Kapitel 1

Lineare Gleichungssysteme, Determinanten und Matrizenrechnung

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Lineare Algebra hat ihren Ursprung in der Frage nach Lösungen von linearen Gleichungssystemen. Dabei kann man entweder ganz konkret nach den Lösungen suchen, d.h. sie rechnerisch bestimmen, oder eher qualitativ nach der Größe der Lösungsmenge fragen, d.h. man will wissen, ob das vorgegebene System keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen besitzt. Eine über unser erstes Kapitel hinausführende Frage lautet, welche Struktur die Lösungsmenge besitzt.

Definition 1.1.1:
Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

heißt lineares reelles Gleichungssystem in den Unbestimmten $x_1, \dots x_n$ mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$ und $b_i \in \mathbb{R}$.
Im Fall $b_1 = \ldots = b_m = 0$ heißt es homogen, anderenfalls inhomogen.
Mit $\mathbb{L}$ bezeichnen wir die Lösungsmenge des Gleichungssystems, d.h. die Menge aller Elemente aus $\mathbb{R}^n$, die obiges Gleichungssystem erfüllen.

Ein Rechtecksschema A der Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

heißt reelle $m \times n$-Matrix.
Notation: $A \in M(m \times n; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m \times n};\ A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$
Ein Rechtecksschema A_e der Form

$$A_e := \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \ a_{ij} \in \mathbb{R}; b_i \in \mathbb{R}$$

heißt erweiterte reelle $m \times (n+1)$-Matrix.

Ein mögliches Lösungsverfahren ist durch das Gaußsche Eliminationsverfahren gegeben.
Dabei arbeitet man mit dem zum inhomogenen linearen Gleichungssystem gehörigen Rechtecksschema A_e, formt dieses mit Operationen derart um, dass sich die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ nicht ändert, aber leicht(er) berechnet werden kann.
Erlaubte Operationen sind:
(1) Ersetzen der Zeile Z_i durch $Z_i + d \cdot Z_k$;
notiert durch $Z_i + d \cdot Z_k \to Z_i$; $d \in \mathbb{R}$.
(2) Zeilentausch in A_e, notiert als $Z_i \to Z_k$.
(3) Spaltentausch in A_e, notiert als $S_j \leftrightarrow S_l$.
(Dies muss am Ende rückgängig gemacht werden.)

Durch Operationen der Art (1) bis (3) lässt sich A_e immer auf folgende Form bringen:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
c_1 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{1,k+1} & \dots & \hat{a}_{1n} & \hat{b}_1 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & c_k & \hat{a}_{k,k+1} & \dots & \hat{a}_{kn} & \hat{b}_k \\
\hline
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{b}_{k+1} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{b}_m
\end{array}\right)$$

Dabei gilt $c_1 \neq 0; \dots; c_k \neq 0$.

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar (d.h. die Lösungsmenge ist nicht die leere Menge), wenn $\hat{b}_{k+1} = \dots \hat{b}_m = 0$.

Für $m \neq n$ gibt es entweder keine oder mehr als eine Lösung des inhomogenen Systems.
Für $m = n$ kann es keine oder genau eine oder mehr als eine Lösung des inhomogenen Systems geben.
(Bemerkung: Für $m = n$ hat das inhomogene System genau dann genau eine Lösung, wenn die Determinante von A ungleich 0 ist.)

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{inh}$ eines inhomogenen Linearen Gleichungssystems entsteht, indem man eine spezielle Lösung x_{sp} des inhomogenen Systems zur Lösungsmenge $\mathbb{L}_h$ des homogenen Systems addiert.

$$\mathbb{L}_{inh} = x_{sp} + \mathbb{L}_h$$

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}_h \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

(i) $\vec{0} \in \mathbb{L}_h \Rightarrow \mathbb{L}_h \neq \varnothing$

(ii) $\forall \vec{x}; \vec{y} \in \mathbb{L}_h: \quad \vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{L}_h$

(iii)$\forall k \in \mathbb{R}; \forall \vec{x} \in \mathbb{L}_h : k \cdot \vec{x} \in \mathbb{L}_h$

In der weiterführenden Theorie wird man jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die diese drei Eigenschaften erfüllt, einen linearen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ nennen.

Wir betrachten ein Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 3 \\
2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 4 \\
-x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & -5
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & -6 & 4 \\ -1 & -2 & 6 & -5 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 - 2Z_1 & \to & Z_2 \\ Z_3 + Z_1 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 - Z_2 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad S_2 \leftrightarrow S_3$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 + 2Z_2 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit haben wir die gewünschte Form erreicht.
Das zugehörige lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & & + & 2x_2 & = & -1 \\
 & & 2x_3 & & & = & -2
\end{array}$$

Damit gilt:
$x_3 = -1$
x_2 ist frei wählbar; $x_2 := k \in \mathbb{R}$
$x_1 = -1 - 2x_2 = -1 - 2k$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1-2k \\ k \\ -1 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$