen bezüglich der Alternativen lassen Rückschlüsse auf Nutzenfunktion und „persönliche Glaubwürdigkeiten" des Eintretens von Ereignissen zu. Erfüllt die Präferenz eines Entscheiders bestimmte Axiome, so konnte Savage zeigen, dass die persönlichen Glaubwürdigkeiten die Anforderungen an Wahrscheinlichkeiten erfüllen. Sie werden daher als Entscheidungsgewichte oder subjektive Wahrscheinlichkeiten bezeichnet.

Savages Theorie wird als *subjektive* Erwartungsnutzentheorie (SEU: *Subjective Expected Utility Theory*) bezeichnet. Sie bewertet die Alternativen völlig analog zur Nutzentheorie mit der Summe der Produkte aus Wahrscheinlichkeit und Nutzen. Für den subjektiv erwarteten Nutzen einer Alternative a gilt:

$$\mathrm{SEU}(a) = \sum_{s \in S} p(s) \cdot u(a(s)). \tag{9.5}$$

Wir könnten jetzt an dieser Stelle alle Axiome von Savage vorstellen und damit insbesondere zeigen, welche Anforderungen an Präferenzaussagen gestellt werden müssen, um subjektive Wahrscheinlichkeiten ableiten zu können. Wir wollen hier jedoch nur das wichtigste Axiom von Savage anführen. Da Savage den erwarteten Nutzen als Summe der Produkte aus subjektiver Wahrscheinlichkeit und Nutzen der Konsequenz ableitet, benötigt auch er ein Unabhängigkeitsaxiom, das als „*Sure thing principle*" bezeichnet wird. Das Unabhängigkeitsaxiom der subjektiven Erwartungsnutzentheorie ähnelt natürlich dem der Erwartungsnutzentheorie. Interessant ist aber auch die Verbindung zu den in Kapitel 6 vorgestellten Unabhängigkeitsaxiomen bei Mehrfachzielentscheidungen. Eine additive Repräsentation der Präferenz, sei es additiv über Zustände oder Ziele, erfordert immer die Gültigkeit eines Unabhängigkeitsaxioms (vgl. generell zu Unabhängigkeitsbedingungen bei Informationsverdichtung Dyckhoff 1986).

Unabhängigkeit für SEU
Seien a, b, a' und b' Alternativen und sei S' eine Teilmenge der Menge der Ereignisse S und $a(s)=a'(s)$ sowie $b(s)=b'(s)$ für $s \in S'$ und $a(s)=b(s)$ sowie $a'(s)=b'(s)$ für $s \in S \setminus S'$, so gilt $a \succ b$ genau dann, wenn $a' \succ b'$.

In Worte gefasst sagt dieses Unabhängigkeitsaxiom: Haben zwei Alternativen für bestimmte Ereignisse identische Konsequenzen, so dürfen diese Ereignisse keinen Einfluss auf die Präferenz des Entscheiders bezüglich dieser Alternativen haben. Ersetzt man Ereignisse durch Ziele, wird die Verbindung zu den Axiomen bei Mehrfachzielen deutlich. Das Unabhängigkeitsaxiom sei an einem Beispiel erläutert: Ein Würfel wird geworfen. Gemäß der Tabelle 9-1 erhalten Sie in Abhängigkeit von der geworfenen Zahl entweder einen Apfel (A) oder eine Banane (B).

Bei a erhält man, unabhängig von der geworfenen Zahl, eine Banane, bei b für die Zahlen 1 bis 5 eine Banane und bei 6 einen Apfel; bei b' gibt es immer einen Apfel und bei a' nur bei einer geworfenen 6 eine Banane. Das Unabhängigkeitsaxiom besagt, dass die Präferenz zwischen a und b identisch zur Präferenz zwischen a' und b' sein muss. Die jeweils für beide alternativen Paare identischen Konsequenzen der Zustände 1 bis 5 dürfen für die Entscheidung keine Rolle spielen, in Bezug auf Zustand 6 besteht kein Unterschied zwischen dem Paarvergleich (a, b) und (a', b').

Tabelle 9-1: Erläuterung des Sure thing principle

	1	2	3	4	5	6
a	B	B	B	B	B	B
b	B	B	B	B	B	A
a'	A	A	A	A	A	B
b'	A	A	A	A	A	A

Nachdem Sie die Grundzüge der Nutzentheorie kennengelernt haben, könnten Sie fragen, wie die Nutzenfunktion, die offenbar für die Präferenz entscheidend ist, bestimmt werden kann. Wir werden Verfahren zur Bestimmung der Nutzenfunktion in Abschnitt 9.4 kennenlernen. Zuvor wollen wir in Abschnitt 9.3 wesentliche Begriffe der Nutzentheorie definieren.

9.3 Grundbegriffe der Nutzentheorie

9.3.1 Das Sicherheitsäquivalent

Ein zentraler Begriff bei der Bewertung von Lotterien ist das *Sicherheitsäquivalent* (SÄ). Betrachten wir eine Lotterie a, so stellt das Sicherheitsäquivalent

SÄ(a) die sichere Konsequenz dar, bei der der Entscheider indifferent zwischen SÄ(a) und der zu beurteilenden Lotterie a ist. Es gilt damit:

$$u(\text{SÄ}(a)) = \text{EU}(a). \quad (9.6)$$

Im Falle einer stetigen Konsequenzenmenge und einer stetigen Nutzenfunktion muss der Entscheider gemäß dem Axiom der vollständigen Präferenzordnung immer ein Sicherheitsäquivalent angeben können; ansonsten muss dies nicht immer der Fall sein (Laux 2007, S. 221 f.).

9.3.2 Die Risikoeinstellung

Betrachten Sie die in Abbildung 9-10 dargestellten drei streng monoton steigenden Nutzenfunktionen u_{RN}, u_{RF} und u_{RS}, die über beliebigen stetigen Konsequenzen (Geld, Regenmenge, Menge Tomatensauce) definiert sein könnten. Die minimale Konsequenz sei mit x_{min}, die maximale Konsequenz mit x_{max} bezeichnet. Die Funktionen unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Krümmung. Es gilt die folgende Zuordnung, wobei sich die etwas kryptischen Bezeichnungen in Kürze erklären werden:

u_{RN} lineare Nutzenfunktion
u_{RF} konvexe Nutzenfunktion
u_{RS} konkave Nutzenfunktion.

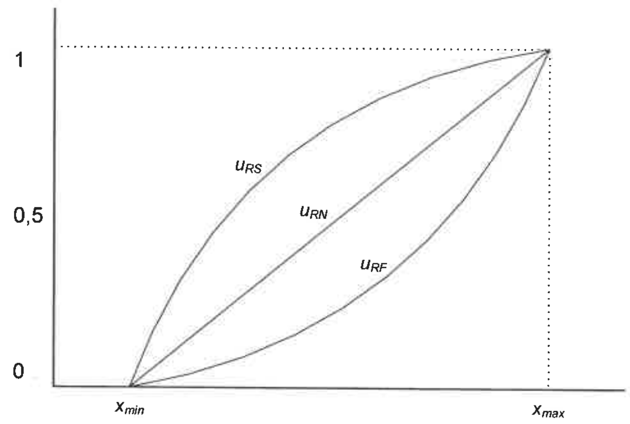


Abb. 9-10: Lineare, konvexe und konkave Nutzenfunktionen

Es ist jetzt naheliegend zu untersuchen, ob die Krümmung (d. h. die Form) der Nutzenfunktion allgemeine Aussagen über das Entscheidungsverhalten bei Risiko ermöglicht. Betrachten wir dazu eine beliebige Lotterie a. Entsprechend der Definition des Sicherheitsäquivalents gilt die folgende Beziehung:

$$u(\text{SÄ}(a)) = \text{EU}(a), \text{ d. h. } \text{SÄ}(a) = u^{-1}(\text{EU}(a)). \quad (9.7)$$

Wir sehen an diesen Gleichungen, wie sich das Sicherheitsäquivalent jeder Lotterie mit Hilfe der Nutzenfunktion ableiten lässt.

Um einen Einblick in das Entscheidungsverhalten zu erhalten, wird nun das Sicherheitsäquivalent dem Erwartungswert der Lotterie gegenübergestellt. Die Differenz dieser beiden Größen wird als *Risikoprämie* (RP) bezeichnet:

$$\text{RP}(a) = \text{EW}(a) - \text{SÄ}(a). \quad (9.8)$$

Ist zum Beispiel eine Lotterie (100 €, 0,5; 0 €, 0,5) gegeben und nennt der Entscheider ein Sicherheitsäquivalent von 40 € für diese Lotterie mit Erwartungswert 50 €, ergibt sich eine Risikoprämie von 10 €. Die Risikoprämie dient zur Charakterisierung der Risikoeinstellung. Beachten Sie, dass SÄ(a) und RP(a) Größen sind, die für jeden Entscheider unterschiedlich ausfallen können (EW(a) ist hingegen eine vom Entscheider unabhängige Charakteristik der Lotterie). Für monoton *steigende* Nutzenfunktionen gilt: Ist RP(a) > 0 für alle riskanten Lotterien a, spricht man von *risikoscheuem* (synonym: *risikoaversem*), bei RP(a) = 0 von *risikoneutralem* und bei RP(a) < 0 von *risikofreudigem* Verhalten. Ist ein Entscheider risikoscheu, so stellt die Risikoprämie die Größe dar, auf die er – ausgehend vom Erwartungswert einer Lotterie – zu verzichten bereit ist, um das Risiko der Lotterie zu vermeiden und stattdessen das Sicherheitsäquivalent mit Sicherheit zu erhalten.

In einem letzten Schritt wollen wir nach einem Zusammenhang zwischen der Krümmung der Nutzenfunktionen und der Risikoeinstellung suchen. Die Zusammenhänge lassen sich der folgenden Tabelle entnehmen. Sie zeigt, dass die Krümmung der Nutzenfunktion die Risikoeinstellung determiniert. Betrachten wir beispielsweise die konkave Funktion u_{RS} aus Abbildung 9-10, erkennen wir jetzt, dass sie risikoscheues Entscheidungsverhalten abbildet, d. h. für jede beliebige Lotterie ist bei einer solchen Nutzenfunktion das Sicherheitsäquivalent immer geringer als der Erwartungswert.

Tabelle 9-2: Risikoeinstellung und Krümmung der Nutzenfunktion

Nutzenfunktion	RP(= EW − SÄ)	Risikoeinstellung
linear: u_{RN}	= 0	Risikoneutral
konkav: u_{RS}	> 0	Risikoscheu
konvex: u_{RF}	< 0	Risikofreudig

Der Zusammenhang zwischen der Krümmung der Nutzenfunktion und der Risikoeinstellung des Entscheiders sei an einem Beispiel erläutert. Ein Entscheider habe eine konkave Nutzenfunktion über dem Intervall $[x_{min}, x_{max}]$. Eine Zwei-Zustand-Lotterie $a = (a_1, p; a_2, 1-p)$ habe ihre Ausprägungen in diesem Intervall. In Abbildung 9-11 haben wir die Ausprägungen der Lotterie als zwei Punkte auf der Nutzenfunktion abgetragen. Auf der Nutzenachse (Ordinate) können Sie nun den Erwartungsnutzen EU(a), auf der Ausprägungsachse (Abszisse) den Erwartungswert EW(a) markieren. In diesem einfachen Beispiel mit nur zwei Ausprägungen liegt der Punkt (EW(a), EU(a)) auf der Verbindungsstrecke zwischen den beiden auf der Nutzenfunktion markierten Ausprägungspunkten (die genaue Position auf der Verbindungsstrecke hängt dabei von p ab; der Punkt (EW(a), EU(a)) teilt die Strecke im Verhältnis ($1-p$) zu p). Die anschauliche Interpretation für das Sicherheitsäquivalent und die Risikoprämie ergeben sich nun wie folgt. Bewegen wir uns auf der Horizontalen, die von EU(a) ausgeht, nach rechts, bis wir die Nutzenfunktion schneiden, und projizieren wir diesen Schnittpunkt auf die Abszisse, so ist die Ausprägung x gefunden, die den gleichen Nutzen wie a hat. Nach unserer Definition ist dies das Sicherheitsäquivalent von a. Und wie Sie erkennen können, ist dieses für unsere konkave Nutzenfunktion kleiner als der Erwartungswert EW(a). Der Abstand auf der Ausprägungsachse (Abszisse) zwischen EW(a) und dem Sicherheitsäquivalent SÄ(a) entspricht gerade der Risikoprämie. An diesem Beispiel können Sie sich auch schön verdeutlichen, dass eine stärker konkave Nutzenfunktion auch zu einer höheren Risikoprämie führen würde.

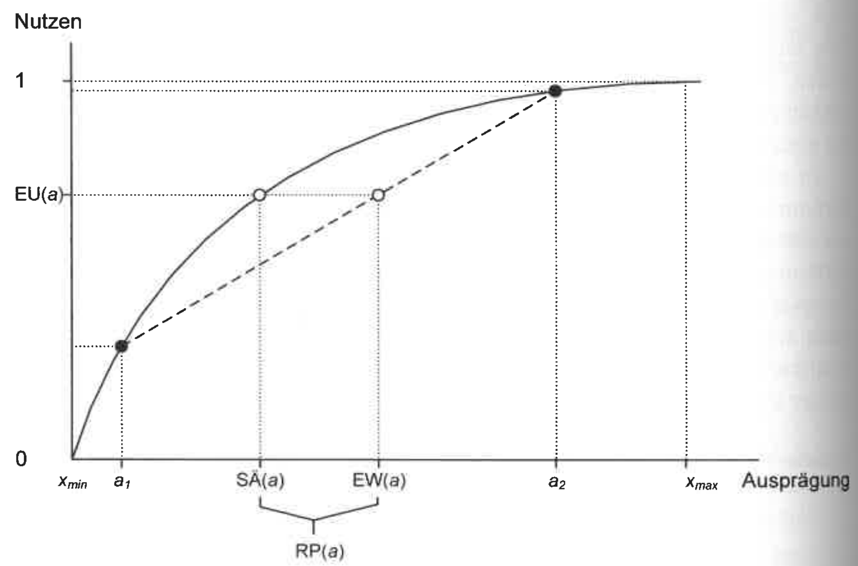


Abb. 9-11: Konkave Nutzenfunktion, Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie

Die Risikoeinstellung eines Entscheiders spiegelt sich auch in den Indifferenzkurven im Drei-Ergebnis-Diagramm wider. Rufen Sie sich bitte Abbildung 9-7 und die Gleichung der Nutzenindifferenzkurven in Erinnerung. Eine stärkere Risikoaversion geht mit einer „konkaveren" Nutzenfunktion einher. Hält man $u(x_l)$ und $u(x_h)$ konstant, schlägt sich die Erhöhung der Risikoaversion daher in einer Erhöhung der Größe $u(x_m)$ nieder. Diese Erhöhung von $u(x_m)$ führt zu einer Vergrößerung des Koeffizienten von p_n: Die Indifferenzkurven im Diagramm werden steiler.

Bisher haben wir uns auf die Betrachtung steigender Nutzenfunktionen beschränkt. Für monoton *fallende* Nutzenfunktionen (denken Sie zum Beispiel an eine Nutzenfunktion über die Anzahl der Tage, die Sie im Krankenhaus zu liegen haben) spricht man von risikoscheuem Verhalten, wenn RP < 0 ist bzw. wenn die Nutzenfunktion konkav ist, und von risikofreudigem Verhalten bei RP > 0 bzw. wenn die Nutzenfunktion konvex ist. Ist die Konsequenzenmenge nicht stetig oder sind die Konsequenzen gar ordinal oder nominal skaliert, lassen sich die obigen Definitionen nicht anwenden.

