1.2 Determinanten

Beispiel 1.2.1:
Wir studieren zunächst das allgemeine reelle Lineare Gleichungssystem der Form:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 \quad +a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 \quad +a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

1. Fall: $(a_{11} = 0 \wedge a_{21} = 0)$
Dann gibt es keine eindeutige Lösung; entweder ist x_1 frei wählbar oder die Gleichungen führen zu einem Widerspruch.

2. Fall: $(a_{11} \neq 0 \vee a_{21} \neq 0)$
Sei nun $a_{11} \neq 0$, ansonsten tauschen wir die Zeilen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot Z_1 & \to & Z_2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} & b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}} \end{array}\right)$$

Das Lineare Gleichungssystem ist also genau dann eindeutig lösbar, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
Der Term $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ bestimmt (= determiniert), wann genau eine eindeutige Lösbarkeit des 2×2 Linearen Gleichungssystems gegeben ist. Für die Lösung gilt dann:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}; \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Zähler und Nenner von x_2 und x_1 weisen analoge Termstruktur auf und lassen darauf hoffen, dass sich ein allgemein-gültiges Verfahren für die Lösungsmenge von $Ax = b$ mit $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ergibt.

Wir stellen im folgenden nur die Ergebnisse/Berechnungsverfahren für Determinanten von reellen quadratischen Matrizen dar, ohne die zugehörigen Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise zu führen.

Definition 1.2.2:
Eine Determinante det ist eine Abbildung, die jeder reellen Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine reelle Zahl $\det A$ zuordnet. Dabei müssen folgende Eigenschaften der Determinante erfüllt sein:

(Wir notieren im folgenden die Matrix A spaltenweise, d.h. $A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_j}, \dots, \vec{a_n})$ wobei $\vec{a_j}$ die j-te Spalte von A bezeichne.)

(1) Die Determinante ist additiv in jeder Spalte $\vec{a_j} = \vec{b_j} + \vec{c_j}$.

$A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_j}, \dots, \vec{a_n}) = (\vec{a_1}, \dots, \vec{b_j} + \vec{c_j}, \dots, \vec{a_n})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det A &= \det(\vec{a_1}, \dots, \vec{a_j}, \dots, \vec{a_n}) \\ &= \det(\vec{a_1}, \dots, \vec{b_j} + \vec{c_j}, \dots, \vec{a_n}) \\ &= \det(\vec{a_1}, \dots, \vec{b_j}, \dots, \vec{a_n}) + \det(\vec{a_1}, \dots, \vec{c_j}, \dots, \vec{a_n}) \end{aligned}$$

(2) Die Determinante ist homogen in jeder Spalte $\vec{a_j} = r \cdot \vec{b_j}; r \in \mathbb{R}$.

$A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_j}, \dots, \vec{a_n}) = (\vec{a_1}, \dots, r \cdot \vec{b_j}, \dots, \vec{a_n})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det A &= \det(\vec{a_1}, \dots, \vec{a_j}, \dots, \vec{a_n}) \\ &= \det(\vec{a_1}, \dots, r \cdot \vec{b_j}, \dots, \vec{a_n}) \\ &= r \cdot \det(\vec{a_1}, \dots, \vec{b_j}, \dots, \vec{a_n}) \end{aligned}$$

(3) Die Determinante ist alternierend; d.h. das Vorzeichen der Determinante ändert sich bei Spaltentausch.

$\det(\vec{a_1}, \dots, \vec{a_i}, \dots, \vec{a_j}, \dots, \vec{a_n}) = -\det(\vec{a_1}, \dots, \vec{a_j}, \dots, \vec{a_i}, \dots, \vec{a_n})$

(4) Die Determinante ist normiert.

$$\text{Sei } E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \det E_n = 1$$

(Bemerkung: Ist eine Abbildung additiv und homogen, so wird sie linear genannt.
Eine Determinante ist also eine multilineare, alternierende und normierte Abbildung.)

Wir notieren einige Folgerungen aus der Definition.

Lemma 1.2.3:
(i) Sind die i-te und j-te Spalte der Matrix A identisch, dann ist die Determinante gleich 0.
Der Beweis nutzt die Eigenschaft, dass die Determinante alternierend ist; wir tauschen die i-te und die j-te Spalte miteinander.

$$\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a_n}) = -\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a_n})$$
$$\Rightarrow 2 \cdot \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a_n}) = 0$$
$$\Rightarrow \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a_n}) = 0$$

(ii) Wird der Spaltenvektor $\vec{a_j}$ zu $\vec{a_j} + r \cdot \vec{a_l}$ verändert, so bleibt die Determinante gleich.

