Lehrstuhl für Informatik I
Algorithmen & Komplexität
Universität Würzburg

Würzburg, den 12. Mai 2020

Prof. Dr. Alexander Wolff
Diana Sieper, B. Sc.

4. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie (Sommer 2020)

Aufgabe 1 – Minimale Schnitte

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $s, t \in V$ und Kantenkapazitäten $c \colon E \to \mathbb{R}_{>0}$.

Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der einen minimalen s-t-Schnitt ermittelt. Zeigen Sie die Korrektheit des Algorithmus. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Laufzeit Ihres Algorithmus an und begründen Sie diese. **5 Punkte**

Aufgabe 2 – Knotengrade

a) Ein *einfacher* Graph ist ein Graph ohne Selbstkanten (auch Schleifen genannt) und Mehrfachkanten. Gibt es einen einfachen, ungerichteten Graphen mit 12 Knoten und den Knotengraden 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 10, 11? Begründen Sie Ihre Antwort. **2 Punkte**

b) Wir betrachten folgendes Problem: Gegeben seien eine natürliche Zahl n, natürliche Zahlen $e_1, \dots, e_n$ und $a_1, \dots, a_n$. Gesucht ist ein gerichteter Graph mit Knotenmenge $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, so dass für $i = 1, \dots, n$ der Knoten v_i Eingangsgrad e_i und Ausgangsgrad a_i hat.

Modellieren Sie dieses Problem als Maximalflussproblem und machen Sie eine allgemeine Skizze Ihrer Lösung. Zeigen Sie, dass Ihr Modell korrekt ist. **6 Punkte**

Aufgabe 3 – b-Flüsse

Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, für den Kantenkapazitäten durch eine Funktion $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben sind. Zusätzlich sei $b : V \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die jedem Knoten $v \in V$ einen (möglicherweise negativen) Bedarfswert $b(v) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Eine Funktion $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $0 \leq f(e) \leq c(e)$ für jede Kante $e \in E$ ist ein *zulässiger b-Fluss*, falls

$$\mathrm{Nettozufluss}_f(v) = b(v) \text{ für jeden Knoten } v \in V.$$

Für Knoten mit $b(v) = 0$ entspricht das der Flusserhaltung. Es gibt allerdings keine ausgezeichneten Knoten s und t mehr, dafür aber Knoten mit $b(v) \neq 0$.

a) Sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ sowie Kantenkapazitäten $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und eine Bedarfsfunktion $b : V \to \mathbb{R}$ gegeben. Lösen Sie das Problem, zu entscheiden, ob es einen zulässigen b-Fluss gibt in G, indem Sie es als s-t-Fluss-Problem modellieren. Machen Sie außerdem eine allgemeine Skizze Ihres Modells.

   Hinweis: Fügen Sie Knoten und Kanten zum Graph hinzu und wählen Sie dabei geeignete Kapazitäten der Kanten.

4 Punkte

b) Zeigen Sie, dass Ihre Lösung aus der a) korrekt ist.

3 Punkte

Bitte laden Sie Ihre Lösungen als pdf bis **Dienstag, 19. Mai 2020, 12:00 Uhr** im WueCampus-Kursraum beim entsprechenden Übungsblatt hoch. Geben Sie stets die Namen aller (bis zu 2) BearbeiterInnen an.

Begründen Sie stets Ihre Behauptungen und kommentieren Sie Ihren Pseudocode!

Aufgaben, die mit $\boxed{\text{CPLEX}}$ gekennzeichnet sind, fordern das Erstellen und Lösen von linearen Programmen. Laden Sie Ihren kommentierten Quellcode auf WueCampus hoch. Der Quellcode sollte von der selben Person abgegeben werden, die auch die pdf hochgeladen hat. Wenn dies nicht der Fall sein sollte, vermerken Sie auf Ihrer Abgabe, welche BearbeiterIn den Quellcode hochgeladen hat.