Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

SetCover via lokale Suche

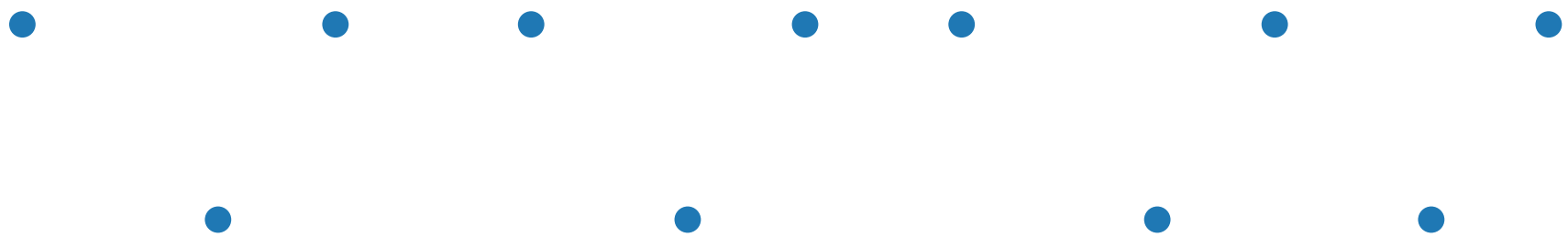
13. Vorlesung

Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

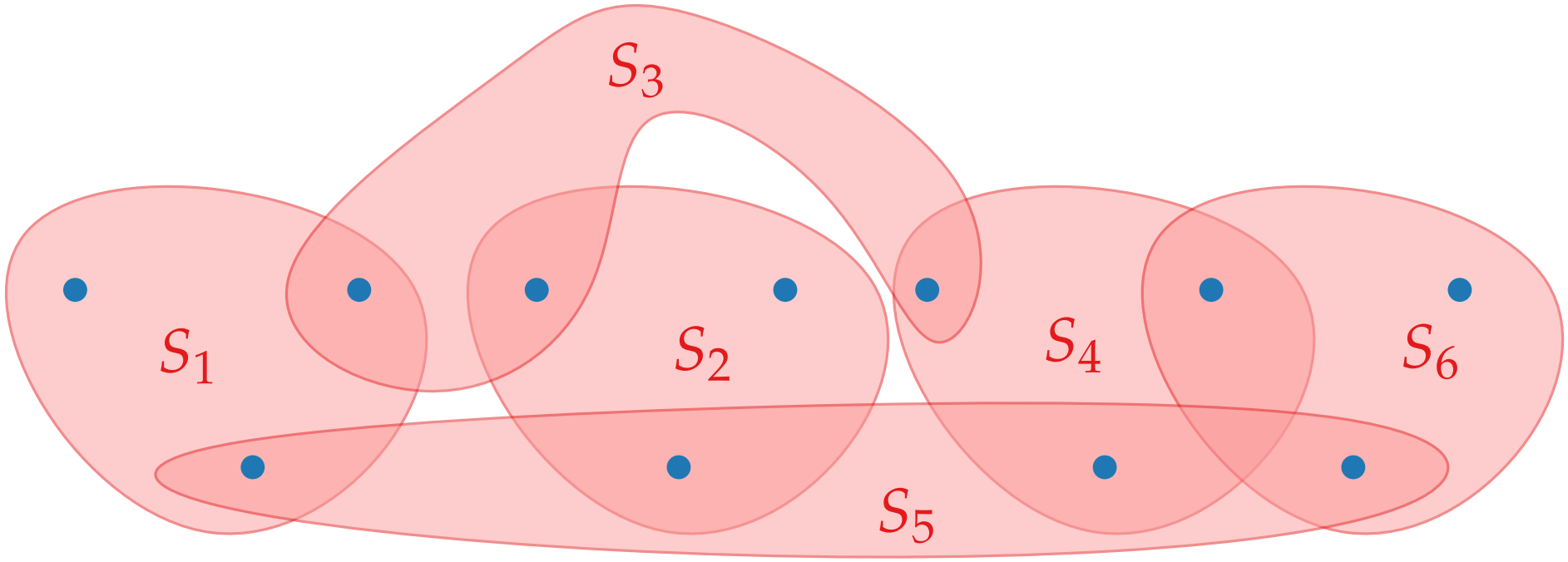
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U



SetCover (card.)