Für identische Entscheidungsprobleme kann die Risikoeinstellung, wie sie durch die Nutzenfunktion ausgedrückt wird, von Entscheider zu Entscheider unterschiedlich sein. Selbst für denselben Entscheider kann sich in einem anderen Entscheidungsumfeld eine unterschiedliche Nutzenfunktion und damit Risikoeinstellung ergeben. Schließt man Versicherungen ab, ist man in aller Regel risikoscheu (man bevorzugt die sichere Auszahlung für die Versicherungsprämie gegenüber dem riskanten Schaden, dessen erwarteter Verlust geringer als die Versicherungsprämie ist); spielt man Lotto, ist man in aller Regel risikofreudig (man bevorzugt die riskante Lotterie, deren erwarteter Gewinn geringer als die sichere Auszahlung für einen Lottoschein ist). Die Risikoeinstellung muss daher für jedes Entscheidungsumfeld und jeden Entscheider neu bestimmt werden. Manche Teilgebiete der Betriebswirtschaftslehre legen jedoch generelle Annahmen über die Risikoeinstellung von Entscheidern zugrunde.

9.3.3 Das Risikoeinstellungsmaß von Arrow und Pratt

Bisher haben wir gelernt, dass wir Entscheider gemäß ihrer Risikoeinstellung in drei Klassen (risikoscheu, risikoneutral und risikofreudig) einteilen können. Wir wollen jetzt ein exaktes Maß definieren, das die Risikoeinstellung auch quantifizieren kann. Damit werden wir in der Lage sein, Entscheider als mehr oder weniger risikoscheu (usw.) zu klassifizieren. Die Risikoeinstellung spiegelt sich in der Stärke und der Art der Krümmung der Nutzenfunktion wider. Diese Krümmung wird durch das *Arrow-Prattsche Risikoeinstellungsmaß* $r(x)$ abgebildet:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}. \tag{9.9}$$

Das Maß setzt voraus, dass die Nutzenfunktion zweifach differenzierbar und die erste Ableitung der Nutzenfunktion ungleich null ist. In der oben angegebenen Form misst das Maß die absolute Risikoeinstellung des Entscheiders. Das Maß ist absolut, weil es nicht zu den Konsequenzen der Lotterie in Relation gesetzt wird, für die es berechnet wurde. Durch Multiplikation mit der jeweiligen Konsequenz x erhält man das Maß für die relative Risikoeinstellung $r^*(x)$ (auch proportionale Risikoeinstellung genannt):

$$r^*(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \cdot x. \tag{9.10}$$

Beide Größen werden in der Finanzierungstheorie oft gebraucht, um das Risikoverhalten von Anlegern zu charakterisieren. So geht man in der Regel davon aus (Kraus und Litzenberger 1976), dass

- der Grenznutzen des Geldes positiv ist,
- der Grenznutzen mit steigenden Geldbeträgen abnimmt und
- nicht steigende absolute Risikoaversion vorliegt.

Wie schon gezeigt, hängen Risikoprämie und Krümmung der Nutzenfunktion und damit Risikoprämie und Risikoeinstellungsmaß direkt voneinander ab:

$$RP \approx \tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{Var}(\text{Lotterie}) \cdot r(\text{SÄ}). \qquad (9.11)$$

Die Risikoprämie ist annähernd gleich dem Produkt aus der halben Varianz der Lotterie und dem Risikoeinstellungsmaß an der Stelle des Sicherheitsäquivalentes. Eine ausführliche Ableitung findet sich in Pratt (1964), der auch zeigt, wie die Risikoprämie durch höhere Momente der Lotterie noch genauer angenähert werden kann. Die obige Formel definiert einen Zusammenhang zwischen drei wichtigen Größen. Sie zeigt, dass eine größere (kleinere) Varianz einer Alternative für einen Entscheider mit $r > 0$ zu einer größeren (kleineren) Risikoprämie führt.

Aus der Formel ersehen Sie unmittelbar, dass Risikoprämie und Risikoeinstellungsmaß immer dasselbe Vorzeichen besitzen. Bei monoton steigenden Funktionen gilt: Ist $r(x) > 0$ für alle x, das heißt $RP > 0$, ist der Entscheider risikoscheu; ist $r(x) < 0$ für alle x, das heißt $RP < 0$, ist Risikofreude gegeben; für den Fall $r(x) = 0$, das heißt $RP = 0$, gilt Risikoneutralität, und die Nutzenfunktion ist linear. Analog gilt für monoton fallende Nutzenfunktionen $r(x) < 0 \Leftrightarrow RP < 0 \Leftrightarrow$ Risikoscheu und $r(x) > 0 \Leftrightarrow RP > 0 \Leftrightarrow$ Risikofreude.

Die Frage nach der absoluten und relativen Risikoeinstellung „normaler" Bürger beschäftigt die Forschung intensiv. Als Beispiel seien Friend und Blume (1975) angeführt, die anhand von US-amerikanischen Steuerdaten abgeleitet haben, dass der durchschnittliche Anleger abnehmende absolute und konstante relative Risikoscheu besitzt.

9.3.4 Risikoeinstellungen ausgewählter Nutzenfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir Ihnen einige wichtige Nutzenfunktionen vorstellen und diese bezüglich ihrer Risikoeinstellung charakterisieren. Dies kann die Arbeit bei der praktischen Ermittlung von Nutzenfunktionen erleichtern und im Rahmen der ökonomischen Theoriebildung hilfreiche Dienste leisten.

- Die exponentielle Nutzenfunktion lautet:

$$u(x) = \alpha + \beta e^{-cx} \quad \text{mit } c > 0 \text{ und } \beta < 0. \qquad (9.12)$$

Für sie gilt konstante absolute Risikoaversion und zunehmende relative Risikoaversion.

- Die quadratische Nutzenfunktion lautet:

$$u(x) = \alpha + \beta x - \gamma x^2 \quad \text{mit } \beta, \gamma > 0, \quad x \le \frac{\beta}{2\gamma}. \qquad (9.13)$$

Für sie gilt zunehmende absolute Risikoaversion und zunehmende relative Risikoaversion. Dieses Verhalten wird in der Regel weder in experimentellen Untersuchungen noch im realen Leben zu beobachten sein. Die quadratische Nutzenfunktion ist daher nur mit äußerster Vorsicht (am besten überhaupt nicht) zur Abbildung menschlichen Verhaltens heranzuziehen.

- Die logarithmische Nutzenfunktion lautet:

$$u(x) = \alpha + \beta \log(x) \quad \text{mit } \beta > 0. \qquad (9.14)$$

Sie besitzt die Eigenschaft abnehmender absoluter Risikoaversion und konstanter relativer Risikoaversion.

Eine besonders wichtige Rolle in der ökonomischen Theorie spielen Nutzenfunktionen, die konstante absolute Risikoaversion (constant absolute risk aversion, CARA) widerspiegeln und solche, die konstante relative Risikoaversion (constant relative risk aversion, CRRA) reflektieren. Mit der exponentiellen und der logarithmischen Nutzenfunktion haben Sie eben für beide Typen schon einen Vertreter kennen gelernt. Wir wollen uns die speziellen Eigenschaften von CARA- und CRRA-Funktionen nun noch etwas näher anschauen.

Für die exponentielle Nutzenfunktion aus (9.12) ist es nicht schwierig nachzurechnen, dass $r(x) = c$ gilt, also konstante absolute Risikoaversion vorliegt (die zunehmende relative Risikoaversion folgt dann automatisch, da für ein konstantes $r(x) > 0$ die Größe $x \cdot r(x)$ in x monoton steigen muss). Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Nutzenfunktion, die konstante absolute Risikoaversion aufweist, genau diese funktionale Form haben muss. Es gibt also außer den exponentiellen Funktionen keine weiteren CARA-Funktionen.

Für Entscheider mit einer exponentiellen (CARA-)Nutzenfunktion gilt die interessante Eigenschaft, dass sie unabhängig von der Höhe ihres Vermögens stets die gleichen absoluten Risiken wählen. Nehmen wir an, ein Entscheider mit Vermögen W habe die Möglichkeit einen Absolutbetrag a seines Vermögens in eine Lotterie L zu investieren. Sein Endvermögen ergibt sich aus dem nicht investierten Betrag $W - a$ und der Rückzahlung $a \cdot L$ aus der Lotterie. Das Ziel des Entscheiders ist die Maximierung seines Erwartungsnutzens durch die optimale Wahl von a, also

$$\max_a Eu(W - a + a \cdot L).$$

Die in jeder Ausprägung auftauchende Konstante W lässt sich nach der Potenz-Rechenregeln $(\exp(W - a + a \cdot L) = \exp(W) \cdot \exp(-a + a \cdot L))$ aus jedem einzelnen Nutzenwert und damit auch aus dem Maximierungskalkül herausziehen zu:

$$\max_a Eu(W - a + a \cdot L) = u(W) \cdot \max_a Eu(-a + a \cdot L). \qquad (9.15)$$

Das Ausgangsvermögen spielt für die Wahl des optimalen, in die riskante Lotterie zu investierenden Betrages a also keine Rolle.

Die spezielle Form der exponentiellen Nutzenfunktion sorgt auch dafür, dass das Sicherheitsäquivalent einer Lotterie immer um δ steigt, wenn sich alle Konsequenzen dieser Lotterie um δ erhöhen. Da in diesem Falle auch der Erwartungswert der Lotterie um δ steigt, bleibt die Risikoprämie RP unverändert. Auch dies ist eine wichtige Eigenschaft der konstanten absoluten Risikoaversion: die Risikoprämie für eine riskante Lotterie hängt nicht vom sonstigen Vermögen ab.

Als Beispiel für konstante relative Risikoaversion (CRRA) haben wir bereits die Logarithmus-Funktion kennengelernt. Auch für diese kann die geforderte Eigenschaft eines konstanten $r^*(x) = x \cdot r(x)$ direkt nachgerechnet werden. Die Klasse der CRRA-Funktionen ist nicht auf die Logarithmusfunktion beschränkt. Falls konstante relative Risikoaversion vorliegt, hat die Nutzenfunktion folgende Form

$$u(x) = \alpha + \beta \cdot \begin{cases} \dfrac{x^{1-c}}{1-c}, \text{ falls } c \neq 1 \\ \qquad\qquad\qquad \text{mit } \beta > 0 \\ \log(x), \text{ falls } c = 1 \end{cases} \tag{9.16}$$

Die Fallunterscheidung, die zur Einbeziehung der Logarithmus-Funktion führt, ist notwendig, da ansonsten für $c = 1$ im oberen Ast durch Null geteilt würde. Wir haben im oberen Ast die Skalierung mit dem Faktor $1/(1-c)$ gewählt, weil dadurch Steigung und Krümmung der Funktionen stetig in c ineinander übergehen (d.h. die Logarithmus-Funktion ergibt sich in dieser Hinsicht wirklich als Grenzfall).

Die Intuition hinter konstanter relativer Risikoaversion können wir uns am besten an einem Investitionsbeispiel klar machen. Ein Entscheider mit Vermögen W habe die Möglichkeit, einen relativen Betrag $a \cdot W$ seines Vermögens in eine Lotterie L zu investieren, z.B. könnte er $a = 60\,\%$ seines Vermögens investieren. Damit ergibt sich sein Endvermögen aus dem nicht investierten Betrag $W \cdot (1-a)$ und der Rückzahlung $W \cdot a \cdot L$ aus der Lotterie. Das Ziel des Entscheiders ist die Maximierung seines Erwartungsnutzens durch die optimale Wahl von a, also

$$\max_a Eu(W \cdot (1-a) + W \cdot a \cdot L).$$

Bei konstanter relativer Risikoaversion hat der Entscheider nun die in Gleichung (9.16) angegebene Nutzenfunktion, und der maximierte Erwartungsnutzen lässt sich schreiben als

$$\max_a Eu(W \cdot [(1-a) + a \cdot L]) =$$

$$\begin{cases} W^{1-c} \cdot \max\limits_a Eu((1-a) + a \cdot L), \text{ falls } c \neq 1 \\ \log(W) + \max\limits_a Eu((1-a) + a \cdot L), \text{ falls } c = 1 \end{cases} \tag{9.17}$$

D.h. die optimale Wahl des zu investierenden Anteils a ist unabhängig vom Vermögen des Investors. Bei konstanter relativer Risikoaversion steigt die investierte Summe $a \cdot W$ proportional mit dem Vermögen, ist damit relativ zum Vermögen konstant. In absoluten Beträgen steigt hingegen die riskant investierte Summe mit erhöhtem Vermögen; dies reflektiert die gleichzeitig abnehmende absolute Risikoaversion der CRRA-Funktionen.

Auch in Bezug auf Sicherheitsäquivalente besitzen die CRRA-Funktionen eine interessante, mit den CARA-Funktionen vergleichbare Eigenschaft. Erhöhen sich bei einer Lotterie alle Konsequenzen um den gleichen Faktor α, so wächst auch das Sicherheitsäquivalent um genau diesen Faktor. Gleiches gilt für den Erwartungswert und damit auch für die Risikoprämie RP der Lotterie. Relativ zur Höhe der riskanten Investition bleibt die Risikoprämie also immer gleich. Für eine noch detailliertere Diskussion dieser speziellen Klasse von Nutzenfunktionen verweisen wir auf Wakker (2008).

9.4 Die Bestimmung der Nutzenfunktion

9.4.1 Die Basis-Referenz-Lotterie

Im bisherigen Verlauf des Kapitels haben wir im Wesentlichen theoretische Überlegungen zur Nutzentheorie angestellt. Um die Theorie des Erwartungsnutzens auf praktische Probleme anzuwenden, ist es jedoch unabdingbar, die Nutzenfunktion des Entscheiders bezüglich der jeweiligen Zielvariable zu bestimmen. Sind nur wenige Konsequenzen zu beurteilen, müssen nur die entsprechenden Punkte der Nutzenfunktion ermittelt werden. Bei der Bestimmung der Funktion ist es sinnvoll, sich an die Probleme und Lösungsmöglichkeiten bei der Ermittlung von Wertfunktionen und Wahrscheinlichkeiten zu erinnern. Bei allen Methoden wurden wir mit ähnlichen Problemen konfrontiert: Der Entscheider besitzt nicht immer eine exakte Präferenz und kann bei seinen Aussagen durch die Befragungsmethodik beeinflusst werden. Es ist daher unbedingt nötig, die im Weiteren vorgestellten Methoden zur Bestimmung der Nutzenfunktionen nicht nur theoretisch zu lernen, sondern auch anhand von praktischen Beispielen zu üben. Nur so kann man lernen, aus zunächst inkonsistenten Präferenzen durch Feedback zu einer eindeutigen Nutzenfunktion zu gelangen.

Bei der präskriptiven Anwendung der Erwartungsnutzentheorie wird die gleiche Vorgehensweise wie in anderen Bereichen der Entscheidungslehre gewählt: Vom Einfachen zum Komplexen. Die Präferenz des Entscheiders, das heißt die Nutzenfunktion, wird durch Beurteilung einfacher, riskanter Alternativen ermittelt. Ist die Präferenz durch die Nutzenfunktion abgebildet, kann sie dazu dienen, auch in komplexen Entscheidungssituationen die optimale Alternative zu berechnen.

Grundlage der meisten Verfahren zur Bestimmung von Nutzenfunktionen ist die sogenannte „Basis-Referenz-Lotterie“ (BRL) und deren Sicherheitsäquivalent SÄ*. Die Basis-Referenz-Lotterie ist in Abbildung 9-12 dargestellt.

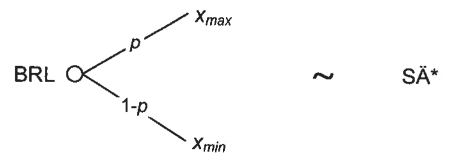


Abb. 9-12: Basis-Referenz-Lotterie und Sicherheitsäquivalent

Wir wollen zunächst annehmen, dass der Entscheider eine monotone Nutzenfunktion besitzt. Die BRL ist eine Lotterie mit den beiden Konsequenzen x_{max} und x_{min}, wobei die Größen x_{max} und x_{min} die maximal und minimal möglichen Ergebnisse in einer bestimmten Entscheidungssituation sind. Die Konsequenzen können mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. $1-p$ auftreten. Die Größe SÄ* aus dem Intervall $[x_{min}, x_{max}]$ ist das Sicherheitsäquivalent der Basis-Referenz-Lotterie. Der erwartete Nutzen der Basis-Referenz-Lotterie ist somit gleich dem Nutzen von SÄ*. Wir erhalten:

$$\mathrm{EU(BRL)} = p \cdot u(x_{max}) + (1-p) \cdot u(x_{min}) = u(\mathrm{SÄ}^*). \qquad (9.18)$$

Da die Nutzenfunktion intervallskaliert ist, können wir Nullpunkt und Einheit beliebig wählen. Wir setzen die Werte für $u(x_{min}) = 0$ und für $u(x_{max}) = 1$. Damit erhalten wir:

$$\mathrm{EU(BRL)} = p = u(\mathrm{SÄ}^*). \qquad (9.19)$$

Der erwartete Nutzen der Basis-Referenz-Lotterie und damit der Nutzen des Sicherheitsäquivalents ist gleich der Wahrscheinlichkeit p.

