Herbst 2019 - Thema 2 - Aufgabe 1

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die reelle Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.
a) Zeigen Sie, dass die Determinante von M_a den Wert $\det M_a = a^4 - 2a^2 + 1$ hat.
b) Sei $b = (1;1;1;1)^\top \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die Lösungsmenge $\mathbb{L}_a = \{x \in \mathbb{R}^4 : M_a x = b\}$ mehr als ein Element hat. Geben Sie in diesem Fall/diesen Fällen die Lösungsmenge konkret an.

Lösung:

Wir entwickeln die Determinante nach der 1. Zeile und wenden dann die Formel von Sarrus an.

$$\begin{aligned} \det M_a &= (-1)^{1+1} \cdot a \cdot \det \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= a \cdot (a^3 - a) + 1 \cdot (1 - a^2) \\ &= a^4 - 2a^2 + 1 \\ &= (a^2 - 1)^2 = (a-1)^2(a+1)^2 \end{aligned}$$

b) Die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems $M_a x = b$ ist genau dann einelementig, wenn die Determinante $\det M_a \neq 0$.
Deswegen untersuchen wir nur den Fall $\det M_a = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1; 1\}$.
<u>1. Fall:</u> $a = -1$
Wir bringen die erweiterte Matrix auf Zeilen-Stufenform.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 + Z_1 & \to & Z_3 \\ Z_4 & \to & Z_4 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Auf Grund der Zeile 3 gilt $\mathbb{L}_{-1} = \emptyset$.

2. Fall: $a = 1$
Wir bringen die erweiterte Matrix auf Zeilen-Stufenform.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 - Z_1 & \to & Z_3 \\ Z_4 - Z_2 & \to & Z_4 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In diesem Fall hat die Lösungsmenge unendlich viele Elemente.
Zusammenfassend gilt: $|\mathbb{L}_a| > 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Für die Berechnung der Lösungsmenge gilt: $x_3; x_4$ sind frei wählbar und $x_2 = 1-x_4; x_1 = 1-x_3$.

$$\mathbb{L}_1 = \{ \begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ 1 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ; x_3; x_4 \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$