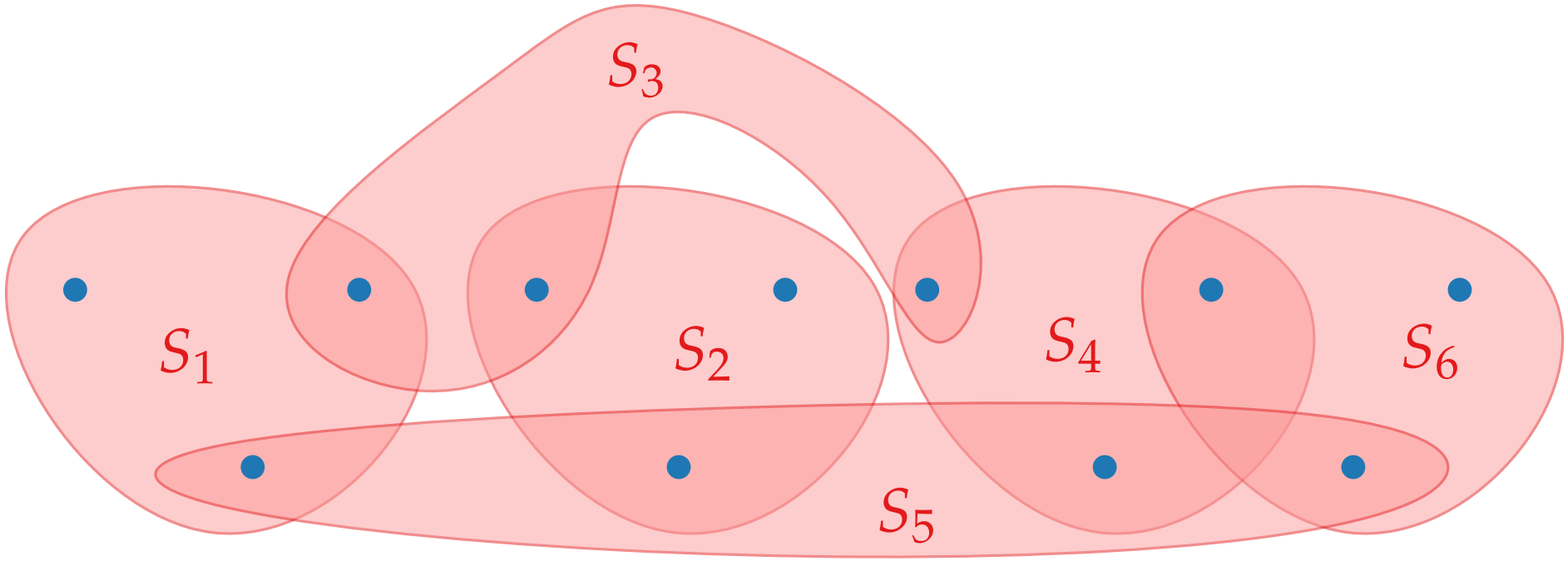
Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.



SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

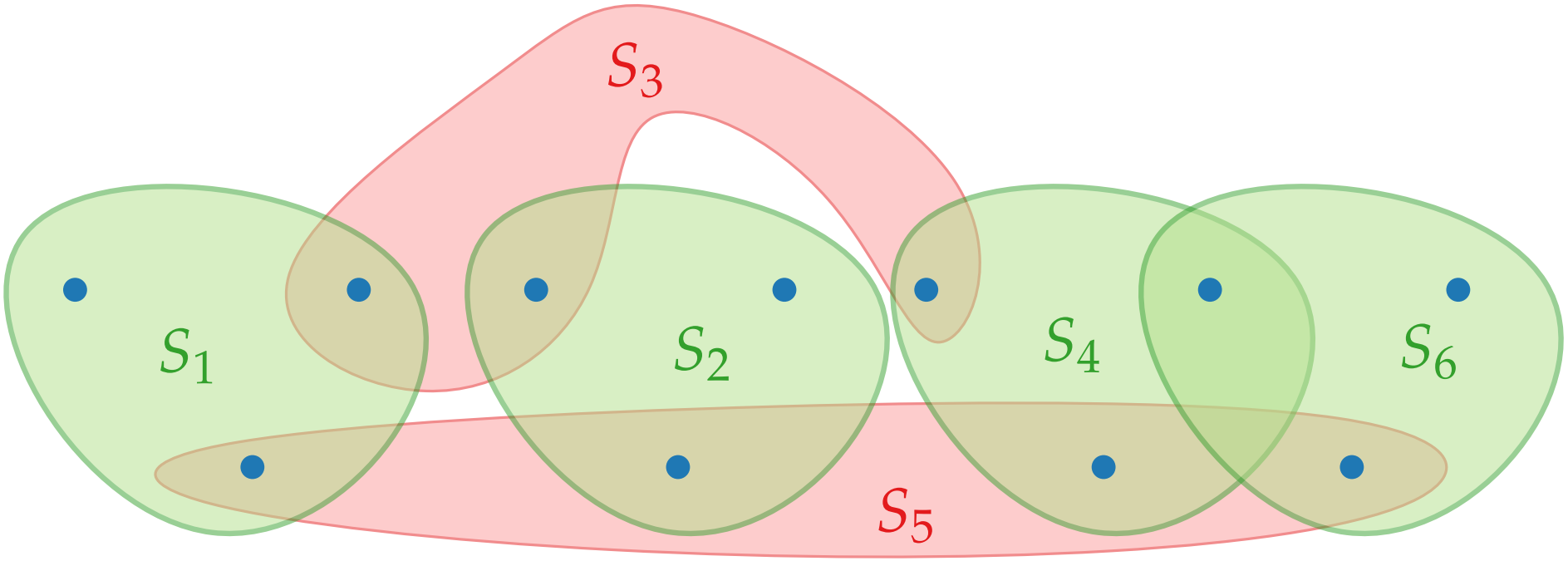
Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität



SetCover (card.)

