## 1.3 Cramersche Regel

Wir betrachten noch einmal das Beispiel 1.2.1.
Wir hatten bereits berechnet, dass das reelle Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcl} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

im Fall $(a_{11} \neq 0 \vee a_{21} \neq 0)$ die Lösungen

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}; \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

besitzt.
Jetzt sind wir in der Lage, die Lösungen durch Determinanten darzustellen.

$$\begin{array}{rcccl} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & = & \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & = & D \\ b_1 a_{22} - b_2 a_{12} & = & \det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} & = & D_1 \\ a_{11}b_2 - a_{21}b_1 & = & \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} & = & D_2 \end{array}$$

Und somit

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

Verallgemeinert lässt sich die Cramersche Regel beweisen:

**Satz 1.3.1:**
Sei $A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_i}, \ldots, \vec{a_n}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $D := \det A \neq 0$.

Die Matrix $A_i := (\vec{a_1}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a_n}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ entsteht, indem man die $i$-Spalte von $A$ durch den Vektor $\vec{b}$ ersetzt.

Mit $D_i := \det A_i$ werde die Determinante von $A_i$ bezeichnet.

Das reelle Lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat die Lösung

$x_i = \dfrac{D_i}{D}, \ i \in \{1; \ldots; n\}$.