Beim Vergleich zwischen Basis-Referenz-Lotterie und Sicherheitsäquivalent sind vier Größen zu berücksichtigen: Die Wahrscheinlichkeit p, die beiden Konsequenzen x_{min} und x_{max} der Lotterie sowie das Sicherheitsäquivalent SÄ*. Die Methoden zur Bestimmung der Nutzenfunktion unterscheiden sich dadurch, welche dieser vier Größen gegeben sind und nach welcher dieser vier Größen gefragt wird. So kann beispielsweise die Lotterie vorgegeben und nach dem Sicherheitsäquivalent gefragt werden (*Certainty equivalent methods*). Es könnte auch das Sicherheitsäquivalent vorgegeben und nach der Wahrscheinlichkeit (*Probability equivalent methods*) oder den Konsequenzen gefragt werden.

Aus der Indifferenz zwischen Basis-Referenz-Lotterie und ihrem Sicherheitsäquivalent lässt sich stets ein weiterer Punkt $(\mathrm{SÄ}^*, u(\mathrm{SÄ}^*))$ auf der Nutzenfunktion gewinnen, weil von den drei in Gleichung (9.18) auftretenden Nutzenwerten $(u(x_{max}), u(x_{min})$ und $u(\mathrm{SÄ}^*))$ schon zwei bekannt sind $(u(x_{max})$ und $u(x_{min}))$ und sich der dritte dann bei gegebenem p einfach errechnen lässt. Diese Idee zur Gewinnung neuer Nutzen-Punkte ist natürlich nicht auf den Fall beschränkt, bei dem es sich bei den Ausprägungen mit schon bekannten Nutzenwerten um x_{max} und x_{min} handelt. Für eine beliebige Lotterie mit nur zwei Ausprägungen x_1 und x_2, wie sie in Abbildung 9-13 gezeigt wird, kann aus der Indifferenz

$$\mathrm{EU(RL)} = p \cdot u(x_1) + (1-p) \cdot u(x_2) = u(\mathrm{SÄ}^*). \qquad (9.20)$$

bei bekannten Nutzenwerten $u(x_1)$ und $u(x_2)$ auf den Nutzenwert $u(\mathrm{SÄ})$ geschlossen werden. Eine solche Lotterie wollen wir als Referenz-Lotterie bezeichnen. Es ist hier sogar eine Vorgehensweise denkbar, bei der $u(\mathrm{SÄ})$ und einer der Nutzenwerte $u(x_1)$ oder $u(x_2)$ der Referenz-Lotterie schon bekannt sind, und über die Indifferenz-Gleichung der fehlende Nutzenwert $(u(x_2)$ oder $u(x_1))$ ermittelt wird. Auch diese Möglichkeit, zusätzliche Nutzenwerte zu generieren, werden wir bei den folgenden Methoden verwenden.

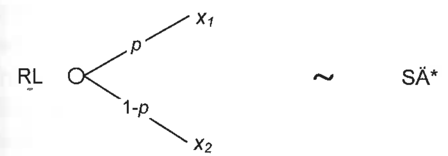


Abb. 9-13: Referenz-Lotterie und Sicherheitsäquivalent

Hat man Stützpunkte ermittelt, kann die Nutzenfunktion wieder völlig analog zur Wertfunktion ermittelt werden. Die Stützstellen werden linear interpoliert oder ein vorgegebener Funktionstyp wird angepasst.

Wir wollen im Weiteren fünf einfache Verfahren zur Bestimmung der Nutzenfunktion. Bei der Darstellung der Methoden werden wir annehmen, dass die Konsequenzen auf einer kontinuierlichen Skala gemessen werden. Erläuternde Beispiele werden anhand von €-Skalen durchgeführt. Kann die Methode auch für nichtkontinuierliche Skalen angewendet werden, wird dies am Ende der Darstellung der jeweiligen Methode diskutiert. Ist die Nutzenfunktion nichtmonoton, muss, wie schon in Kapitel 5.2.5 dargestellt, die Bestimmung für monotone Teilbereiche getrennt durchgeführt werden.

9.4.2 Mittelwert-Kettungs-Methode

Die Mittelwert-Kettung ist ein Verfahren, in dem der Entscheider Sicherheitsäquivalente von Lotterien bestimmen muss. Sie erinnert mit ihrer Vorgehensweise stark an die Halbierungsmethode, die Sie bei der Bestimmung eindimensionaler Wertfunktionen kennengelernt haben.

Im ersten Schritt wird dem Entscheider die Basis-Referenz-Lotterie $(x_{min}, 0{,}5; x_{max}, 0{,}5)$ vorgelegt. Das Sicherheitsäquivalent dieser Lotterie wird mit $x_{0,5}$ bezeichnet, und es gilt nach (9.19): $u(x_{0,5}) = 0{,}5$. In Abbildung 9-14 ist dieser erste Schritt unter a) dargestellt. Analog zur Vorgehensweise bei der Halbierungsmethode werden jetzt die Intervalle $[x_{min}, x_{0,5}]$ und $[x_{0,5}, x_{max}]$ nutzenmäßig „halbiert“. Dazu fragt man den Entscheider nach den Sicherheitsäquivalenten der in Abbildung 9-14 unter b) und c) angegebenen Referenz-Lotterien. Diese Sicherheitsäquivalente werden mit $x_{0,25}$ bzw. $x_{0,75}$ bezeichnet, und es gilt $u(x_{0,25}) = 0{,}25$ und $u(x_{0,75}) = 0{,}75$.

An die Ermittlung der Stützstellen für eine Nutzenfunktion muss sich, wiederum analog zur Vorgehensweise bei der Bestimmung von Wertfunktionen, eine

Konsistenzprüfung anschließen. Die einfachste Möglichkeit hierzu ist, den Entscheider nach dem Sicherheitsäquivalent der Lotterie $(x_{0,75}, 0{,}5; x_{0,25}, 0{,}5)$ zu fragen. Die durch diese Frage ermittelte nutzenmäßige Mitte des Intervalls $[x_{0,25}, x_{0,75}]$ muss bei konsistenter Beantwortung aller Fragen der Wert $x_{0,5}$ sein.

Bei dieser Methode ist positiv zu bewerten, dass alle Lotterien einfache 50/50-Wahrscheinlichkeiten aufweisen. Wie in vorherigen Kapiteln gezeigt, können Entscheider Wahrscheinlichkeiten nur schwer verarbeiten. Die bei dieser Methode auftretenden 50/50-Lotterien sind jedoch die einfachsten Lotterien und dem Entscheider durch Ereignisse wie Münzwurf usw. eingängig. Weiterhin ist die einfache Art der Konsistenzprüfung hervorzuheben. Zeigt die Befragung, dass noch weitere Werte ermittelt werden müssen, können die bisher bestimmten Intervalle oder eine Auswahl davon durch wiederum einfache 50/50-Lotterien nutzenmäßig halbiert werden. Die Methode hat den Nachteil, dass in eine Befragung Ergebnisse einer vorherigen Befragung eingehen. Hat sich ein Entscheider etwa bei der Angabe des Wertes $x_{0,5}$ vertan, setzt sich dieser Fehler in den weiteren Befragungsschritten fort. Bei mehrmaliger nutzenorientierter Halbierung eines Intervalls können sich systematische Verzerrungen wesentlich verstärken.

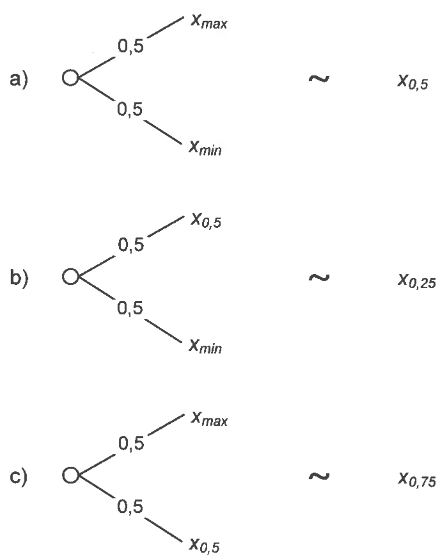


Abb. 9-14: RL der Mittelwert-Kettungs-Methode

Wir wollen die Methode an einem Beispiel erläutern. Ein Entscheider möchte seine Nutzenfunktion über dem Intervall [0€; 1.000€] bestimmen. Im ersten Schritt wird ihm die Lotterie (0€, 0,5; 1.000€, 0,5) vorgelegt. Der Entscheider sei risikoscheu und gibt als Sicherheitsäquivalent für diese Lotterie 400€ an. Im nächsten Schritt werden dem Entscheider die Lotterien (0€, 0,5; 400€, 0,5) und (400€, 0,5; 1.000€, 0,5) vorgelegt. Er bewertet diese Lotterien mit den Sicherheitsäquivalenten 180€ sowie 600€. In der Konsistenzprüfung wird er nach dem Sicherheitsäquivalent der Lotterie (180€, 0,5; 600€, 0,5) gefragt. Gibt er als Sicherheitsäquivalent nicht den Betrag 400€ an, so muss – wiederum völlig analog zur Ermittlung der Wertfunktion – diese Inkonsistenz beseitigt werden. Wie Sie aus Kapitel 5 wissen, kann die Inkonsistenz durch wiederholte Befragung beseitigt werden, durch Mittelwertbildung ignoriert werden oder, wie später noch ausführlicher erläutert werden wird, durch das Konzept der unvollständigen Information direkt abgebildet werden. Auch nach erfolgreicher Konsistenzprüfung geben die Aussagen des Entscheiders Anlass zum weiteren Nachfragen. Das Sicherheitsäquivalent von 400€ für die Lotterie (180€, 0,5; 600€, 0,5) impliziert für diesen Bereich Risikofreude. Es ist nun zu hinterfragen, inwieweit der Entscheider dies mit der anfangs geäußerten allgemeinen risikoscheuen Einstellung vereinbaren kann.

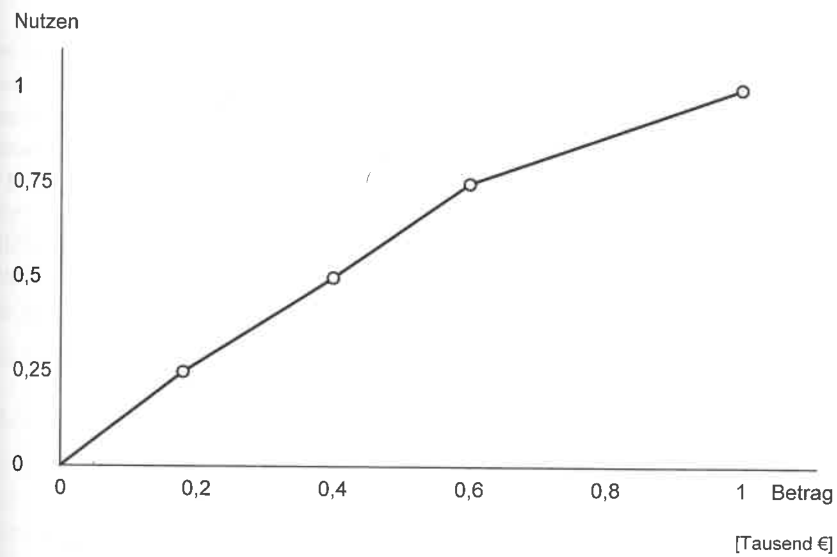


Abb. 9-15: Nutzenfunktion nach der Mittelwert-Kettungs-Methode

Die fünf ermittelten Punkte der Nutzenfunktion werden in ein Diagramm eingezeichnet und durch stückweise lineare Interpolation oder durch Anpassen eines vorgegebenen Kurventyps zur Nutzenfunktion verbunden. Abbildung 9-15 stellt das Ergebnis einer Befragung dar; sie zeigt die Nutzenfunktion eines risikoscheuen Entscheiders.

9.4.3 Fraktilmethode

Auch die Fraktilmethode stellt eine Sicherheitsäquivalentmethode dar. In ihr werden nur Basis-Referenz-Lotterien betrachtet: die Konsequenzen x_{min} und x_{max} bleiben unverändert und nur die Wahrscheinlichkeiten werden in jeder Frage geändert. Sollen beispielsweise durch Befragung vier Stützstellen der Nutzenfunktion gewonnen werden, so muss der Entscheider die Sicherheitsäquivalente der BRL für $p=0{,}8, 0{,}6, 0{,}4$ und 0,2 angeben. Für diese Methode sind die zu bewertenden Lotterien in Abbildung 9-16 dargestellt.

Die gewählten Wahrscheinlichkeiten in der BRL hängen von der Anzahl der gesuchten Stützstellen ab. Sie müssen auch nicht notwendigerweise wie in Abbildung 9-16 äquidistant sein. Hier kann der geübte Entscheider abhängig vom jeweiligen Entscheidungsproblem seinen Freiraum sinnvoll nutzen. Noch einfacher als bei der Mittelwert-Kettung lassen sich die Nutzen der Sicherheitsäquivalente bei der Fraktilmethode über Gleichung (9.19) direkt berechnen. Es gilt $u(x_{0,8})=0{,}8$ usw. Auch bei dieser Methode sollte – wie bei allen in diesem Buch beschriebenen Messmethoden – eine Konsistenzprüfung durchgeführt werden. Zur Konsistenzprüfung kann eine Kombination der Fraktilmethode mit anderen Methoden herangezogen werden. So könnte etwa die nutzenmäßige Mitte von Intervallen bestimmt werden, das heißt zum Beispiel die nutzenmäßige Mitte des Intervalls $[x_{0,4}, x_{0,8}]$.

Die Fraktilmethode besitzt sicherlich den Vorteil, dass die Konsequenzen während der ganzen Befragungsmethode konstant bleiben. Außerdem werden keine Aussagen von Befragungen als Grundlage für weitere Befragungsschritte herangezogen. Nachteilig ist jedoch, dass nicht nur 50/50-Lotterien betrachtet werden. Wenn auch in Abbildung 9-16 nur vier Wahrscheinlichkeiten auftreten, stellt die Methode doch an die Informationsverarbeitungskapazität des Entscheiders relativ hohe Anforderungen. Gerade wenn man die Verzerrungen in Wahrscheinlichkeitsurteilen kennt, die in Kapitel 7 schon angesprochen wurden und in Kapitel 13 noch ausführlicher diskutiert werden, darf man auf eine Konsistenzprüfung auch bei dieser Methode auf keinen Fall verzichten.