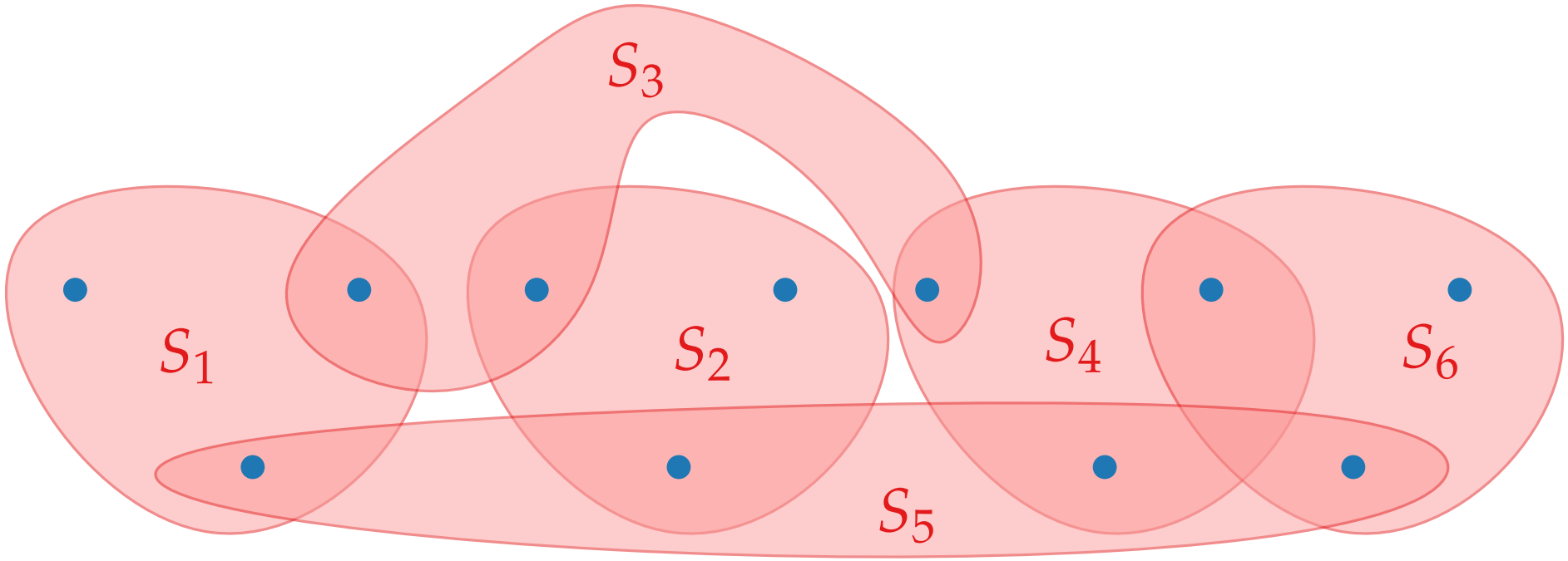
Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität



HittingSet

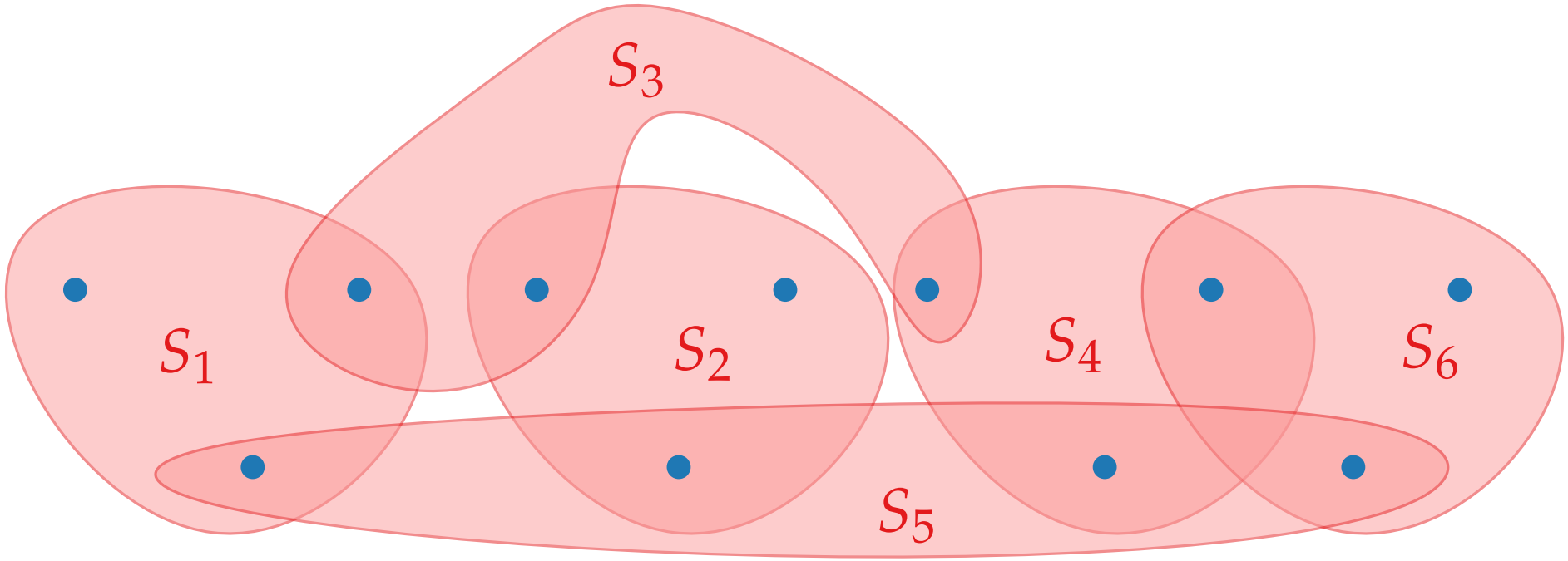
Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.



HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

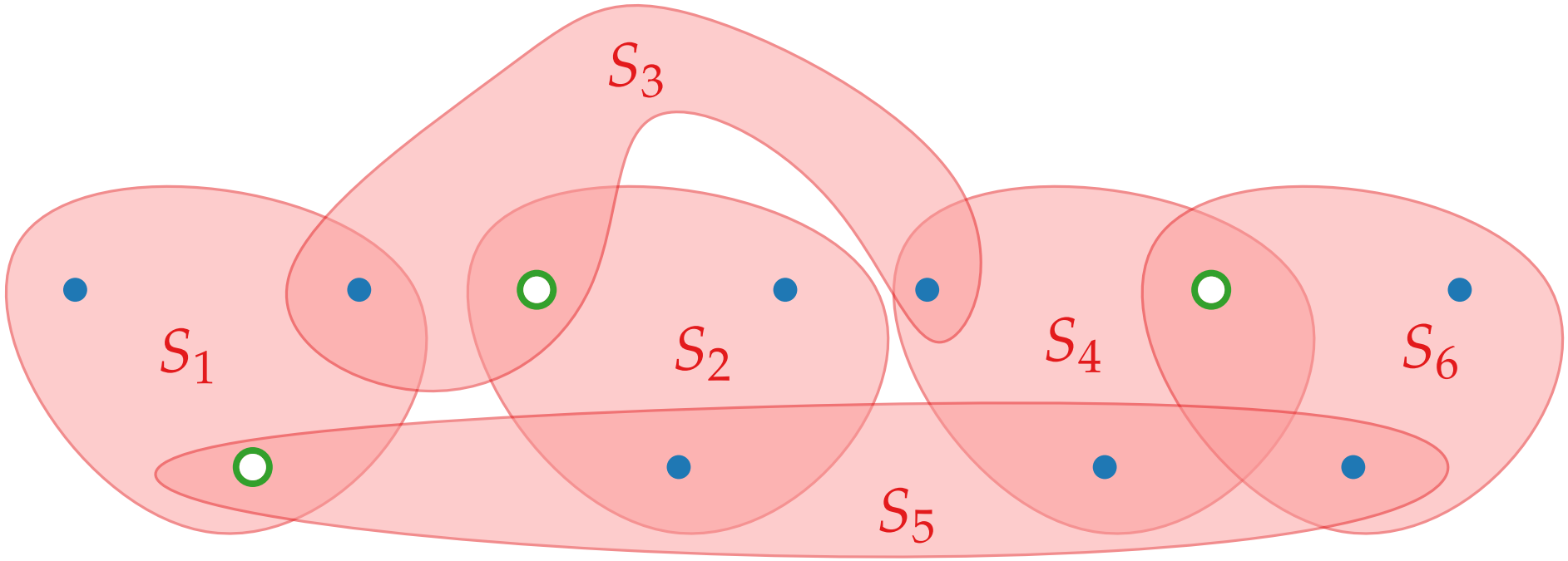
Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität



HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$ (d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

