Lineares Gleichungssystem: Übungsaufgabe 4

Lösen Sie das inhomogene Lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & tx_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & tx_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Lösung:

Wir bringen das Lineare Gleichungssystem mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilen-Stufen-Form.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & t & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & t & 3 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 & \to & Z_2 \\ Z_2 & \to & Z_1 \\ Z_3 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & t & 3 \\ 1 & t & 3 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 - 2Z_1 & \to & Z_2 \\ Z_3 - Z_1 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & t+2 & 1 \\ 0 & t-1 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 - (t-1)Z_2 & \to & Z_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & t+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(t-2)(t+3) & 2-t \end{array}\right)$$

Je nach Wahl von $t \in \mathbb{R}$ ergeben sich qualitativ unterschiedliche Fälle.

1. Fall: $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

$$x_3 = \frac{2-t}{-(t-2)(t+3)} = \frac{1}{t+3}$$

$$x_2 = 1 - (t+2)x_3 = \frac{t+3-(t+2)}{t+3} = \frac{1}{t+3}$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - \frac{1}{t+3} + \frac{1}{t+3} = 1$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \tfrac{1}{t+3} \cdot \begin{pmatrix} t+3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Fall: $t = 2$

Die Zeilenstufenform lautet in diesem Fall:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile ist ersichtlich, dass das Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

$x_3 := k \in \mathbb{R}$

$x_2 = 1 - 4x_3 = 1 - 4k$

$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - (1 - 4k) + k = 5k$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5k \\ 1 - 4k \\ k \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} ; k \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Fall: $t = -3$

Die Zeilenstufenform lautet in diesem Fall:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile ist ersichtlich, dass das Lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

$\mathbb{L} = \{ \ \}$