Herbst 2012 - Thema 3 - Aufgabe 5

Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem (G_t) über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -x+3z &= 3 \\ -2x-ty+z &= 2 \\ x+2y+tz &= 1 \end{aligned}$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist (G_t) eindeutig lösbar?
b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) keine Lösung?
c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) mehrere Lösungen?
d) Geben Sie in den Fällen der Lösbarkeit die Lösungsmenge von (G_t) an.

Lösung:

Wir berechnen zunächst die Hauptdeterminante D.

$$D = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -2 & -t & 1 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} = t^2 - 12 - (-3t-2) = t^2 + 3t - 10 = (t-2)(t+5)$$

$D = 0 \Leftrightarrow t \in \{2; -5\}$

$D \neq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{2; -5\}$

Wir bringen die Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -t & 1 & 2 \\ 1 & 2 & t & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} -Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 - 2\cdot Z_1 & \to & Z_2 \\ Z_3 + Z_1 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -t & -5 & -4 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ 2Z_2 + t\cdot Z_3 & \to & Z_3 \\ Z_3 & \to & Z_2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & -10+t(t+3) & -8+4t \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & t+3 & 4 \\ 0 & 0 & (t-2)(t+5) & 4(t-2) \end{array}\right)$$

a) (G_t) ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $(t-2)(t+5) \neq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{2; -5\}$
b) (G_t) hat keine Lösung $\Leftrightarrow$ $((t-2)(t+5) = 0 \wedge 4(t-2) \neq 0) \Leftrightarrow t = -5$
c) (G_t) hat mehrere Lösungen $\Leftrightarrow$ $((t-2)(t+5) = 0 \wedge 4(t-2) = 0) \Leftrightarrow t = 2$

d) <u>1. Fall: $t \in \mathbb{R} \setminus \{2; -5\}$</u>

$$z = \frac{4}{t+5}$$

$$y = \frac{1}{2}(4 - (t+3)z) = \frac{1}{2}(4 - (t+3)\frac{4}{t+5}) = \frac{4(t+5) - 4(t+3)}{2(t+5)} = \frac{4}{t+5}$$

$$x = -3 + 3z = -3 + 3 \cdot \frac{4}{t+5} = (-3) \cdot (1 - \frac{4}{t+5}) = -3 \cdot \frac{t+1}{t+5}$$

$$\mathbb{L} = \{\tfrac{1}{t+5} \cdot \begin{pmatrix} (-3)(t+1) \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\}$$

<u>2. Fall: $t = 2$</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z ist frei wählbar.

$z := k \in \mathbb{R}$

$y = \frac{1}{2}(4 - 5z) = 2 - 2,5k$

$x = -3 + 3z = -3 + 3k$

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} -3+3k \\ 2-2,5k \\ k \end{pmatrix};\ k \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k \\ -2,5k \\ k \end{pmatrix};\ k \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$