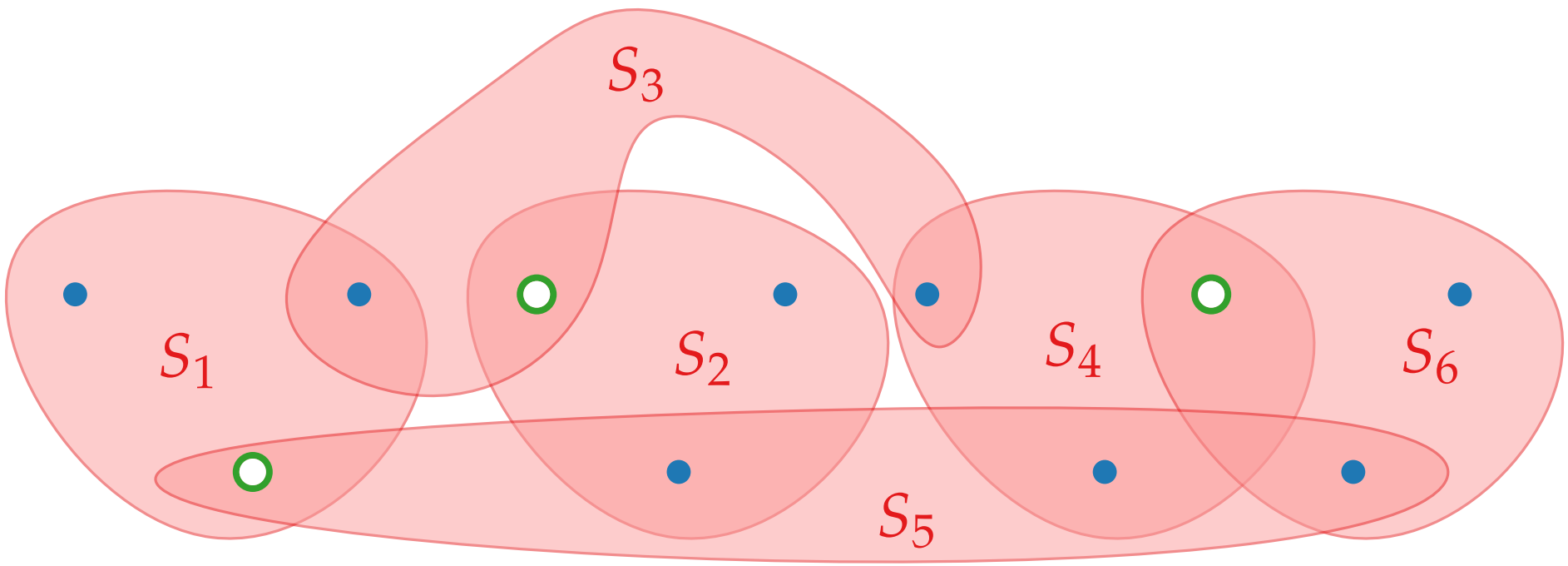


HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

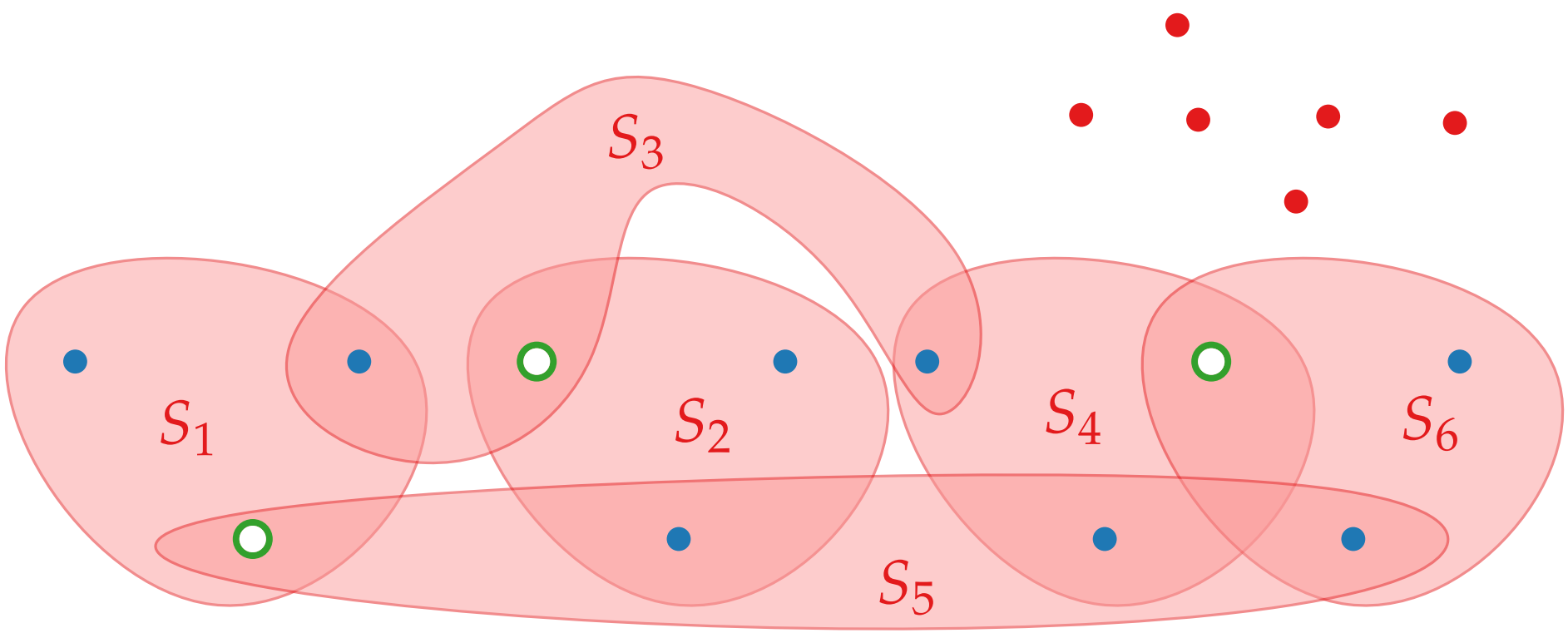


HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

