Lineares Gleichungssystem: kurz nachgedacht 3

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des nachfolgenden Linearen Gleichungssystems!

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 1 \end{array}$$

Lösung:

Wir bringen das Lineare Gleichungssystem mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilen-Stufen-Form.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 - 2Z_1 & \to & Z_2 \\ Z_3 - 4Z_1 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & -3 & 6 & -27 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 & \to & Z_1 \\ -1 \cdot Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 - 3Z_2 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile ist ersichtlich, dass das Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.
Wir können x_3 frei wählen und x_2 bzw. x_1 in Abhängigkeit von x_3 berechnen.

$x_3 := k \in \mathbb{R}$
$x_2 = 9 + 2x_3 = 9 + 2k$
$x_1 = 7 - x_2 = 7 - (9 + 2k) = -2 - 2k$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2-2k \\ 9+2k \\ k \end{pmatrix} ;\ k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ k \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$