Determinante: kurz nachgedacht 3

Beweisen Sie folgende Rechenregeln für Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$:

(i) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

(ii) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$

Lösung:

(i) Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ und $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$.

Dann gilt:
$(A+B)^\top = ((a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}})^\top = (a_{ji}+b_{ji})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = (a_{ji})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} + (b_{ji})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = A^\top + B^\top$

(ii) Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le n}}$.

Dann gilt:

$A \cdot B = D = (d_{ik})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le k\le n}}$ mit $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$

$\Rightarrow (A \cdot B)^\top = D^\top = (\widetilde{d_{ik}})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le k\le n}}$ mit $\widetilde{d_{ik}} = d_{ki}$

$B^\top = (\widetilde{b_{ij}})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ mit $\widetilde{b_{ij}} = b_{ji}$

$A^\top = (\widetilde{a_{jk}})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le k\le n}}$ mit $\widetilde{a_{jk}} = a_{kj}$

$B^\top \cdot A^\top = E = (e_{ik})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le k\le n}}$ mit $e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{b_{ij}} \cdot \widetilde{a_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} \cdot a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot b_{ji} = d_{ki} = \widetilde{d_{ik}}$

Also haben $(A \cdot B)^\top$ und $B^\top \cdot A^\top$ die gleichen Einträge an jeder Stelle der jeweiligen Matrizen.