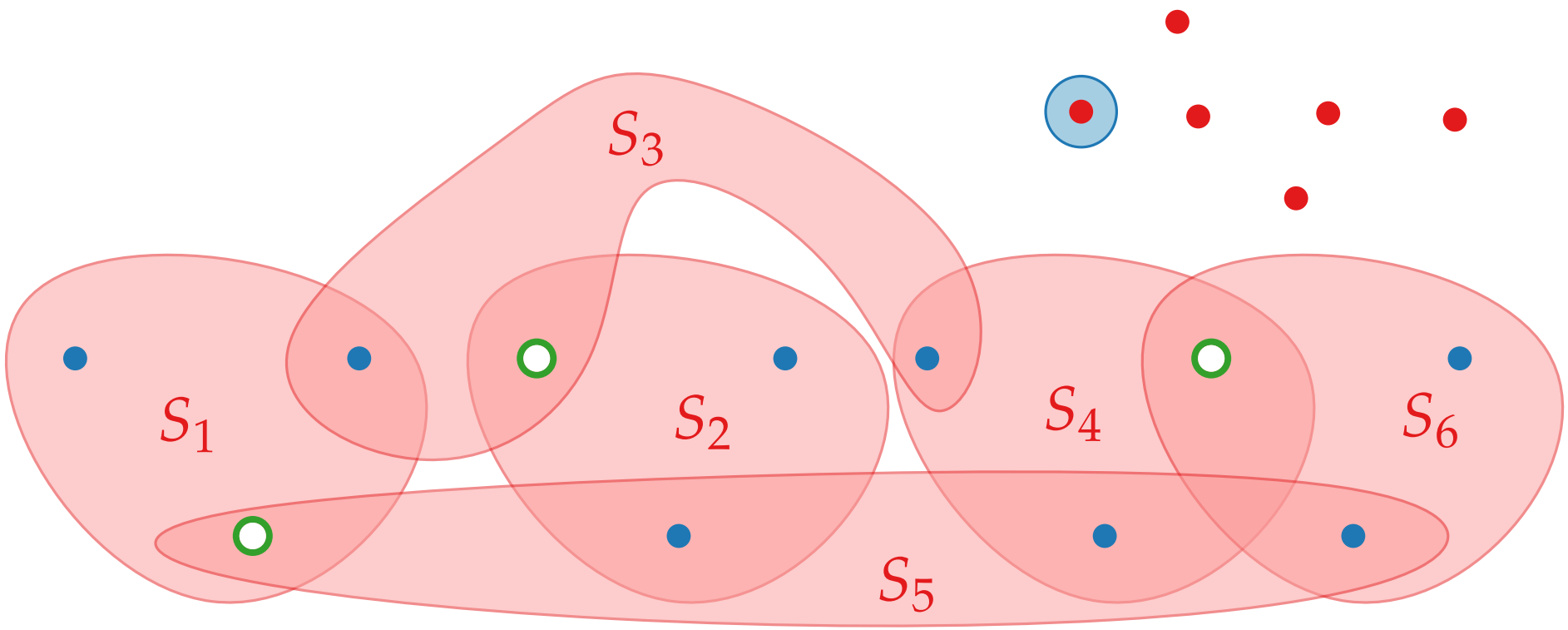


HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

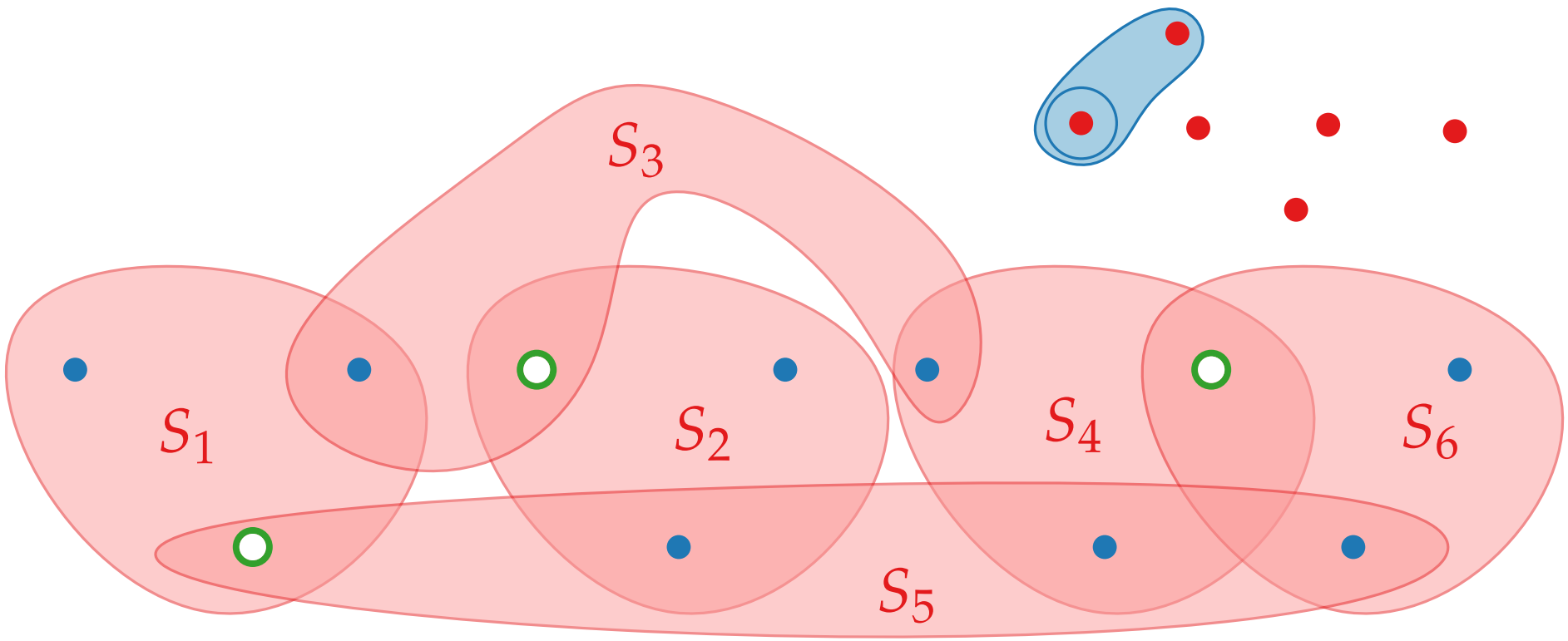


HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

