Lineares Gleichungssystem: Übungsaufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = \vec{0}$.
b) Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ an.
Lösung:

a) Wir bringen das Lineare Gleichungssystem mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens auf Zeilen-Stufen-Form.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ 2Z_2 - Z_1 & \to & Z_2 \\ 2Z_3 - Z_1 & \to & Z_3 \\ 2Z_4 - Z_1 & \to & Z_4 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ Z_2 & \to & Z_2 \\ Z_3 + Z_2 & \to & Z_3 \\ Z_4 + 3Z_2 & \to & Z_4 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus den beiden letzten Zeilen ist ersichtlich, dass das homogene Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.
Wir können $x_3; x_4$ und x_5 frei wählen und x_2 bzw. x_1 in Abhängigkeit von $x_3; x_4$ und x_5 berechnen.

$x_3 := k \in \mathbb{R}$
$x_4 := l \in \mathbb{R}$
$x_5 := m \in \mathbb{R}$
$x_2 = -2x_3 - 3x_4 - x_5 = -2k - 3l - m$
$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (-3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 9x_5) = \frac{1}{2} \cdot (-3(-2k - 3l - m) - 4k - 5l - 9m) = k + 2l - 3m$

$$\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} k+2l-3m \\ -2k-3l-m \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} ;\ k,l,m \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ -2k \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2l \\ -3l \\ 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3m \\ -m \\ 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} ;\ k,l,m \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ;\ k,l,m \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Analog zu a) berechnen wir den Lösungsraum des inhomogenen Linearen Gleichungssystems.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right) \qquad \begin{array}{rcl} Z_1 & \to & Z_1 \\ 2Z_2 - Z_1 & \to & Z_2 \\ 2Z_3 - Z_1 & \to & Z_3 \\ 2Z_4 - Z_1 & \to & Z_4 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & -3 & -6 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Aus den beiden letzten Zeilen ist ersichtlich, dass das inhomogene Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.
Wir können $x_3; x_4$ und x_5 frei wählen und x_2 bzw. x_1 in Abhängigkeit von $x_3; x_4$ und x_5 berechnen.

$x_3 := k \in \mathbb{R}$
$x_4 := l \in \mathbb{R}$
$x_5 := m \in \mathbb{R}$
$x_2 = 2 - 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 2 - 2k - 3l - m$
$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (10 - 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 - 9x_5) = \frac{1}{2} \cdot (10 - 3(2 - 2k - 3l - m) - 4k - 5l - 9m) = 2 + k + 2l - 3m$

$$\mathbb{L}_{inh} = \left\{ \begin{pmatrix} 2+k+2l-3m \\ 2-2k-3l-m \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} ;\ k,l,m \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$