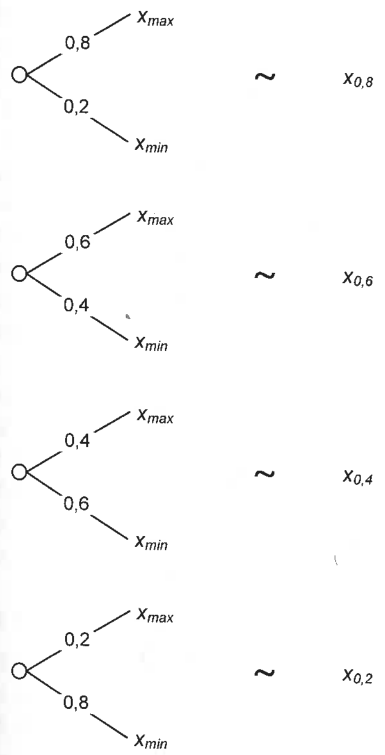


Abb. 9-16: BRL der Fraktilmethode

9.4.4 Methode variabler Wahrscheinlichkeiten

Als dritte Methode wollen wir die Methode variabler Wahrscheinlichkeiten, eine Wahrscheinlichkeitsäquivalent-Methode, vorstellen. Bei dieser Methode erhält der Entscheider die Konsequenzen der Basis-Referenz-Lotterie sowie das Sicherheitsäquivalent vorgegeben und muss die Wahrscheinlichkeit angeben, bei der er indifferent zwischen der Basis-Referenz-Lotterie und dem Sicherheitsäquivalent ist. Der Nutzen des Sicherheitsäquivalents ist gleich der erfragten Wahrscheinlichkeit. Als Sicherheitsäquivalente werden möglichst äquidistante Werte zwischen x_{min} und x_{max} vorgegeben. Möchte man drei Stützstellen durch Befragung ermitteln, können die in Abbildung 9-17 aufgeführten Paarvergleiche dem Entscheider vorgelegt werden.

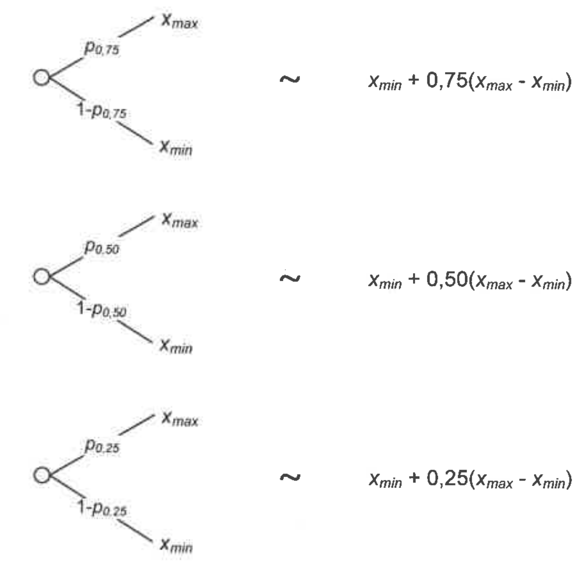


Abb. 9-17: BRL der Methode variabler Wahrscheinlichkeiten

Auch bei dieser Methode sollten wiederum Konsistenzprüfungen durchgeführt werden. Die Methode der variablen Wahrscheinlichkeiten wird oft als schwierig empfunden. Sind Entscheider mit dem Konzept der Wahrscheinlichkeit nicht hinlänglich vertraut, so werden sie Schwierigkeiten haben, Indifferenzwahrscheinlichkeiten anzugeben. Die Methode besitzt hingegen den Vorteil, dass keine Ergebnisse vorheriger Schritte in die neue Befragung eingehen. Darüber hinaus besteht ein ganz besonderer Vorteil der Methode darin, dass sie auch angewendet werden kann, wenn die Konsequenzen auf nicht-kontinuierlichen Skalen definiert sind. Bei den beiden zuerst vorgestellten Methoden kann es der Fall sein, dass die Skala, auf der die Konsequenzen gemessen werden, gerade für die vorgegebene Lotterie kein Sicherheitsäquivalent enthält. Betrachten Sie zum Beispiel das Dilemma eines Kaffeetrinkers, der seinen Kaffee nur mit (ganzen) Würfelzuckerstückchen süßen kann und im Bereich von null bis drei Stückchen mehr Zucker besser als weniger Zucker findet. Wollen Sie die Nutzenfunktion über die Anzahl der Würfelzuckerstückchen erstellen und legen Sie dem Entscheider die Lotterie (0 Stück, 0,5; 3 Stück, 0,5) vor (diese Lotterie besagt, dass Sie eine 50/50-Chance haben, eine Tasse Kaffee mit null oder drei Stückchen Zucker gesüßt zu bekommen), so würde einer der Autoren gerne die Zahl 1,3 als Sicherheitsäquivalent angeben, was aber nach der Definition der Skala nicht zulässig ist.

9.4.5 Methode gleicher Nutzendifferenzen

Eine weitere Methode, die Ihnen in ähnlicher Form schon von der Bestimmung von Wertfunktionen in Kapitel 5 (dort als Methode gleicher Wertdifferenzen bezeichnet) bekannt ist, stellt die Methode gleicher Nutzendifferenzen dar. Hier erzeugt der Entscheider über die Angabe von Sicherheitsäquivalenten eine aufsteigende Sequenz von Ausprägungen, die jeweils gleiche Nutzendifferenzen aufweisen.

Zunächst werden zwei Konsequenzen x_0 und x_1 gewählt, wobei $x_0 = x_{min}$ gilt und x_1 so gewählt wird, dass es ungefähr ein Fünftel der Länge des Intervalls $[x_{min}, x_{max}]$ von x_0 entfernt ist. Der Entscheider wird dann gebeten, eine Konsequenz x_2 anzugeben, die ihn indifferent zwischen der Lotterie $(x_2, 0{,}5; x_0, 0{,}5)$ und der sicheren Konsequenz x_1 macht. Es lässt sich dann aus dem Zusammenhang $u(x_1) = 0{,}5 \cdot u(x_2) + 0{,}5 \cdot u(x_0)$ folgern, dass $u(x_2) - u(x_1) = u(x_1) - u(x_0)$ gilt, dass die Nutzendifferenz zwischen x_2 und x_1 also genau der Differenz zwischen x_1 und x_0 entspricht. In gleicher Weise kann danach über die Indifferenz $x_2 \sim (x_3, 0{,}5; x_1, 0{,}5)$ die Ausprägung x_3 erfragt werden, die einen weiteren identischen Nutzenschritt über x_2 liegt (also $u(x_3) - u(x_2) = u(x_2) - u(x_1)$). Die Analogie zur Methode gleicher Wertdifferenzen in Kapitel 5 sollte Ihnen spätestens jetzt deutlich werden. Auch bei der Methode gleicher Nutzendifferenzen ist nicht davon auszugehen, dass die aufsteigende Sequenz an Ausprägungen letztendlich genau x_{max} trifft. Aber auch hier stellt dies kein Problem dar. Die abschließende Normierung der Nutzenfunktion erfolgt dann eben auf einem größeren Intervall, das x_{max} beinhaltet.

9.4.6 Die Trade-off-Methode für Nutzenfunktionen

Alle bisher vorgestellten Methoden zur Bestimmung von Nutzenfunktionen haben ein gemeinsames Problem. Sie gehen davon aus, dass der Entscheider bei den sehr einfachen Lotterien und Indifferenzabfragen Antworten generiert, die aus Sicht der Erwartungsnutzentheorie interpretiert werden können. Dass dies eine kritische Annahme ist und dass Entscheider oft auch schon bei einfachen Lotterievergleichen systematisch verzerrte Antworten geben, werden wir Ihnen in Kapitel 13 noch ausführlicher erläutern. An dieser Stelle möchten wir jedoch schon auf ein Problem hinweisen, das insbesondere für die bisher besprochenen Methoden bedeutsam ist. Beim intuitiven Entscheiden (so wie es bei der Angabe simpler Sicherheitsäquivalente gefragt ist) gehen Ausprägungen mit kleinen Wahrscheinlichkeiten deutlich stärker in die Bewertung einer Lotterie ein als dies durch die Vorschriften der Erwartungsnutzentheorie vorgeschrieben wäre. Auch andere Wahrscheinlichkeiten werden systematisch über- oder unterschätzt. Werden solche Verzerrungen bei der Bestimmung von Nutzenfunktionen ignoriert, erhalten wir systematisch verzerrte Nutzenfunktionen. Bleichrodt, Pinto und Wakker (2001) haben analysiert, wie solche Wahrscheinlichkeitsverzerrungen bei der Bestimmung von Nutzenfunktionen „herausgerechnet" werden können, um dadurch zu unverzerrten Nutzenfunktionen zu kommen. Die genaue Vorgehensweise hierbei geht über den Rahmen dieses Lehrbuchs hinaus, und wir verweisen den interessierten Leser auf die Originalliteratur.

Eine Alternative besteht darin, Methoden zu verwenden, bei denen diese Probleme erst gar nicht auftreten. Die von Wakker und Deneffe (1996) entwickelte Trade-off-Methode für Nutzenfunktionen (die außer dem Namen nichts mit der Trade-Off-Methode für Zielgewichte aus Kapitel 6 zu tun hat), stellt eine solche

Methode dar. Sie ist in der Anwendung etwas komplizierter als die bisher vorgestellten Methoden, vermeidet aber, dass verzerrt wahrgenommene Wahrscheinlichkeiten die elizitierte Nutzenfunktion systematisch verfälschen.

Die Idee der Trade-Off-Methode für Nutzenfunktionen ähnelt der Methode gleicher Nutzendifferenzen. Auch hier wird eine Sequenz von Ausprägungen erzeugt, zwischen denen gleiche Nutzendifferenzen bestehen. Während die Logik der Methode gleicher Nutzendifferenzen aber zusammenbricht, wenn die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$ bei den Lotterievergleichen systematisch falsch berücksichtigt wird (z. B. eher wie eine Wahrscheinlichkeit 0,4 behandelt wird), ist die Trade-Off-Methode gegen solche Verzerrungen immun.

Bei der Trade-Off-Methode sind zunächst zwei Konsequenzen x_a und x_b mit $x_a \succ x_b$ zu wählen, die aus konzeptionellen Gründen im Idealfall außerhalb des für das Entscheidungsproblem relevanten Ausprägungsintervalls $[x_{min}, x_{max}]$ liegen (diese Konsequenzen werden nur zu Vergleichszwecken benötigt; wir unterstellen hier, dass Sie kleiner als x_{min} sind).

Dann wird erneut $x_0 = x_{min}$ gesetzt und der Entscheider nach einem x_1 gefragt, das ihn indifferent macht zwischen den Lotterien $(x_0, p; x_a, 1-p)$ und $(x_1, p; x_b, 1-p)$. Am einfachsten für den Entscheider ist es sicherlich, wenn wir hier erneut mit einem p von 0,5 arbeiten, die Trade-Off-Methode funktioniert aber auch mit jedem anderen p. Wenn wir die gewonnene Indifferenzaussage in eine Gleichung übersetzen, und ein wenig umformen, erhalten wir: $u(x_1) - u(x_0) = p/(1-p) \cdot (u(x_a) - u(x_b))$. Die Nutzendifferenz zwischen x_1 und x_0 lässt sich also durch die Größe $p/(1-p) \cdot (u(x_a) - u(x_b))$ beschreiben, einen Wert, den wir nicht kennen und der vor allem auch durch eine verzerrte Wahrnehmung der Wahrscheinlichkeiten p und $(1-p)$ beeinflusst werden kann. Es ist aber auch gar nicht nötig, die explizite Höhe der Nutzendifferenz zu kennen. Denn durch die nächste Abfrage erhalten wir einen weiteren Zusammenhang gleicher Art. Wir bitten nun den Entscheider eine Konsequenz x_2 zu benennen, die ihn indifferent zwischen $(x_1, p; x_a, 1-p)$ und $(x_2, p; x_b, 1-p)$ macht. Aus dieser Indifferenz können wir herleiten, dass auch für x_2 und x_1 die Nutzendifferenz durch $u(x_2) - u(x_1) = p/(1-p) \cdot (u(x_a) - u(x_b))$ beschrieben wird und damit insbesondere auch $u(x_2) - u(x_1) = u(x_1) - u(x_0)$ gelten muss (und dies völlig unabhängig von der Frage, ob die Wahrscheinlichkeiten p und $(1-p)$ verzerrt wahrgenommen werden). Die weiteren Schritte sollten Ihnen nun klar sein; der Reihe nach erzeugen wir über Indifferenzen $(x_i, °p; x_a, 1-p) \sim (x_{i+1}, p; x_b, 1-p)$ eine Sequenz von Konsequenzen, die stets gleiche Nutzensprünge aufweist. Haben wir die ursprünglichen Ausprägungen x_a und x_b geeignet gewählt (je enger sie zusammen liegen, um so kleinere Schritte erhalten wir auch in der Sequenz), erreichen (oder überschreiten) wir wie bei der Methode gleicher Nutzendifferenzen auch mit der Trade-Off-Methode nach vier oder fünf solcher Schritte die Konsequenz x_{max}. Dann können wir in der bekannten Art und Weise eine Normierung der so gewonnenen Nutzenfunktion vornehmen.

Zur Verdeutlichung geben wir noch ein kleines Beispiel. Nehmen wir an, ein Entscheider möchte seine Nutzenfunktion auf dem folgenden Intervall bestimmen: $[x_{min} = 1.000\,€, x_{max} = 10.000\,€]$. Wir setzen $x_a = 100\,€$ und $x_b = 500\,€$, so dass diese

Konsequenzen außerhalb des zuvor spezifizierten Intervalls liegen. Die folgenden Schritte sind in Abbildung 9-18 ersichtlich. Im ersten Schritt fragen wir den Entscheider nach der Konsequenz x_1, die ihn indifferent zwischen den Lotterien $(1.000\,€, 30\,\%; 100\,€, 70\,\%)$ und $(x_1, 30\,\%; 500\,€, 70\,\%)$ macht. Wie bereits erwähnt fällt realen Entscheider eine Antwort auf diese Frage vermutlich leichter, wenn wir 50/50-Lotterien benutzen. Wir wählen hier jedoch aus didaktischen Gründen 30/70-Lotterien. Angenommen der Entscheider gibt als erfragten Wert $x_1 = 2.500\,€$ an. Wir fragen daraufhin in einem zweiten Schritt nach der Konsequenz x_2, die ihn indifferent zwischen den beiden Lotterien $(2.500\,€, 30\,\%; 100\,€, 70\,\%)$ und $(x_2, 30\,\%; 500\,€, 70\,\%)$ macht. Wir erhalten erneut einen Wert, beispielsweise $x_2 = 6.000\,€$, den wir für den nächsten Schritt einsetzen. Angenommen der Entscheider gibt für x_3 einen Wert von $11.000\,€$ an, so beenden wir die Befragung, da dieser Wert bereits $x_{max} = 10.000\,€$ übertroffen hat.

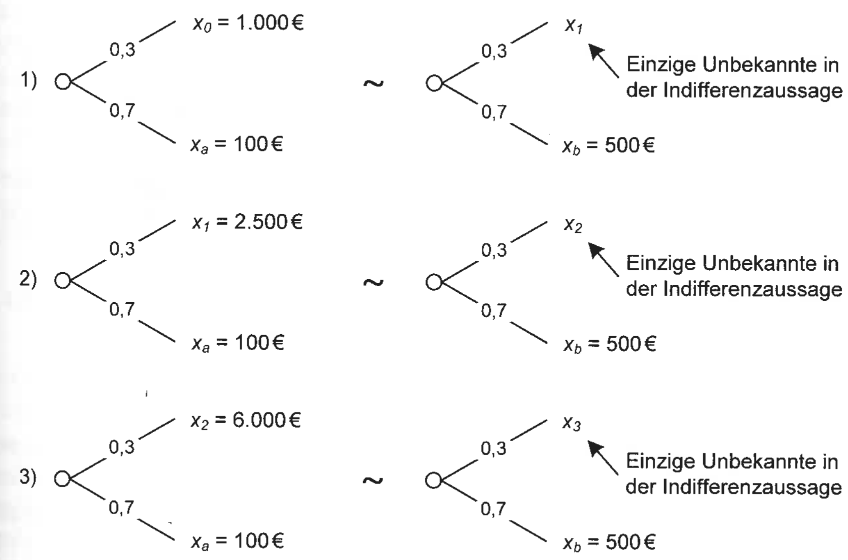


Abb. 9-18: Lotterieabfragen der Trade-Off-Methode

Die so erfragten Punkte der Nutzenfunktion des Entscheiders sind in Abbildung 9-19 abgetragen. Wir haben zum besseren Verständnis zwei Nutzenachsen (Ordinaten) eingezeichnet: links eine nicht normierte, auf beliebiger Skala gemessene Nutzenachse und rechts eine auf das Intervall $[x_{min} = 1.000\,€, x_3 = 11.000\,€]$ normierte Nutzenachse. Sie sehen auf der nicht normierten Nutzenachse, dass die hochskalierte Nutzendifferenz $(1-p)/p \cdot [u(x_b) - u(x_a)]$, welche durch die Nutzendifferenz $u(x_b) - u(x_a)$ und unsere Wahl der Lotteriewahrscheinlichkeit $p = 30\,\%$ entsteht, den Nutzenabstand zwischen allen drei elizitierten Werten $u(x_1)$, $u(x_2)$ und $u(x_3)$ bestimmt. Die Ihnen bereits bekannte Normierung führt dann zu den

Werten $u(x_1) = 1/3$, $u(x_2) = 2/3$ und $u(x_3) = 1$, wie sie auf der normierten Nutzenachse auf der rechten Seite abgetragen sind.