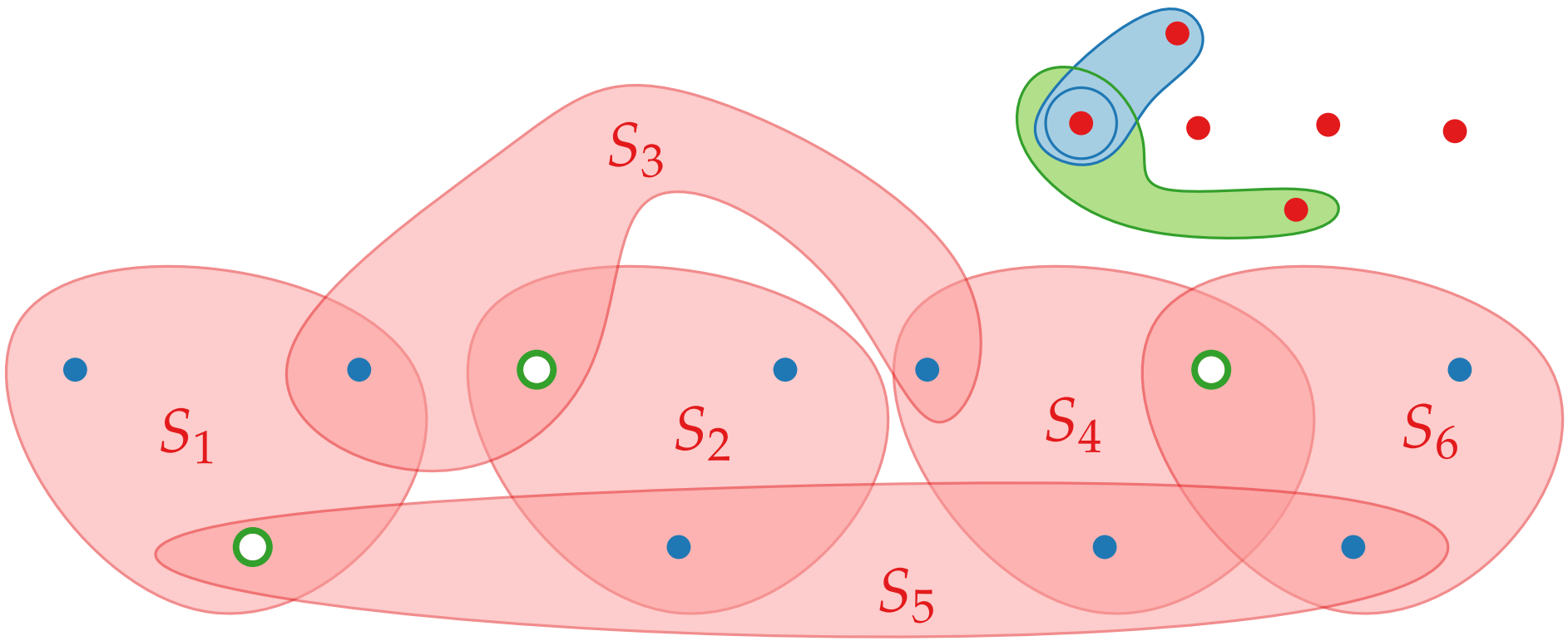


HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

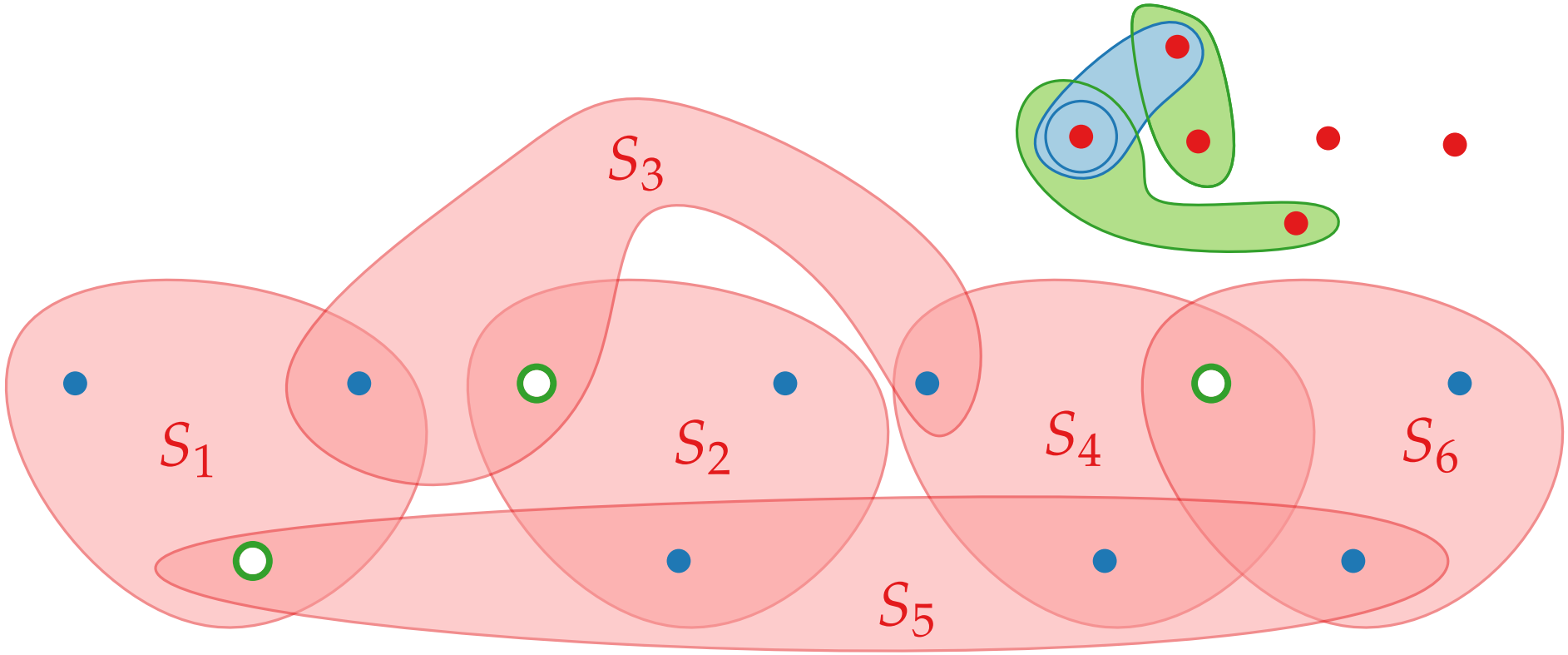


HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

