Lineares Gleichungssystem: Übungsaufgabe 2

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, sowie $x_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = \vec{0}$.
b) Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}^4$ so, dass x_p eine Lösung von $A \cdot x = b$ ist und geben Sie die Lösungsmenge dieses Linearen Gleichungssystems an.

Lösung:

a) Wir bringen das Lineare Gleichungssystem mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilen-Stufen-Form.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 - 2Z_1 & \to & Z_2 \\ Z_3 & \to & Z_3 \\ Z_4 + Z_1 & \to & Z_4 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Z_1 & \to & Z_1 \\ -Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 + 2Z_2 & \to & Z_3 \\ Z_4 + 3Z_2 & \to & Z_4 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ -Z_3 & \to & Z_3 \\ Z_4 - Z_3 & \to & Z_4 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus den beiden letzten Zeilen ist ersichtlich, dass das homogene Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.
Wir können x_3 und x_5 frei wählen und $x_4; x_2$ sowie x_1 in Abhängigkeit von x_3 und x_5 berechnen.

$x_5 := m \in \mathbb{R}$
$x_4 = -\frac{1}{3}x_5 = -\frac{1}{3}m$
$x_3 := k \in \mathbb{R}$
$x_2 = x_3 - 2x_4 - x_5 = k - (-\frac{2}{3}m) - m = k - \frac{1}{3}m$
$x_1 = -x_2 - x_4 - 2x_5 = -(k - \frac{1}{3}m) - (-\frac{1}{3}m) - 2m = -k - \frac{4}{3}m$

$$\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} -k-\frac{4}{3}m \\ k-\frac{1}{3}m \\ k \\ -\frac{1}{3}m \\ m \end{pmatrix} ;\ k,m \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -k \\ k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}m \\ -\frac{1}{3}m \\ 0 \\ -\frac{1}{3}m \\ m \end{pmatrix} ;\ k,m \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) $b = A \cdot x_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix}$

Die Lösungsmenge eines inhomogenen Linearen Gleichungssystems ergibt sich als Summe einer partikulären Lösung des inhomogenen System und dem Lösungsraum des zugehörigen homogenen Linearen Gleichungssystems.

Wir setzen also unsere Informationen nur noch zusammen.

$\mathbb{L}_{inh} = x_p + \mathbb{L}_h$