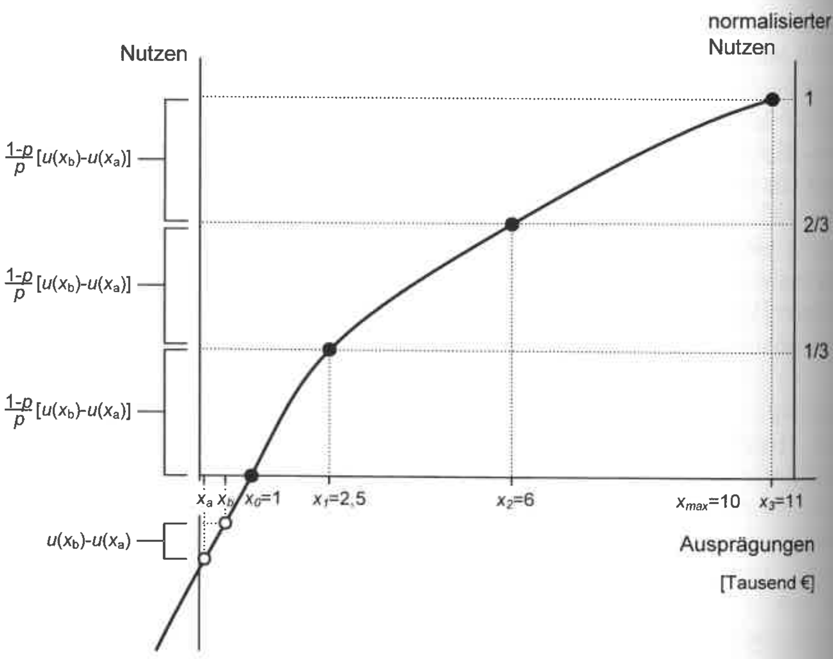


Abb. 9-19: Nutzenfunktion elizitiert nach der Trade-Off-Methode

9.4.7 Konsistenzüberprüfung

Nachdem wir die Methoden vorgestellt haben, müssten Sie diese anhand von praktischen Beispielen üben. Ihnen wird dabei auffallen, dass sich die Nutzenfunktion für dasselbe Entscheidungsproblem und denselben Entscheider in Abhängigkeit von der Bestimmungsmethode unterscheiden kann. Bedenkt man, dass es sich bei der Bestimmung von Nutzenfunktionen um das Messen von Präferenzen handelt und Messmethoden Fehler und systematische Verzerrungen verursachen können, werden Sie sich über die unterschiedlichen Nutzenfunktionen nicht wundern. Nicht nur innerhalb einer Methode können Inkonsistenzen auftreten, sondern genauso zwischen den Methoden. Bei bestimmten Methoden, insbesondere solchen, die etwa ausschließlich kleine Wahrscheinlichkeiten benutzen und nicht wie die Trade-Off-Methode spezielle Vorkehrungen getroffen haben, können sogar starke systematische Verzerrungen auftreten (Hershey, Kunreuther und Schoemaker 1982, Hershey und Schoemaker 1985). Damit diese Verzerrungen die abgeleitete Nutzenfunktion nicht systematisch verfälschen, sollten verschiedene Bestimmungsmethoden zum Einsatz kommen. Analog zur Vorgehensweise innerhalb jeder einzelnen Methode sollten dem Entscheider dann auch über die Methoden hinaus Inkonsistenzen zur Überprüfung vorgelegt oder diese durch Mitteln ausgeglichen werden. Alternativ kann auch mit dem Konzept der unvollständigen Information fortgefahren werden (vgl. Abschnitt 10.2.2). Dieses Feedback und die Befragung mit unterschiedlichen Methoden kann besonders gut mittels eines interaktiven Computerprogramms durchgeführt werden (von Nitzsch und Weber 1986).

Eine sorgfältige Bestimmung der Nutzenfunktion ist eine Kunst. Entscheider haben in aller Regel ihre Nutzenfunktion nicht abrufbereit im Kopf. Oft bilden sie ihre Präferenz erst während der Befragung. Die Art der Befragung kann daher leicht einen Einfluss auf die ermittelte Nutzenfunktion besitzen.

Für die präskriptive Anwendung der Nutzentheorie ist wichtig, dass die verhaltenswissenschaftlichen Probleme nicht zu einer Ablehnung der Theorie führen sollen. Sie zeigen vielmehr, dass Entscheider schon bei einfachen und erst recht bei komplexen Entscheidungssituationen Rationalitätsanforderungen nicht ohne Hilfe erfüllen können. Die deskriptiven Erkenntnisse zu systematischen Verzerrungen sind für die präskriptive Entscheidungsforschung sehr bedeutsam, da sie einen verstärkten Entscheidungshilfebedarf aufzeigen und die Notwendigkeit von Methoden zur Vermeidung derartiger Verzerrungen verdeutlichen. Die Entwicklung der Trade-Off-Methode für Nutzenfunktionen ist hierfür ein gutes Beispiel. Ohne deskriptive Erkenntnisse zur (verzerrten) Wahrnehmung von Wahrscheinlichkeiten wäre diese – zugegebenermaßen etwas kompliziertere – Methode sicherlich nicht entwickelt worden. Die etwas größere Komplexität macht sie jedoch durch die Immunität gegenüber Wahrscheinlichkeitsverzerrungen mehr als wett.

9.4.8 Bestimmung der Nutzenfunktion anhand der Risikoeinstellung des Entscheiders

Neben der direkten Befragung mit Hilfe von Referenz-Lotterien kann auch die Risikoeinstellung des Entscheiders berücksichtigt werden, um die Nutzenfunktion zu ermitteln. Wie schon zuvor abgeleitet, muss ein risikoscheuer Entscheider eine konkave Nutzenfunktion bzw. ein risikofreudiger Entscheider eine konvexe Nutzenfunktion haben. Weiß der Entscheider, dass er eine monoton steigende Nutzenfunktion besitzt und dass er risikoscheu ist, lässt sich der zulässige Bereich für die Nutzenfunktion schon durch eine einzige Frage stark einschränken. Abbildung 9-20 verdeutlicht die folgende Argumentation.

Wurde der Punkt $(x, u(x))$ durch Befragung des Entscheiders ermittelt, so kann eine monoton steigende, konkave Nutzenfunktion nur im schattierten Bereich verlaufen. Durch geschickte Wahl von wenigen Konsequenzen kann der zulässige Bereich der Nutzenfunktion aufgrund der generellen Aussage der Risikoaversion des Entscheiders zusätzlich stark eingeschränkt werden.

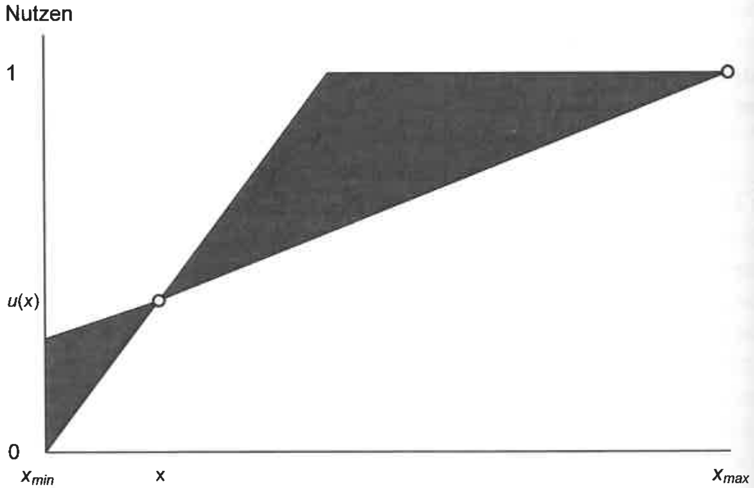


Abb. 9-20: Möglicher Bereich der Nutzenfunktion

Noch einfacher kann die Nutzenfunktion unter Umständen bestimmt werden, wenn genauere Aussagen über die Risikoeinstellung vorliegen. Im Abschnitt 9.3.4 haben wir die Konzepte der absoluten und relativen Risikoaversion kennengelernt und gleichzeitig gesehen, dass bestimmte Klassen von Nutzenfunktionen durch eine konstante (absolute bzw. relative) Risikoeinstellung gekennzeichnet sind. Weiß man vom Entscheider, dass er eine konstante Risikoeinstellung besitzt, so müssen nur noch die freien Parameter der entsprechenden Klasse von Nutzenfunktionen bestimmt werden. Wir wollen diese Vorgehensweise für den Fall konstanter absoluter und den Fall konstanter relativer Risikoeinstellung erläutern.

Betrachten wir zunächst den Fall konstanter absoluter Risikoaversion (CARA), in dem das Arrow-Prattsche Maß $r(x)$ konstant ist. Ob dies tatsächlich der Fall ist, können wir bspw. über das in 9.3.4 herausgestellte SÄ-Kriterium überprüfen. Addiert man zu jeder Konsequenz einer Lotterie eine Größe δ, so muss das Sicherheitsäquivalent der neuen Lotterie gleich SÄ + δ sein. Die Konstanz des Risikomaßes lässt sich durch Variation von δ für einige ausgewählte Lotterien durch direkte Bestimmung der Sicherheitsäquivalente relativ einfach überprüfen. Wie Sie aus Abschnitt 9.3.4 bereits wissen, ist die Nutzenfunktion eines Entscheiders bei konstanter absoluter Risikoaversion von der Form:

$$u(x) = \alpha + \beta e^{-cx} \quad \text{mit } c = r(x) > 0 \text{ und } \beta < 0\,. \tag{9.21}$$

Da α und β Skalierungskonstanten sind, die die Nutzenfunktion auf das Intervall [0; 1] skalieren, muss nur der Parameter $c = r(x)$, das konstante Arrow-Prattsche Risikomaß, bestimmt werden.

Dem Entscheider kann hierzu eine BRL vorgelegt werden, zu der er das Sicherheitsäquivalent zu bestimmen hat (oder, falls dieses gegeben ist, die fehlende Größe der BRL, die zu Indifferenz führt). Aus dieser Indifferenzaussage kann der Parameter c (= $r(x)$) abgeleitet werden.

Wir wollen Ihnen zwei Möglichkeiten zur Bestimmung des Parameters c vorstellen. Die erste erfordert die Angabe eines Sicherheitsäquivalents zu einer 50/50-Lotterie, die zweite, mathematisch einfachere Methode die etwas schwierigere Angabe einer Indifferenzwahrscheinlichkeit.

Nehmen wir im Rahmen der ersten Methode an, ein Entscheider besäße ein konstantes Arrow-Prattsches Risikomaß, und er hätte für die Lotterie (10 €, 0,5; 0 €, 0,5) das Sicherheitsäquivalent 3,80 € angegeben. Es gilt:

$$\begin{gathered}\text{EU(Lotterie)} = u(\text{SÄ}), \text{ das heißt}\\ 0{,}5(\alpha + \beta e^{-c\cdot 10}) + 0{,}5(\alpha + \beta e^{-c\cdot 0}) = \alpha + \beta e^{-c\cdot 3{,}8}.\end{gathered} \tag{9.22}$$

(9.22) ist äquivalent zu $0{,}5\,e^{-c\cdot 10} + 0{,}5 = e^{-c\cdot 3{,}8}$. Eine näherungsweise Lösung dieser Gleichung mit Methoden, die in Tabellenkalkulationsprogrammen enthalten sind, ergibt $c = 0{,}1$. Die Koeffizienten α und β kann man aus den beiden folgenden Gleichungen berechnen:

$$\begin{gathered}\alpha + \beta\, e^{-c\cdot 10} = 1\\ \alpha + \beta\, e^{-c\cdot 0} = 0.\end{gathered} \tag{9.23}$$

Wir erhalten $\alpha = 1{,}58$ und $\beta = -1{,}58$. Um die Rechnerei bei der Bestimmung des Parameters c zu vereinfachen, kann man sich auch eine Tabelle erstellen, die den Wert von c in Abhängigkeit von der Risikoprämie angibt. Für die obige Lotterie gilt:

$$\begin{aligned}\text{RP} = 0{,}62 &\Rightarrow c = r(x) = 0{,}05\\ \text{RP} = 1{,}2 &\Rightarrow c = r(x) = 0{,}1\\ \text{RP} = 2{,}15 &\Rightarrow c = r(x) = 0{,}2\\ \text{RP} = 3{,}63 &\Rightarrow c = r(x) = 0{,}5\\ \text{RP} = 4{,}31 &\Rightarrow c = r(x) = 1.\end{aligned}$$

Bei der zweiten Methode zur Bestimmung von c geht man anstelle von (9.21) direkt von der normierten Form der exponentiellen Nutzenfunktion aus:

$$u(x) = \frac{1 - e^{-c\frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}}}{1 - e^{-c}}. \tag{9.24}$$

Dem Entscheider wird dann die BRL($x_{min}, p; x_{max}, 1-p$) vorgelegt und er wird gefragt, bei welcher Wahrscheinlichkeit p er indifferent zwischen der BRL und der sicheren Konsequenz $x = 0{,}5 \cdot (x_{min} + x_{max})$ ist. Aus der Indifferenzwahrscheinlichkeit lässt sich die gesuchte Konstante c der Nutzenfunktion direkt ableiten. Es gilt:

$$c = 2 \cdot \ln(\frac{1}{p} - 1). \tag{9.25}$$

Ist nicht die absolute Risikoeinstellung, sondern die relative Risikoeinstellung $r^*(x) = x \cdot r(x)$ konstant, so kann die Nutzenfunktion in analoger Weise ermittelt werden. Welche Formen eine CRRA-Nutzenfunktion annehmen kann, ist Ihnen aus Abschnitt 9.3.4 (Gleichung (9.16)) schon bekannt.

Auch wenn die Funktion etwas komplizierter aussieht, muss doch nur die konstante Größe $c = x \cdot r(x)$ wie im Fall konstanter absoluter Risikoaversion durch eine Indifferenzaussage ermittelt werden. Ein Überblick über weitere Zusammenhänge zwischen Risikoeinstellung und Form der Nutzenfunktion findet sich in Harvey (1981).

9.5 Berechnung der optimalen Alternative

Nachdem die Nutzenfunktion bestimmt wurde, lassen sich für ein gegebenes Entscheidungsproblem die Alternativen ordnen. Damit kann natürlich auch die optimale Alternative bestimmt werden. Die Art der Bestimmung ist abhängig von der gewählten Darstellungsform der Alternativen.

Sind die Alternativen in Form einer Entscheidungsmatrix oder in der Lotteriedarstellung gegeben, so lässt sich der erwartete Nutzen der Alternative einfach berechnen. Der erwartete Nutzen ist gleich der Summe aus den Produkten der Nutzen der Konsequenzen und der Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Konsequenzen. Als Erinnerung sei die Formel (9.3) noch einmal aufgeführt.

$$\mathrm{EU}(a) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(a_i) \qquad (9.26)$$

Diese Darstellungsform setzt eine einstufige Entscheidungssituation und eine endliche Anzahl von Konsequenzen voraus. Ein Beispiel aus Kapitel 2 soll diesen Fall erläutern. Die Entscheidungsmatrix in Tabelle 9-3 enthält Gewinne in 1.000€.

