Lineares Gleichungssystem: Übungsaufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^n$ des folgenden Systems von n linearen Gleichungen.

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} x_j - \sum\limits_{j=k+1}^{n} x_j = 1, \quad k = 1; 2; \ldots, n-1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = 1 \end{cases}$$

Lösung:

Wir notieren die Angabe des Linearen Gleichungssystems ausführlicher:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & \cdots & - & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & \cdots & - & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & \cdots & - & x_n & = & 1 \\
\vdots & + & \vdots & + & \vdots & \mp & \vdots & - & x_n & = & \vdots \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & - & x_n & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots & + & x_n & = & 1
\end{array}$$

Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & -1 & -1 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1
\end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl}
Z_1 & \to & Z_1 \\
Z_2 - Z_1 & \to & Z_2 \\
Z_3 - Z_1 & \to & Z_3 \\
Z_j - Z_1 & \to & Z_j \\
Z_{n-1} - Z_1 & \to & Z_{n-1} \\
Z_n + Z_1 & \to & Z_n
\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1 \\
0 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 2
\end{array}\right) \qquad \begin{array}{lcl}
Z_1 & \to & Z_n \\
\frac{1}{2}Z_2 & \to & Z_2 \\
\frac{1}{2}Z_3 & \to & Z_3 \\
\frac{1}{2}Z_j & \to & Z_j \\
\frac{1}{2}Z_{n-1} & \to & Z_{n-1} \\
\frac{1}{2}Z_n & \to & Z_1
\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 & 1
\end{array}\right)$$

Aus den ersten $n-1$ Zeilen lässt sich leicht folgern:

$x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = 0; \ldots; x_{n-1} = 0$

Setzen wir diese Ergebnisse in die n-te Zeile ein, so folgert $x_n = 0$.

Die Lösungsmenge lautet: $\mathbb{L} = \{(1; 0; \ldots; 0)^\top\}$