Determinanten: Übungsaufgabe 2

Gegeben seien die Matrizen:

$$T_1 = (1); T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad n \geq 4$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Determinanten-Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det(T_n) = 2 \cdot \det(T_{n-1}) - \det(T_{n-2}) \text{ für } n > 2$$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\det(T_n) = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Lösung:

a)
<u>1. Fall: $n = 3$</u>

$$\det(T_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$-1 \cdot 1 + 2\det(T_2) = 2\det(T_2) - \det(T_1)$
(Zu (*) Entwicklung nach der letzten Spalte)

<u>2. Fall: $n = 4$</u>

$$\det(T_4) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=}$$

$$(-1)^{3+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{letzte Zeile}}{=}$$

$$(-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det(T_3) =$$

$$-\det(T_2) + 2 \cdot \det(T_3)$$

3. Fall: $n \geq 5$

$$\det(T_n) \overset{(*)}{=}$$

$$(-1)^{(n-1)+n} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+n} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{letzte Zeile}}{=}$$

$$(-1) \cdot (-1)^{(n-1)+(n-1)} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det T_{n-1} =$$

$$-\det(T_{n-2}) + 2 \cdot \det(T_{n-1})$$

Bemerkung: Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte (bzw. auch nach der letzten Zeile) erzeugt in den Streichmatrizen (fast sofort) die Matrizen in einer Dimension niedriger. Bei der zweiten Entwicklung nehme man die letzte Zeile. Das Verfahren für $n = 4$ lässt sich also völlig analog im allgemeinen Fall wiederholen.

b) Induktion über $n \in \mathbb{N}$
Induktionsanfang:
$n = 1: \quad \det(T_1) = 1$
$n = 2: \quad \det(T_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$

$n = 3: \quad \det(T_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (4 + 0 + 0) - (0 + 1 + 2) = 4 - 3 = 1$

Induktionsbehauptung:
Für ein festes $n \in \mathbb{N}; n \geq 3$ gelte: $\det T_k = 1$ für alle $k \leq n$.
Induktionsschritt:
$\det(T_{n+1}) \overset{a)}{=} -\det(T_{n-1}) + 2 \cdot \det(T_n) \overset{\text{Ind.vor.}}{=} -1 + 2 \cdot 1 = 1$