Tabelle 9-3: Entscheidungsmatrix mit in 1.000€ bewerteten Konsequenzen

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$p(s_i)$	0,10	0,15	0,15	0,30	0,20	0,10
a	0	15	15	15	15	15
b	–20	–5	10	25	25	25
c	–40	–25	–10	5	20	35

Nachdem die Konsequenzen mit der Nutzenfunktion

$$u(x) = 1{,}287 - 0{,}578 \cdot e^{-0{,}02x} \qquad (9.27)$$

bewertet wurden (wir betrachten einen Entscheider mit konstanter absoluter Risikoaversion vom Grad $c = 0{,}02$), ergibt sich eine Entscheidungsmatrix wie in Tabelle 9-4.

Tabelle 9-4: Entscheidungsmatrix mit in Nutzen bewerteten Konsequenzen

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$p(s_i)$	0,10	0,15	0,15	0,30	0,20	0,10
a	0,71	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86
b	0,43	0,65	0,81	0,94	0,94	0,94
c	0,00	0,33	0,58	0,76	0,90	1,00

Die Erwartungsnutzen der Alternativen betragen:

$$\mathrm{EU}(a) = 0{,}845$$
$$\mathrm{EU}(b) = 0{,}825$$
$$\mathrm{EU}(c) = 0{,}645.$$

Ein rationaler Entscheider würde die Alternative a wählen.

Unendliche Konsequenzenmengen, wie sie zum Beispiel durch Normalverteilungen definiert werden, sind in vielen Anwendungsfällen verbreitet. Die Kapitalmarkttheorie setzt in aller Regel voraus, dass die Rendite einer Aktie normalverteilt ist. Im Falle stetiger Verteilungen lässt sich der Erwartungsnutzen einer Lotterie in der Form

$$EU(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) f(x) dx \qquad (9.28)$$

schreiben, wobei $u(x)$ die Nutzenfunktion und $f(x)$ die Dichtefunktion der Verteilung der Konsequenzen der Alternative a repräsentiert. Bei stetigen Verteilungen kann der Erwartungsnutzen bei stückweise linearer Nutzenfunktion in der Regel einfach berechnet werden. Oft ist die Berechnung auch einfach möglich, falls die funktionale Form der Nutzenfunktion sowie die Dichtefunktion gegeben sind. In der Literatur können Tabellen gefunden werden, die den erwarteten Nutzen für bestimmte Typen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und bestimmte Formen der Nutzenfunktion angeben. Relativ einfache Erwartungsnutzenformeln ergeben sich für die exponentielle Nutzenfunktion (Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion, vgl. Keeney und Raiffa 1976, S. 202). Besonders einfach lässt sich das Sicherheitsäquivalent ermitteln (und damit auch der erwartete Nutzen), wenn die Konsequenzen normalverteilt sind und der Entscheider eine exponentielle Nutzenfunktion mit Risikoeinstellungsparameter c besitzt. Man spricht hier auch vom sogenannten „Hybrid-Ansatz“ (Bamberg 1986). In diesem Fall gilt:

$$\mathrm{SÄ}(a) = u^{-1}(\mathrm{EU}(a)) = \mathrm{EW}(a) - 1/2 \cdot c \cdot \mathrm{Var}(a). \qquad (9.29)$$

Bei einem mehrstufigen Modell, wie es durch einen Entscheidungsbaum dargestellt werden kann, muss es Ziel der Überlegungen sein, die optimale mehrstufige Alternative (= Strategie) zu finden. Im Falle mehrstufiger Entscheidungsprobleme haben wir zwei Darstellungsformen unterschieden. Sind die Strategien in Form einer Entscheidungsmatrix gegeben, ist die Bestimmung der optimalen Strategie äquivalent zur Bestimmung der optimalen Alternative im einstufigen Modell. Wie auch im obigen Beispiel verdeutlicht, berechnet man den erwarteten Nutzen der einzelnen Strategien und kann damit die Strategien ordnen und die optimale Strategie auswählen. Wir haben jedoch zuvor gesehen, dass es wünschenswert sein kann, das mehrstufige Entscheidungsproblem in Form eines Entscheidungsbaumes darzustellen.

Im Entscheidungsbaum kann die Strategie mit dem maximalen Erwartungsnutzen durch das „*Roll-back*-Verfahren" ermittelt werden. Dabei wird wie folgt vorgegangen:

1. Zunächst werden die Konsequenzen mittels der Nutzenfunktion bewertet.
2. Von den Konsequenzen ausgehend begibt man sich zum nächsten vorgelagerten Entscheidungspunkt.
3. Hier wird dann der Erwartungsnutzen aller an diesem Entscheidungspunkt gegebenen Alternativen berechnet. Die Alternative mit dem höchsten Erwartungsnutzen wird ermittelt und alle anderen gestrichen.
4. Nachdem alle Entscheidungspunkte der letzten Stufe auf diese Weise bearbeitet wurden, verfährt man auf der vorletzten Stufe genauso. Am ersten Entscheidungspunkt angelangt, steht dann die optimale Strategie mit dem höchsten Erwartungsnutzen fest.

Das *Roll-back*-Verfahren soll an einem Beispiel erläutert werden. Wir greifen dazu auf das in der Literatur weit verbreitete Ölbohr-Problem zurück. Es ist zu entscheiden, ob vor einer Ölbohrung ein seismischer Test durchgeführt werden soll, ob direkt gebohrt oder ob entschieden werden soll, nicht zu bohren. Abbildung 9-21 stellt den Entscheidungsbaum für dieses Problem dar, wobei die Konsequenzen sowohl in 1.000€ als auch in Nutzenwerten angegeben sind, die sich aus einer angenommenen Nutzenfunktion ergeben. Diese Nutzenfunktion ist über dem Intervall [−130.000€;270.000€] definiert.

Im *Roll-back*-Verfahren müssen die Konsequenzen rückwärtsgehend betrachtet werden, bis ein Entscheidungspunkt erreicht wird. Wir beginnen mit dem Entscheidungspunkt, zu dem man gelangt, wenn ein Test durchgeführt wurde und das Testergebnis günstig ist. Wird jetzt nicht gebohrt, ist ein Nutzen von 0,641 sicher; er entspricht dem Verlust von 30.000€ wegen der Testkosten. Die Alternative „Bohren" hat einen erwarteten Nutzen von $0{,}85 \cdot 0{,}995 + 0{,}15 \cdot 0 = 0{,}846$. Die Alternative „Bohren" mit dem höheren Erwartungswert wird gewählt und die Alternative „Nichtbohren", wie in Abbildung 9-21 dargestellt, gestrichen. Auf diese Weise wird der gesamte Entscheidungsbaum rücklaufend abgearbeitet. Zuvor gestrichene Alternativen werden dabei als nicht mehr existent betrachtet, so als wäre an der entsprechenden Stelle im Baum gar keine Entscheidung mehr zu fällen. Die Zahlen in den Kästchen bedeuten Nutzenerwartungswerte. Es zeigt sich, dass die Strategie „Seismischer Test, bei günstigem Ergebnis bohren, bei ungünstigem Ergebnis nicht bohren" den höchsten Nutzenerwartungswert mit 0,764 besitzt, gefolgt von der Strategie „Nicht bohren" mit 0,738.

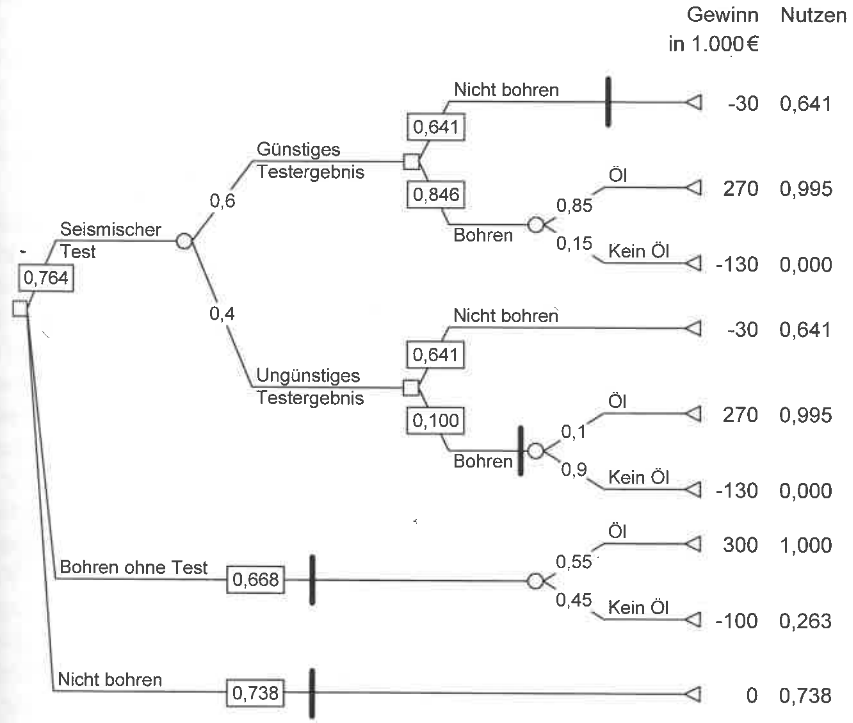


Abb. 9-21: Entscheidungsbaum für das Ölbohr-Problem

Das *Roll-back*-Verfahren kann nicht für jede beliebige Präferenztheorie durchgeführt werden. Es lässt sich jedoch für die Erwartungsnutzentheorie zeigen, dass das Wegstreichen von Alternativen mit geringerem Erwartungsnutzen das Gesamtoptimum nicht verfälscht. Diese Eigenschaft in der Nutzentheorie basiert ganz wesentlich auf der Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms. Könnten Wahrscheinlichkeiten nicht multipliziert werden (*Reduction of compound lotteries axiom*) oder könnten irrelevante Zweige des Entscheidungsbaums nicht vernachlässigt werden (Unabhängigkeitsaxiom), wäre das *Roll-back*-Verfahren unzulässig.[2]

Beim *Roll-back*-Verfahren wird nur die optimale Strategie im Sinne des maximalen Erwartungsnutzens ermittelt. Über alle anderen möglichen Strategien erhält der Entscheider keine Information. Möchte man im Sinne einer im nächsten Kapitel angesprochenen Sensitivitätsanalyse eine zweitbeste Strategie mit der besten vergleichen, kann das *Roll-back*-Verfahren nicht als geeignetes Auswahlverfahren dienen. Alle zu betrachtenden Strategien wären in diesem Fall im Rahmen einer

[2] Als ein Beispiel für einen in dieser Hinsicht problematischen Entscheidungs-Kalkül lässt sich der Kosten-Nutzwert-Quotient nennen (vgl. hierzu Fallstudie E in Eisenführ, Langer und Weber 2001).

Entscheidungsmatrix zu präsentieren und mit dem Erwartungsnutzenkriterium zu bewerten.

9.6 Nutzentheorie und Risiko

9.6.1 Zusammenhang zwischen Wert- und Nutzenfunktion

Können wir jetzt anhand der Nutzenfunktion, etwa mit Hilfe des Risikoeinstellungsmaßes von Arrow und Pratt, das Risikoverhalten von Entscheidern wirklich charakterisieren? Leider ist die Bezeichnung „risikoscheu" nicht eindeutig, d.h. sie besagt nicht notwendigerweise, dass ein Entscheider das „Risiko scheut". Der Grund für den konkaven Verlauf der Nutzenfunktion kann darin liegen, dass der Entscheider aus steigenden sicheren Werten der Zielgröße nur einen abnehmenden Grenzwert im Sinne einer Wertfunktion erzielt. Dann hätte auch seine Wertfunktion über diese Zielgröße einen konkaven Verlauf. Andererseits kann die Konkavität der Nutzenfunktion aber auch tatsächlich in der Scheu des Entscheiders vor Risikosituationen begründet sein. Eine konkrete Aussage über die Risikoeinstellung ließe sich erst treffen, wenn die Risikoeinstellung relativ zur Wertfunktion gemessen würde. Nehmen Sie an, dass der folgende Zusammenhang zwischen der Wert- und der Nutzenfunktion eines Entscheiders gilt: $u(x)=f(v(x))$. Aus einer Gegenüberstellung der Krümmung der Nutzenfunktion und der Wertfunktion für diesen Entscheider könnten Aussagen über das relative Risikoverhalten abgeleitet werden (und „relativ" bezieht sich hier auf „relativ zur Wertfunktion" und nicht wie bei der relativen Arrow-Pratt-Risikoeinstellung auf „relativ zum Vermögen"). Betrachten wir also das Risikoverhalten eines Entscheiders relativ zur Wertfunktion, wollen wir im Weiteren von seiner *intrinsischen* Risikoeinstellung sprechen. Ein Beispiel soll zur Erläuterung dienen (in Anlehnung an Dyer und Sarin 1982).

Nehmen Sie an, Sie sind indifferent zwischen zwei Orangen und der Lotterie (0 Orangen, 0,5; 8 Orangen, 0,5), und Ihre Nutzenfunktion über dem Intervall [0 Orangen, 8 Orangen] ist monoton steigend. Sie würden als risikoscheu klassifiziert, da ihr Sicherheitsäquivalent kleiner als der Erwartungswert der Lotterie ist.

Nehmen wir nun zunächst an, dass Sie indifferent sind zwischen den sicheren Übergängen (0 Orangen → 2 Orangen) und (2 Orangen → 8 Orangen). In diesem Fall kann die Risikoprämie durch die Wertfunktion erklärt werden: Messbare Wertfunktion und Nutzenfunktion sind für die betrachteten Punkte identisch. Relativ zur Wertfunktion sind Sie risikoneutral, d. h. Sie sind intrinsisch risikoneutral.

Nehmen wir aber alternativ an, dass Sie eine lineare Wertfunktion über dem Intervall [0 Orangen, 8 Orangen] besitzen, das heißt Sie sind indifferent zwischen (0 Orangen → 4 Orangen) und (4 Orangen → 8 Orangen). In diesem Fall kann die Risikoscheu nicht durch die Wertfunktion erklärt werden. Die Nutzenfunktion ist „konkaver" als die Wertfunktion, das heißt Sie sind intrinsisch risikoscheu. Dieser Fall ist in Abbildung 9-22 noch einmal verdeutlicht.

Auf Arbeiten, die die intrinsische Risikoeinstellung von Entscheidern theoretisch untersuchen, wollen wir nur hinweisen (Krelle und Coenen 1968, Dyer und

Sarin 1982, Sarin 1982, Wilhelm 1986, Kürsten 1992a und 1992b). Erwähnt sei die Arbeit von Smidts (1997), der Nutzen- und Wertfunktionen von über 200 holländischen Farmern empirisch ermittelt. Er kann zeigen, dass sich diese Funktionen signifikant voneinander unterscheiden und dass der Zusammenhang zwischen beiden Funktionen am besten durch eine exponentielle Funktion beschrieben werden kann.

Die Tatsache, dass Risiko- und Wertvorstellungen im Nutzenkalkül untrennbar miteinander verwoben sind, hat speziell in der deutschen Literatur große Verunsicherung hervorgerufen. Wir sehen an dieser Stelle keine Notwendigkeit, die Diskussion aufzugreifen. Die aufgeworfenen Fragen sind in den soeben zitierten Arbeiten klar beantwortet worden. Eine schöne, abschließende Betrachtung findet sich bei Bamberg, Coenenberg und Krapp (2008) und Dyckhoff (1993).

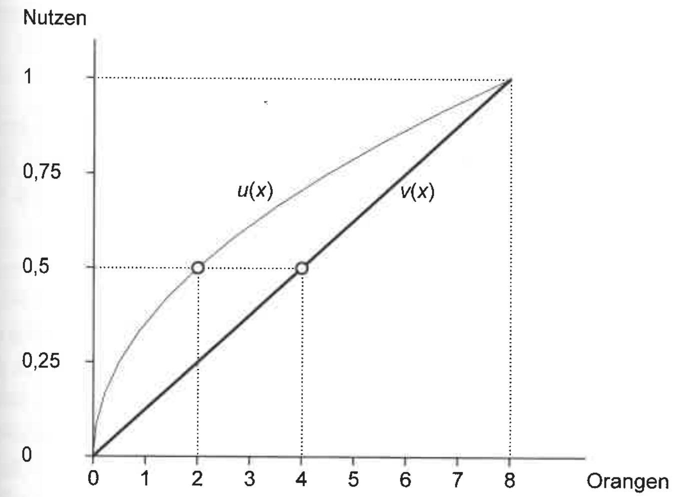


Abb. 9-22: Nutzen- und Wertfunktion bei intrinsischer Risikoscheu

9.6.2 Risikodefinition bei gleichem Erwartungswert von Lotterien

Bisher sind wir dem Ziel, etwas über das Risiko einer Lotterie zu erfahren, nur einen kleinen Schritt näher gekommen. Rothschild und Stiglitz (1970) vereinfachen die Problemstellung dadurch, dass sie nur Lotterien mit identischem Erwartungswert betrachten.

