Cramersche Regel: Übungsaufgabe 1

Ermitteln Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das inhomogene Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & tx_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & tx_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

eindeutig lösbar ist und berechnen Sie diese Lösung mittels der Cramerschen Regel.

Lösung:

Das das inhomogene Lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Hauptdeterminante nicht 0 ist.

$$D = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & t \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix} = 6 - 3 + t^2 - (t - 2t + 9) = t^2 + t - 6 = (t-2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3; 2\}$$

Das inhomogene Lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar,
wenn $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$.

Wir berechnen die Nebendeterminanten.

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 & t \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & t & 3 \end{pmatrix} = 9 - 6 + t^2 - (2t - 3t + 9) = t^2 + t - 6 = D$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & t \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 3 + 2t - (t - 4 + 9) = t - 2$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 2 \end{pmatrix} = 4 + 3 + 3t - (3 + 2t + 6) = t - 2$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{t^2+t-6}{t^2+t-6} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{t-2}{t^2+t-6} = \frac{t-2}{(t-2)(t+3)} = \frac{1}{t+3}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{t-2}{t^2+t-6} = \frac{t-2}{(t-2)(t+3)} = \frac{1}{t+3}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \tfrac{1}{t+3} \cdot \begin{pmatrix} t+3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$