Determinanten: Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

a) Man berechne die Determinante von B.
b) Man zeige mit Hilfe von a), dass die Matrix $C = -\frac{1}{2}B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die Determinante $\det(C) < -1$ besitzt.
c) Man untersuche, ob es eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $F^2 = C$ gibt.

Lösung:

a) Zur Berechnung der Determinante verwenden wir zunächst determinantenerhaltende Zeilenumformungen und entwickeln dann nach der ersten Zeile (*). Zwei der entstehenden 4×4- Determinanten sind als obere Dreiecksdeterminanten leicht zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
& \det(B) \\
= \; & \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 - Z_2 & \to & Z_3 \\ Z_4 - Z_3 & \to & Z_4 \\ Z_5 - Z_4 & \to & Z_5 \end{matrix} \\
= \; & \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \det \hat{B} \\
\overset{(*)}{=} \; & \textstyle\sum_{k=1}^{5} (-1)^{1+k} \cdot b_{1k} \cdot \det \hat{B}_{1k} \\
= \; & (-1)^2 \cdot 0 \cdot \det \hat{B}_{11} + (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \hat{B}_{12} + (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \hat{B}_{13} + (-1)^5 \cdot 1 \cdot \det \hat{B}_{14} + (-1)^6 \cdot 1 \cdot \det \hat{B}_{15} \\
= \; & -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
= \; & -\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} - (-24) + 24 \\
= \; & -(-24 + 12 - (-8 - 12)) + 2 \cdot (12 - 4) + 48 \\
= \; & -8 + 64 \\
= \; & 56
\end{aligned}$$

b) $\det(C) = \det(-\frac{1}{2}B) = (-\frac{1}{2})^5 \cdot \det(B) = -\frac{1}{32} \cdot 56 = -1,75 < -1.$

c) Annahme: Es gibt eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $F^2 = C$.

$\Rightarrow \det(C) = \det(F^2) = (\det(F))^2 \geq 0$

Widerspruch, denn in b) wurde $\det(C) < 0$ nachgewiesen.