Sie geben drei alternative Definitionen für die Relation „Lotterie a ist riskanter als Lotterie b" an. Sie beweisen die Äquivalenz der Definitionen, die damit wahlweise verwendet werden können. Die Definitionen lauten: Eine Lotterie a ist riskanter als eine Lotterie b genau dann, wenn

1. jeder im Sinne der Nutzentheorie risikoscheue Entscheider b gegenüber a bevorzugt,
2. a aus b gewonnen werden kann, indem zu jeder möglichen Ausprägung von b eine Zufallsvariable mit Erwartungswert null addiert wird,

3. a aus b durch *Mean preserving spread* gewonnen wurde. Bei einem *Mean preserving spread* werden aus der Mitte der Verteilung von b Elemente herausgenommen und an den Rand der Verteilung transformiert, ohne dass durch diese Transformation der Erwartungswert geändert wird.

Die durch die drei äquivalenten Definitionen gewonnene Relation „Lotterie a ist riskanter als Lotterie b" ist stark an die Nutzentheorie angelehnt. Die Relation ist nicht gleichbedeutend mit der Aussage „a hat eine größere Varianz als b". Varianz ist im Sinne der Erwartungsnutzentheorie kein Maß für das Risiko einer Lotterie. Oder etwas formaler ausgedrückt, die Risikoprämie ist eben nur ungefähr gleich der halben Varianz multipliziert mit dem Arrow-Prattschen Risikomaß.

Nehmen Sie zum Beispiel die drei Lotterien

$$a = (30\,€, 0{,}5; 10\,€, 0{,}5)$$

$$b = (25\,€, 0{,}8; 0\,€, 0{,}2)$$

$$c = (40\,€, 0{,}2; 15\,€, 0{,}8).$$

Alle Lotterien haben sowohl identischen Erwartungswert (20 €) als auch identische Varianz (100 €^{2}). Trotzdem sollte ein risikoscheuer Entscheider, dessen Präferenz zum Beispiel durch die Nutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-0{,}1x}$ abgebildet wird, die folgende Präferenz besitzen: $c \succ a \succ b$.

9.6.3 Nutzen – eine Funktion von Wert und Risiko?

Wir wollen weiter versuchen, die Frage zu beantworten, was unter dem Risiko einer Lotterie verstanden werden kann. Im Hintergrund dieser Frage steht auch die Suche nach der Möglichkeit, den erwarteten Nutzen einer Lotterie als Funktion des Erwartungswerts und des Risikos der Lotterie zu verstehen. Im alltäglichen Sprachgebrauch werden Alternativen oft dadurch beurteilt, dass man das Risiko als das „Schlechte" und den Erwartungswert als das „Gute" der Alternativen miteinander vergleicht. Man spricht etwa davon, dass der erwartete Gewinn zu gering für das bei einer Anlage zu tragende Risiko ist. Der theoretisch korrekte Erwartungsnutzen wird (sehr) selten zur Argumentation verwendet. Es ist daher wichtig, den Zusammenhang zwischen Kalkülen, die auf Erwartungswert und Risiko basieren, und der Nutzentheorie zu verstehen. Zwei Vorgehensweisen zur Analyse des Zusammenhangs können unterschieden werden (vgl. ausführlicher zu den Vorgehensweisen und zu diesem Abschnitt Sarin und Weber 1993).

Eine Möglichkeit besteht darin, Risiko und Wert von Lotterien getrennt zu ermitteln und Präferenzurteile aus beiden Komponenten zusammenzusetzen. Der Entscheider wird *direkt* nach Risiko und Werteinschätzungen gefragt. Dabei benötigt man keine Definition von Risiko und Wert – lediglich die Wahrnehmung des Entscheiders bezüglich Risiko und Wert ist von Interesse. Erfüllen die Ordnung der Lotterien bezüglich des Risikos und die Ordnung bezüglich des Wertes einige allgemeine Eigenschaften, können diese Ordnungen durch eine Risikofunktion beziehungsweise durch eine Wertfunktion abgebildet werden. Voraussetzung für diese Vorgehensweise ist, dass der Entscheider Lotterien bezüglich Risiko und bezüglich Wert tatsächlich ordnen kann. Empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Voraussetzung erfüllt ist (vgl. beispielsweise Keller, Sarin und Weber 1986 oder die Übersicht zur Risikowahrnehmung bei Weber 1990). Auch allgemeinere Risikoaussagen über das Risiko von Kernkraft, Fliegen usw. sind reliabel zu messen (vgl. Slovic 1987). Burgemeister und Weber (1993) untersuchten, wie Befragte das Risiko neuer Technologien wahrnehmen, und fanden auch hier, dass Entscheider Risikoeinschätzungen abgeben können. Einen Überblick über Ansätze zur Risikomessung finden Sie in Brachinger und Weber (1997). Die hier diskutierte Ableitung der Präferenz besitzt den Nachteil, dass die aus Risiko- und Werturteilen zusammengesetzte Präferenz nicht notwendigerweise die Rationalitätspostulate der Nutzentheorie erfüllt. Für deskriptive Zwecke können zwar interessante Einsichten gewonnen werden, vom präskriptiven Standpunkt und auf dem Boden der Nutzentheorie stehend, kann diese Vorgehensweise jedoch (noch?) nicht überzeugen.

Die *zweite* Möglichkeit besteht darin, zum Nutzen einer Lotterie ein äquivalentes Präferenzfunktional zu bilden, das den Erwartungswert und eine zweite Größe, die in der Regel als Risiko der Lotterie definiert wird, verknüpft. Hier bildet die Präferenz, abgebildet durch den Nutzen der Lotterie, die Ausgangsgröße. Die Präferenz wird in zwei Komponenten (Erwartungswert und Risiko) zerlegt.

Wir betrachten im Folgenden nur den für die Ökonomie besonders wichtigen Spezialfall, bei dem der erwartete Nutzen einer Lotterie a in ein auf Erwartungswert und Varianz aufbauendes Präferenzfunktional zerlegt wird (Jia und Dyer 1996 bieten aber auch einen allgemeineren Ansatz).

Damit die Rationalität des Präferenzfunktionals gewährleistet ist, muss gelten:

$$\mathrm{EU}(a) = f(\mathrm{EW}(a), \mathrm{Var}(a)). \qquad (9.30)$$

Riskante Alternativen werden in vielen Bereichen der Betriebswirtschaftslehre durch Erwartungswert und Varianz abgebildet. Die moderne Kapitalmarkttheorie baut darauf auf, Marketingstrategien werden dadurch charakterisiert, und auch in der strategischen Planung hat dieser Ansatz Beachtung gefunden. Die Erwartungswert-Varianz-Regel wird auch als (μ,σ)-Regel bezeichnet. Aufgrund der beiden Dimensionen Erwartungswert und Varianz bzw. Erwartungswert und Standardabweichung kann eine Alternative in einem zweidimensionalen Diagramm repräsentiert werden.

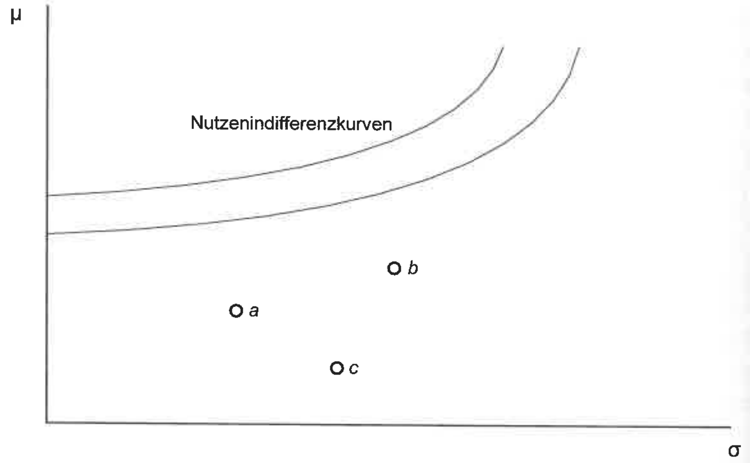


Abb. 9-23: (μ,σ)-Diagramm

In Abbildung 9-23 sind drei Alternativen a, b, c eingezeichnet. Alternative c ist für risikoscheue Entscheider dominiert, da sie ein gegenüber a höheres Risiko und einen niedrigeren Erwartungswert aufweist. Man spricht hier von (μ,σ)-Dominanz. Ist ein Entscheider risikoscheu im Arrow-Prattschen Sinne, besitzt er eine konkave Nutzenfunktion. Die Nutzen*indifferenz*kurven im (μ,σ)-Diagramm sind für risikoscheue Entscheider jedoch wie in Abbildung 9-23 dargestellt konvex. Ein höheres Risiko, gemessen durch eine höhere Varianz oder Standardabweichung, erfordert einen höheren Erwartungswert, um denselben Nutzen zu erhalten. Ein risikoneutraler oder schwach risikoscheuer wird in Abbildung 9-23 Alternative b wählen, ein stärker risikoscheuer Entscheider wird a gegenüber b bevorzugen.

Wir wollen im Folgenden diskutieren, wann eine Zerlegung des Erwartungsnutzens einer Lotterie in Erwartungswert und Varianz möglich ist. Es muss eine bestimmte Klasse von Nutzenfunktionen oder ein bestimmter Verteilungstyp der Konsequenzen vorliegen (Schneeweiß 1967).

Für den Spezialfall quadratischer Nutzenfunktionen kann der erwartete Nutzen einer Lotterie als Funktion von Erwartungswert und Varianz der Lotterie geschrieben werden. Es gilt:

$$\mathrm{EU}(a) = \mathrm{EW}(a) - \alpha[\mathrm{EW}(a)^2 + \mathrm{Var}(a)], \quad \alpha > 0. \tag{9.31}$$

Die hierzu passenden quadratischen Nutzenfunktionen lauten:

$$u(x) = x - \alpha x^2. \tag{9.32}$$

Die Funktionen sind im Intervall $[x_{min}, 1/2\alpha]$ monoton steigend.

Um die Äquivalenz zwischen Erwartungsnutzentheorie und Erwartungswert-Varianz-Ansatz herzustellen, kann auch die Menge der zulässigen Lotterien, das heißt die Menge der zulässigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Konsequenzen eingeschränkt werden. Für den Fall, dass die Konsequenzen normalverteilt sind, kann gezeigt werden, dass der Erwartungsnutzen der Lotterie zu einer Präferenzfunktion, die auf Erwartungswert und Varianz basiert, äquivalent ist.

Natürlich können Nutzenfunktion und Verteilung auch gleichzeitig eingeschränkt werden; das haben Sie in Kapitel 9.5 schon in Form des Hybrid-Ansatzes kennengelernt.

Die Bedingungen für die Zerlegbarkeit des Erwartungsnutzens in Erwartungswert und Varianz sind nur in wenigen Fällen erfüllt. Seien Sie daher vorsichtig, wenn Sie im Laufe Ihres Studiums mit Erwartungswert-Varianz-Regeln konfrontiert werden. Wie schon in Abschnitt 9.3.4 erläutert, besitzt die quadratische Nutzenfunktion die unerwünschte Eigenschaft, dass sowohl absolute wie auch relative Risikoeinstellung bei steigendem Vermögen zunehmen. Desweiteren lassen die in diesem Buch betrachteten diskreten und die in vielen realen Entscheidungssituationen vorherrschenden Zustandsmengen keine Normalverteilungen zu.

Fragen und Aufgaben

9.1

(a) Welche Beziehung besteht zwischen Wert- und Nutzenfunktionen?
(b) Beschreiben Sie zwei Verfahren zur Ermittlung von Nutzenfunktionen und stellen Sie ggf. Analogien zur Ermittlung von Wertfunktionen dar.

9.2

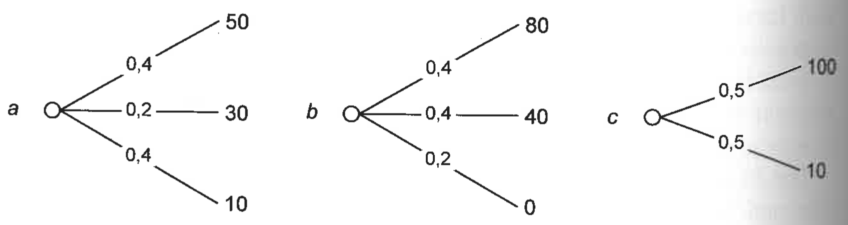
Annette, Lukas und Martin besitzen jeder ein Los für eine Tombola, bei der sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 100 € und mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8 10 € gewinnen können. Ihre Nutzenfunktionen über den Gewinnen x lauten wie folgt:

- Annette: $u(x) = 0{,}002x^2 + x$
- Lukas: $u(x) = \log x$
- Martin: $u(x) = 0{,}4x + 100$.

(a) Skizzieren Sie die drei Nutzenfunktionen mit der üblichen Normierung auf [0; 1].
(b) Jemand möchte den dreien das Los abkaufen und bietet dafür 25 €. Wer würde sich auf den Handel einlassen?
(c) Bestimmen Sie für jede Person die Risikoprämie.

9.3

Lothar Lotter muss die drei folgenden Lotterien gemäß seiner Präferenz in eine Rangfolge bringen.



Er bittet Entscheidungstheoretiker Bernd Nulli um Rat. Dieser schlägt ihm vor, die Lotterien nach dem Nutzenerwartungswert zu ordnen. Lothar ermittelt also seine Nutzenfunktion, sie lautet $u(x)=x/50-x^2/10.000$. Um sicher zu gehen, die richtige Entscheidung zu treffen, fragt Lotter auch den Wertpapieranalysten Müller-Sigmann, einen Verfechter des $\mu\sigma$-Prinzips. Dieser rät ihm, in Abhängigkeit vom Erwartungswert und der Varianz jeder Lotterie zu entscheiden. Müller-Sigmann ist Lotter auch bei der Bestimmung einer $\mu\sigma$-Präferenzfunktion behilflich. Es ergibt sich $f(\mu,\sigma)=\mu/50-(\mu^2+\sigma^2)/10.000$.

Welche Präferenzordnungen ergeben sich für Lotter nach den beiden Ansätzen? Nehmen Sie zu dem Ergebnis Stellung!

9.4

Klaus beschädigt unabsichtlich eine kostbare, in ihrem Wert aber nur schwer schätzbare Vase von Ute. Um den Schaden zu regulieren, macht Klaus' Haftpflichtversicherung Ute ein Angebot über 10.000€. Ute überlegt, es anzunehmen oder einen Rechtsanwalt einzuschalten, um 50.000€ zu fordern. Ute vermutet, dass die Versicherung darauf mit einem Angebot von 25.000€ reagieren wird oder ihr Angebot von 10.000€ noch einmal wiederholt. Diese beiden Möglichkeiten hält sie für gleichwahrscheinlich. Werden Ute 25.000€ angeboten, so würde sie akzeptieren. Bei Wiederholung des Angebots von 10.000€ kann sie akzeptieren oder den Rechtsweg beschreiten, dessen Ausgang allerdings ungewiss ist. Sie hält 10.000€, 25.000€ und 50.000€ für gleich wahrscheinlich.

