Herbst 2011 - Thema 3 - Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für welche die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix}$$

ungleich 0 ist.
b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ alle Lösungen des inhomogenen Linearen Gleichungssystems

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a)

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix} = 6 + t^2 + t^4 - (2t^2 + t^2 + 3t^2) = t^4 - 5t^2 + 6 = (t^2 - 2)(t^2 - 3)$$

$D = 0 \Leftrightarrow t \in \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

$D \neq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

b) Wir bringen die Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t^2 & 1 \\ t & 2 & t & 2 \\ 1 & t & 3 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 - t \cdot Z_1 & \to & Z_2 \\ Z_3 - Z_1 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & t^2 & 1 \\ 0 & 2-t^2 & t-t^3 & 2-t \\ 0 & 0 & 3-t^2 & 0 \end{array}\right) (*)$$

<u>1. Fall: $t \notin \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$</u>

$\Rightarrow z = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2-t^2} \cdot (2 - t - (t - t^3)z) = \frac{2-t}{2-t^2}$$

$$\Rightarrow x = 1 - ty - t^2 z = 1 - t \cdot \frac{2-t}{2-t^2} = \frac{2 - t^2 - t(2-t)}{2-t^2} = \frac{2-2t}{2-t^2}$$

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} \frac{2-2t}{2-t^2} \\ \frac{2-t}{2-t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

2. Fall: $t \in \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\} \Leftrightarrow t^2 = 2$

Wir setzen diese Information in (*) ein:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \pm\sqrt{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{2}\cdot(-1) & 2 \mp \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Auf Grund der letzten Zeile ist ersichtlich, dass das inhomogene Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

$\mathbb{L} = \{\ \}$

3. Fall: $t \in \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\} \Leftrightarrow t^2 = 3$

Wir setzen diese Information in (*) ein: $(t_0 \in \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t_0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & t_0\cdot(-2) & 2 - t_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Auf Grund der letzten Zeile ist ersichtlich, dass das inhomogene Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

z ist frei wählbar. $z := k \in \mathbb{R}$

$y = -(2 - t_0 + 2t_0 \cdot z) = -2 + t_0 - 2t_0 \cdot k$

$x = 1 - t_0 \cdot y - 3z = 1 - t_0 \cdot (-2 + t_0 - 2t_0 \cdot k) - 3k = 1 + 2t_0 - t_0^2 + 2t_0^2 k - 3k$

$\quad = -2 + 2t_0 + 3k$

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} -2 + 2t_0 + 3k \\ -2 + t_0 - 2t_0 \cdot k \\ k \end{pmatrix};\ k \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} -2 + 2t_0 \\ -2 + t_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3k \\ -2t_0 \cdot k \\ k \end{pmatrix};\ k \in \mathbb{R}\} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 + 2t_0 \\ -2 + t_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2t_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$