Cramersche Regel: Übungsaufgabe 2

Lösen Sie - falls möglich mit Hilfe der Cramerschen Regel - folgendes inhomogenes Lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} ax_1 & + & bx_2 & = & 2a \\ a^2x_1 & + & b^2x_2 & = & a^2+b^2 \end{array}$$

in Abhängigkeit von $a; b \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wir berechnen zunächst die Hauptdeterminante.

$$D = \det \begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} = ab^2 - a^2b = ab(b-a)$$

$D = 0 \Leftrightarrow ab(b-a) = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \vee b = 0 \vee a = b)$

1. Fall: $(a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b)$

In diesem Fall ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und wir berechnen die Nebendeterminanten.

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 2a & b \\ a^2+b^2 & b^2 \end{pmatrix} = 2ab^2 - (a^2+b^2)b = -b(-2ab + a^2 + b^2) = -b(a-b)^2$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} a & 2a \\ a^2 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = a(a^2+b^2) - 2a^3 = a(a^2+b^2-2a^2) = a(b^2-a^2) = a(b-a)(b+a)$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-b(a-b)^2}{ab(b-a)} = \frac{(a-b)^2}{a(a-b)} = \frac{a-b}{a}$$

$$x_2 = \frac{a(b-a)(b+a)}{ab(b-a)} = \frac{b+a}{b}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{a-b}{a} \\ \frac{a+b}{b} \end{pmatrix} \right\}$$

2. Fall: $(a = 0 \wedge b \neq 0)$

Wir bringen das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ 0 & b^2 & b^2 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{rcl} \frac{1}{b}Z_1 & \rightarrow & Z_1 \\ \frac{1}{b^2}Z_2 & \rightarrow & Z_2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Aus $0 = x_2 = 1$ folgt sofort ein Widerspruch.

$\mathbb{L} = \{\,\}$

3. Fall: $(a \neq 0 \wedge b = 0)$

Wir bringen das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 0 & 2a \\ a^2 & 0 & a^2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} \frac{1}{a}Z_1 & \rightarrow & Z_1 \\ \frac{1}{a^2}Z_2 & \rightarrow & Z_2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Aus $2 = x_1 = 1$ folgt sofort ein Widerspruch.

$\mathbb{L} = \{\,\}$

4. Fall: $(a = b \wedge (a,b) \neq (0,0))$

Wir bringen das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a & 2a \\ a^2 & a^2 & 2a^2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} \frac{1}{a}Z_1 & \rightarrow & Z_1 \\ \frac{1}{a^2}Z_2 & \rightarrow & Z_2 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können x_2 frei wählen.

$x_2 := k \in \mathbb{R}$
$x_1 = 2 - x_2 = 2 - k$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-k \\ k \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

5. Fall: $(a = 0 = b)$

Das Gleichungssystem hat die Form:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathbb{L} = \mathbb{R}^2$