$$\begin{aligned}
&\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_j} + r \cdot \vec{a_l}, \ldots, \vec{a_n}) && \overset{(1)}{=} \\
&\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_n}) + \det(\vec{a_1}, \ldots, r \cdot \vec{a_l}, \ldots, \vec{a_n}) && \overset{(2)}{=} \\
&\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_n}) + r \cdot \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_l}, \ldots, \vec{a_n}) && = \\
&\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_n}) + r \cdot \det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_l}, \ldots, \vec{a_l}, \ldots \vec{a_n}) && \overset{(3)}{=} \\
&\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_n}) + r \cdot 0 && = \\
&\det(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_j}, \ldots, \vec{a_n})
\end{aligned}$$

(1) Determinante ist additiv.
(2) Determinante ist homogen.
(3) Lemma 1.2.3

Satz 1.2.4:
Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix, dann ist die Determinante von A das Produkt der Diagonalelemente. $\det A = \prod\limits_{j=1}^{n} a_{jj}$
(Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt obere Dreiecksmatrix, falls alle Einträge unterhalb der Diagonalen 0 sind, also $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$, falls $i > j$.
Eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ heißt untere Dreiecksmatrix, falls alle Einträge oberhalb der Diagonalen 0 sind, also $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$, falls $i < j$.)

Satz 1.2.5:
(1) Matrizen gleicher Größe können addiert werden.

Seien $A, B \in M(m \times n, \mathbb{R})$ mit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ und $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$,
dann ist $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

(2) Matrizen passender Größe können multipliziert werden.

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $C \in M(n \times r, \mathbb{R})$ mit

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ und $C = (c_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq r}}$,

dann ist $A \cdot C = D = (d_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq r}}$ und $d_{ik} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ij} \cdot c_{jk}$.

(Dabei wird die i-te Zeile von A mit der k-ten Spalte von C komponentenweise multipliziert und anschließend addiert.

Satz 1.2.6:

Sind $A; B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ zwei quadratische Matrizen, so gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Definition 1.2.7:

Für jede Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R}); A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ ist $A^\top := (\widetilde{a_{ij}})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ mit $\widetilde{a_{ij}} = a_{ji}$ die zugehörige transponierte Matrix.

Die i-te Spalte von $A^\top$ ist also gleich der i-ten Zeile von A.

Satz 1.2.8:

Für jede Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R}); A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det(A) = \det(A^\top)$$

Damit gelten alle Eigenschaften der Determinante für Spalten und Zeilen gleichermaßen.

Eine mögliche Berechnungsstrategie für die Determinanten von Matrizen besteht darin, dass man unter Beachtung der Eigenschaften der Determinante die zugrunde liegende Matrix in obere Dreiecksgestalt überführt und dann mit Satz 1.2.4 argumentiert.

Allerdings gibt es auch direkte Methoden, die teils schneller zum Ziel führen.

Beispiel 1.2.9:

Die Determinante einer reellen 2×2-Matrix berechnet sich direkt als:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Beispiel 1.2.10:
Die Determinante einer reellen 3×3-Matrix berechnet sich direkt als:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

(Dies ist die bekannte Regel von Sarrus.)

Für Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \geq 4$ gibt es die Möglichkeit, die Determinante durch Entwicklung nach Zeile oder Spalte zu berechnen. (sogenannte Entwicklung nach Laplace)

Satz 1.2.11:
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \geq 4$ und $i \in \{1; \ldots; n\}$ fest. Dann gilt:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Dabei ist A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.
Diese Rechenregel ist die Entwicklung der Determinante von A nach der i-ten Zeile.
Ebenso gilt für festes $j \in \{1; \ldots; n\}$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Diese Rechenregel ist die Entwicklung der Determinante von A nach der j-ten Spalte.

Durch iterierte Anwendung der Entwicklungsregel kann die Determinante beliebig großer Matrizen berechnet werden.
Oft kombiniert man beide Methoden, um zunächst eine Matrix mit hinreichend vielen Null-Einträgen zu erzeugen, so dass die anschließende Entwicklung nach Zeile bzw. Spalte nicht zuviel Rechenarbeit erzeugt.

Wir betrachten ein Beispiel:

Beispiel 1.2.12:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ 0 & b-a & a-b & 0 \\ 0 & 0 & b-a & a-b \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=}$$

$$(-1)^{1+1}a\cdot\det\begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ b-a & a-b & 0 \\ 0 & b-a & a-b \end{pmatrix} + (-1)^{2+1}(b-a)\cdot\det\begin{pmatrix} b & b & b \\ b-a & a-b & 0 \\ 0 & b-a & a-b \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=}$$

$$a(a-b)^3 - (b-a)b(a-b)^2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{=}$$

$$a(a-b)^3 + b(a-b)^3(1+0+1-0-0-(-1)) =$$

$$(a-b)^3(a+3b)$$

(1) $Z_1 \to Z_1; (Z_2 - Z_1) \to Z_2; (Z_3 - Z_2) \to Z_3; (Z_4 - Z_3) \to Z_4$
(2) Entwicklung nach der ersten Spalte
(3) 1. Matrix ist untere Dreiecksmatrix; Homogenität der 2. Determinante in jeder Zeile
(4) Regel von Sarrus