1. Stellen Sie das Entscheidungsproblem mittels eines Entscheidungsbaums dar.
2. Skizzieren Sie die drei Strategien, zwischen denen Ute wählen kann.
3. Welche Strategie wird Ute wählen, wenn für sie die folgende Nutzenfunktion gilt (x = Höhe der Entschädigung):

$$u(x)=\sqrt{\frac{x}{50.000}}.$$

9.5

Ein Entscheider hat eine konstante relative Risikoeinstellung. Sein Sicherheitsäquivalent für die Lotterie (100€, 0,5; 20€, 0,5) beträgt 50€. Geben Sie eine hiermit verträgliche Nutzenfunktion über dem Intervall [20€; 100€] an und normieren Sie sie auf Werte zwischen null und eins.

9.6

Bei der anstehenden Sanierung der Lien AG ist die Anzahl der verlorengehenden Arbeitsplätze noch nicht abzusehen; man schätzt, dass sie zwischen null und 2.000 liegen könne. Der Betriebsrat ist indifferent zwischen einer 50/50-Lotterie, bei der entweder keine oder 2.000 Arbeitsplätze verloren gehen, und einer sicheren Anzahl von 500 Arbeitsplatzverlusten. Ebenso gilt $(0, 0{,}5; 500, 0{,}5) \sim 200$ und $(500, 0{,}5; 2.000, 0{,}5) \sim 900$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an und vervollständigen Sie die Nutzenfunktion durch eine Freihandkurve.
(b) Drückt sich in dem Verlauf der Nutzenfunktion Risikoscheu oder Risikofreude aus?
(c) Es ist zwischen drei Maßnahmen zu wählen. Bei Maßnahme a werden 300, 600 und 1.000 Arbeitsplatzverluste mit je 1/3 Wahrscheinlichkeit erwartet. Bei Maßnahme b gehen sicher 500 Arbeitsplätze verloren. Bei Maßnahme c haben null Arbeitsplatzverluste die Wahrscheinlichkeit 1/4, 300 die Wahrscheinlichkeit 1/2 und 2.000 die Wahrscheinlichkeit 1/4. – Welche Maßnahme müsste der Betriebsrat präferieren, um konsistent mit seiner Nutzenfunktion zu sein?

9.7

Slovic und Tversky (1974) präsentieren Entscheidern in einer empirischen Untersuchung sowohl Argumente für als auch gegen die Gültigkeit des Unabhängigkeitsaxioms. Fallen Ihnen solche Argumente ein?

9.8

Achten Sie in der nächsten Woche einmal darauf, in welchen Kontexten Ihnen das Wort „Risiko" begegnet. Wie lassen sich diese Aussagen in die Diskussion von Abschnitt 9.3 einordnen?

9.9

Ein Entscheider besitzt die Nutzenfunktion $u(x)=\sqrt{x+a}$ und die Wertfunktion $v(x)=\ln\sqrt{x+a}$ mit $x>0, a>0$.

(a) Welche absolute Risikoeinstellung hat der Entscheider, und wie verhält sich diese mit steigendem Vermögen x?
(b) Welche Risikoeinstellung besitzt der Entscheider relativ zu seinem Vermögen x, und wie verhält sich diese, wenn sein Vermögen steigt?
(c) Welche Risikoeinstellung hat der Entscheider relativ zu seiner Wertfunktion?
(d) Erläutern Sie die unterschiedlichen Ergebnisse.

9.10

Ein Entscheider hat eine konstante relative Risikoaversion von 0,5. Ermitteln Sie eine passende Nutzenfunktion und normieren Sie diese für $x \in [0; 100]$ auf Werte zwischen 0 und 1.

9.11
Welche Methoden zur Ermittlung der Nutzenfunktion wurde bei den nachfolgenden Befragungen angewandt?

(a) Welche Vor- und Nachteile ergeben sich bei den verschiedenen Verfahren?
(b) Zeichnen Sie die Nutzenfunktion des jeweiligen Entscheiders und charakterisieren Sie seine Risikoeinstellung.
(c) Die Befragung von Alfred über seine Sicherheitsäquivalente von verschiedenen Lotterien mit je zwei gleichwahrscheinlichen Ergebnissen ($p=0{,}5$) ergab:

	1. Lotterie	2. Lotterie	3. Lotterie	4. Lotterie
x_{max}	2.000	800	350	2.000
x_{min}	0	0	0	800
Sicherheitsäquivalent	800	350	100	1.200

Als Nutzenwerte sind gegeben:

$$u(2.000)=1$$
$$u(0)=0.$$

(d) Entscheider Boris wird aufgrund von vorgegebenen Basisreferenzlotterien und Sicherheitsäquivalenten nach Wahrscheinlichkeiten gefragt, bei denen er indifferent ist.

$$x_{max}=2.000 \qquad u(2.000)=1$$
$$x_{min}=0 \qquad u(0)=0.$$

Sicherheitsäquivalent	400	800	1.200	1.600
$p^*(x_{max})$	0,15	0,3	0,5	0,7

9.12
Die Ausschussproduktion in einer Werkzeugmacherei hat sich im vergangenen Monat schlagartig erhöht. Mittlerweile beträgt der Anteil der fehlerhaften Teile 20 %, was zusätzliche Kosten in Höhe von 500.000 € verursachte.

Der extrem hohe Ausschuss deutet mit 90 %-iger Wahrscheinlichkeit auf einen Fehler in der Produktionstechnik hin, dessen Korrektur das Anhalten der Produktion erfordert. Bei Nichtkorrektur des Fehlers ist anzunehmen, dass sich die zusätzlichen Kosten der letzten Periode wiederholen werden. Mit 10 %-iger Wahrscheinlichkeit ist die Ausschussproduktion nur zufällig so hoch gewesen und wird in der nächsten Periode wieder im Normalbereich sein. Das Anhalten der Produktion zur Untersuchung der Tatbestände kostet mit Sicherheit 300.000 €. Daneben kann ein Produktionsstopp mit 50 % Wahrscheinlichkeit zur nicht fristgerechten Erfüllung eines Großauftrages führen, was Opportunitätskosten von 400.000 € bedeuten würde.

(a) Zeichnen Sie einen Entscheidungsbaum für die vorliegende Situation!
(b) Welche Entscheidung sollte Dipl.-Kff. Bärbel Bange mit der Nutzenfunktion $u(x)=2-2x/10^6-(x-10^6)/10^{12}$ treffen, wenn sie nur die Kosten für den kommenden Monat berücksichtigt?

9.13
Ein Investor besitzt konstante absolute Risikoaversion. Wie Sie aus Formel (9.29) gesehen haben, lässt sich sein Nutzen im Falle unsicheren Endvermögens, welches normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2, auch als $\mu - 1/2\ c\ \sigma^2$ darstellen.

Der Investor kann zwischen zwei Anlagealternativen wählen:

- risikolose Staatsanleihe, Rendite: 5 %, risikolos ($\sigma^2=0$);
- riskantes Wertpapier mit normalverteilter Rendite, erwartete Rendite: 20 %, risikobehaftet ($\sigma^2=0{,}25$).

Der Risikoaversionsparameter des Investors beträgt $c=0{,}1$; sein Anfangsvermögen V_0 beläuft sich auf 100.

(a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass der Investor sein Vermögen vollständig in eine der beiden Anlagealternativen investieren will. Welche der beiden wird er wählen?
(b) Berechnen Sie den Wert des Risikoaversionsparameters c, bei dem der Investor bei sonst unveränderten Parameterwerten zwischen den beiden Anlagealternativen indifferent ist.
(c) Nach der Lektüre des Bestsellers „Glücklicher leben durch Diversifikation“ erkennt der Investor, dass er sich durch Aufteilung seines Vermögens auf beide Anlagealternativen im Vergleich zur Lösung aus (a) besserstellen kann. Berechnen Sie, welche Aufteilung für den Investor optimal ist.
(d) Welche Eigenschaft der Normalverteilung ist aus theoretischer Sicht für die Beschreibung möglicher Renditen aus einem Aktieninvestment als besonders kritisch zu werten?

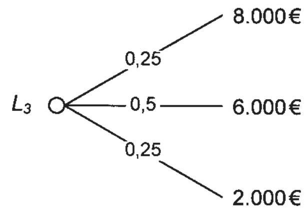
9.14
Ein Erwartungsnutzenmaximierer habe die folgende Nutzenfunktion: $u(x)=\alpha+\beta\log(x)$ mit $\beta>0$. Elizitieren Sie mindestens 4 Punkte auf dieser Nutzenfunktion (einschließlich $u(x_{min})$ und $u(x_{max})$), so dass sie normalisiert ist auf dem Intervall [1.000 €; 11.000 €]. Nutzen Sie dazu folgende Methoden:

(a) die Mittelwert-Kettungsmethode,
(b) die Fraktilmethode,
(c) die Methode variabler Wahrscheinlichkeiten,
(d) die Methode gleicher Nutzendifferenzen,
(e) die Trade-Off-Methode für Nutzenfunktionen; nutzen Sie $x_a=100$ € und $x_b=800$ €.

9.15
Heinz-Lothar ist ein risikoaverser EUT Entscheider. Er macht die folgende Präferenzaussage bezüglich der folgenden zwei Lotterien

(a) Seine Risikoprämie (RP) für Lotterie L_1 beträgt 1.000€. Was ist sein Sicherheitsäquivalent (SÄ) für L_1?
Was kann für das Sicherheitsäquivalent SÄ$_2$ gefolgert werden, welches Heinz-Lothar der Lotterie L_2 zuweist? Geben Sie ein Intervall an, das alle möglichen Werte von SÄ$_2$ umfasst!

(b) Heinz-Lothar vergleicht nun L_1 mit einer dritten Lotterie L_3 mit



Welche wird er bevorzugen, L_1 oder L_3?

(c) Wie ist das Sicherheitsäquivalent von L_3 mit dem Sicherheitsäquivalent der Lotterie L_2 zu vergleichen?

9.16

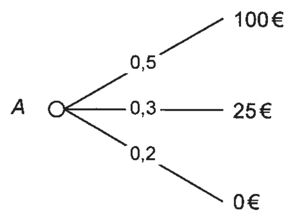
(a) Bill ist Erwartungsnutzenmaximierer. Seine Risikoprämie für eine Lotterie $a=(100€, 40\%; 50€, 40\%; 0€, 20\%)$ ist 10€. Was ist sein Sicherheitsäquivalent (SÄ) für diese Lotterie?

(b) Benutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) und das Unabhängigkeits-Axiom, um daraus zu folgern, welche Risikoprämie Bill der Lotterie $b=(100€, 56\%; 50€, 16\%; 0€, 28\%)$ zuweist.

9.17

Angela ist Erwartungsnutzenmaximiererin mit einer Nutzenfunktion $u(x)=\sqrt{x}$.

(a) Werden Angelas Entscheidungen Risikoaversion, Risikoneutralität oder Risikofreude zeigen?



(b) Was ist Angelas Risikoprämie bezüglich der Lotterie A?

(c) Angela findet die Lotterie A genauso attraktiv, wie eine Lotterie B, welche nur die Konsequenzen 100€ und 0€ hat. Welche Wahrscheinlichkeiten müssen den Ergebnissen der Lotterie B zugeordnet werden, damit es zu einer solchen Indifferenz kommt?

(d) Stellen Sie die oben genannte Indifferenzaussage in einem Drei-Ergebnis-Diagramm dar.

(e) Wie ist die Steigung der Indifferenzkurve?

(f) Bestimmen Sie eine weitere Lotterie C, die im Inneren des gleichen Drei-Ergebnis-Diagramms liegt (d. h. die nicht an den Grenzen des Dreiecks liegt) und ein Sicherheitsäquivalent von 25€ hat. Nutzen Sie nicht die explizite Nutzenfunktion um C zu bestimmen, sondern argumentieren Sie mittels des Drei-Ergebnis-Diagramms.

Anwendungsbeispiel: Erdöl- und Erdgasexploration bei Phillips Petroleum Company

Quelle: Walls, Morahan und Dyer (1995).

In den späten 1980er und frühen 1990er Jahren war der Geschäftsbereich North American Eastern Onshore Exploration der Phillips Petroleum Company für Öl- und Gasexplorationen entlang der Ost- und Südküste verantwortlich. Bei der Auswahl der Projekte wollten die Manager ein konsistentes Risikomaß benutzen, um zwischen Projekten mit sehr unterschiedlichen Risiken vergleichen und ein ausgewogenes Portfolio von Bohrprojekten halten zu können. Zusätzlich wünschten sie eine Technik, um angemessene Beteiligungen an Projekten anderer Unternehmen festlegen zu können, die sie zum Zweck der Diversifikation eingingen.

Die Verfasser des Aufsatzes entwickelten ein spezielles Computerprogramm *Discovery*. Es bot auf der Basis der Erwartungsnutzen-Theorie die Möglichkeit, die Projekte im Einklang mit den Risikopräferenzen des Managements zu beurteilen. Der Beurteilungsmaßstab war das Sicherheitsäquivalent des Projekts, also derjenige sichere Geldbetrag, der dem risikobehafteten Projekt gemäß der Risikoneigung des Managements gleichwertig ist.

Die Geschäftsbereichsleitung entschied sich für die Annahme einer konstanten Risikoaversion. Diese ist (außer bei linearen) nur bei exponentiellen Nutzenfunktionen gegeben. Wenn der Risikoaversionskoeffizient c bekannt ist, lässt sich das Sicherheitsäquivalent einfach aus

$$\text{SÄ} = -\frac{1}{c}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-cx_i}\right)$$

berechnen, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit der Konsequenz i und x_i deren monetärer Wert ist.

Für ein gegebenes Projekt konnte man nun das Sicherheitsäquivalent in Abhängigkeit von c darstellen. Variierte man die Beteiligungsquote an dem Projekt, so konnte man die sich ergebenden Funktionen vergleichen und feststellen, ab welchem Wert von c das Sicherheitsäquivalent einer niedrigen, z. B. 50-prozentigen, Beteiligung das einer höheren, z. B. einer 100-prozentigen, überstieg. Für ein festgelegtes Risikoaversionsmaß c konnten die Manager den optimalen Anteil an einem gegebenen Projekt bestimmen.

Mit Hilfe der Software war es möglich, zu untersuchen, wie sich das Risiko eines Projekts durch zusätzliche seismische Informationen verringern ließ. Das Programm berechnete den Wert dieser zusätzlichen Information sowohl nach dem Gewinnerwartungswert als auch nach dem Sicherheitsäquivalent.

Da das Investitionskapital knapp war, wünschte man die jeweils verfügbaren Bohrprojekte in eine Präferenzordnung zu bringen. Bei festgelegtem c berechnet das Programm für jedes Projekt die Beteiligungsquote mit dem höchsten Sicherheitsäquivalent und ordnet dann die Optionen in absteigender Reihenfolge. Im Vergleich mit dem üblichen Kriterium des Gewinnerwartungswertes ergaben sich beträchtliche Unterschiede bei der Rangfolge der Alternativen.

Um die Risikoeinstellung des Geschäftsbereichs-Managements zu messen, untersuchten die Autoren des Artikels die Bohrentscheidungen der jüngsten Vergangenheit. Sie ermittelten, dass fast alle Entscheidungen in der Golfküstenregion mit einem Risikoaversionskoeffizienten zwischen $0{,}03 \cdot 10^{-6}$ und $0{,}05 \cdot 10^{-6}$ vereinbar waren. Das Management war geneigt, dieses Niveau von c auch bei der Bewertung neuer Projekte zugrundezulegen. Alle Projekte wurden von da an mit *Discovery* analysiert.

Zum Zeitpunkt der Abfassung des Artikels benutzte eine Anzahl von Erdöl-Explorationsfirmen die Software, sei es nur für gelegentliche Projektentscheidungen, sei es zur Analyse des gesamten Projektportfolios.

Widerstand von Managern gegen die Software beruhte zum einen auf einer Abneigung gegen die Quantifizierung ihrer Risikoscheu. Zum anderen hat jedes Modell Grenzen in seiner Fähigkeit, die Realität abzubilden. Besonders für die Benutzung durch Manager ohne Erfahrung mit der Entscheidungstheorie sind hohe Anforderungen an die Durchschaubarkeit und Benutzerfreundlichkeit zu stellen; dies wird durch eine Minderung der Fähigkeit des Programms zur Modellierung aller möglichen komplexen Fälle erkauft.