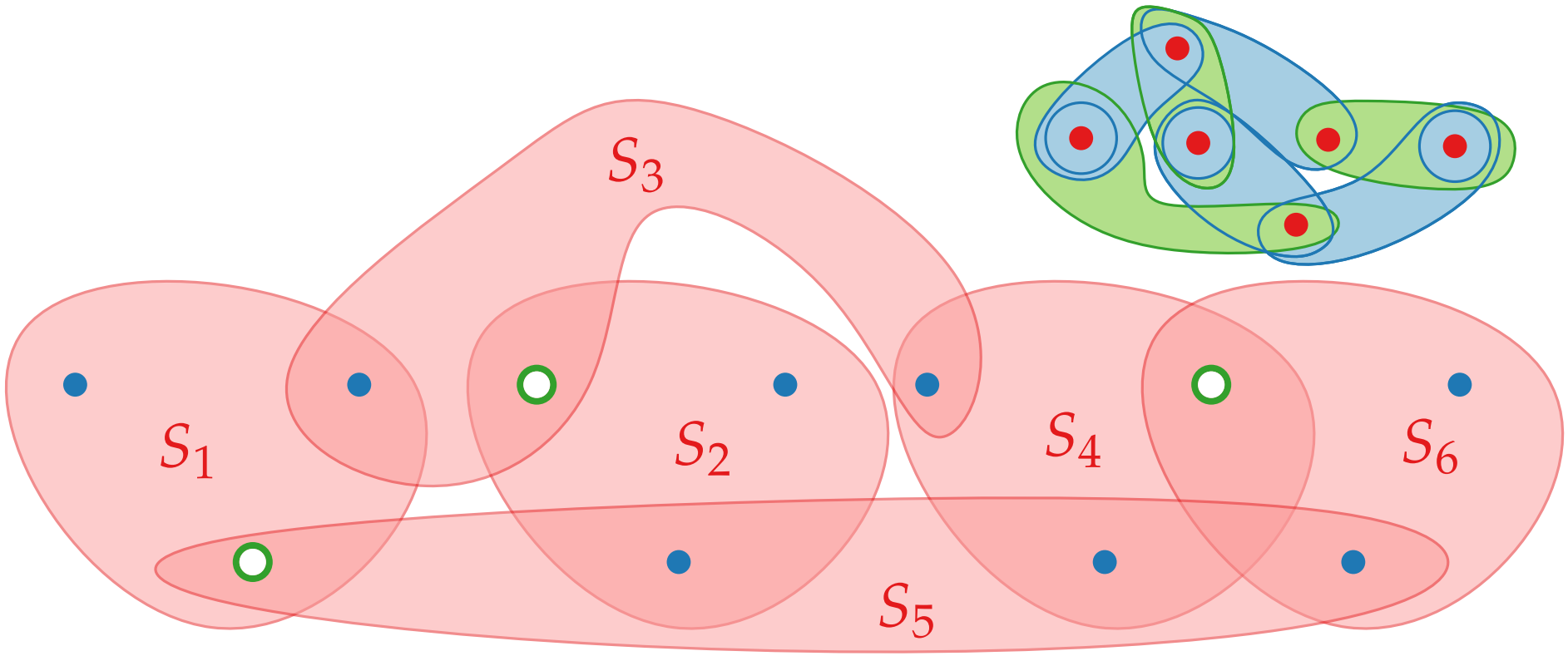


HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?



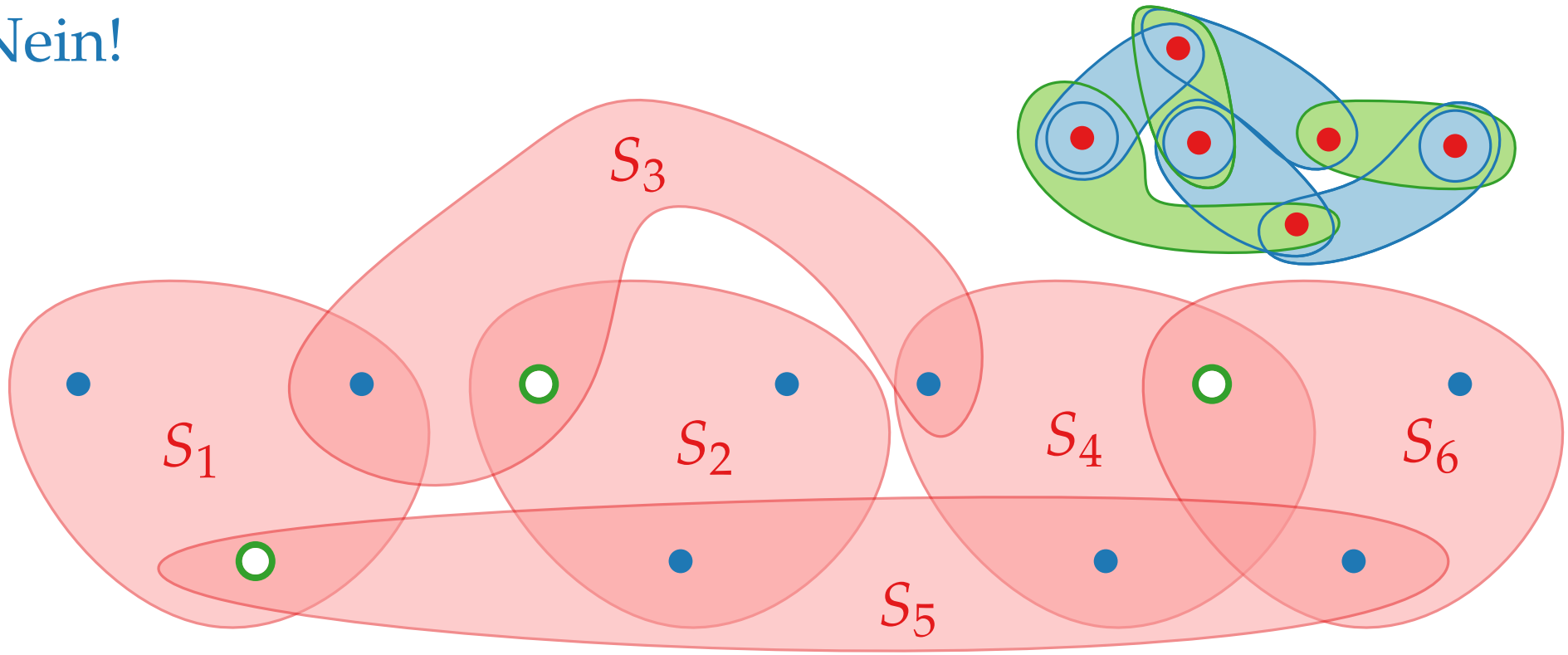
HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

Nein!



HittingSet

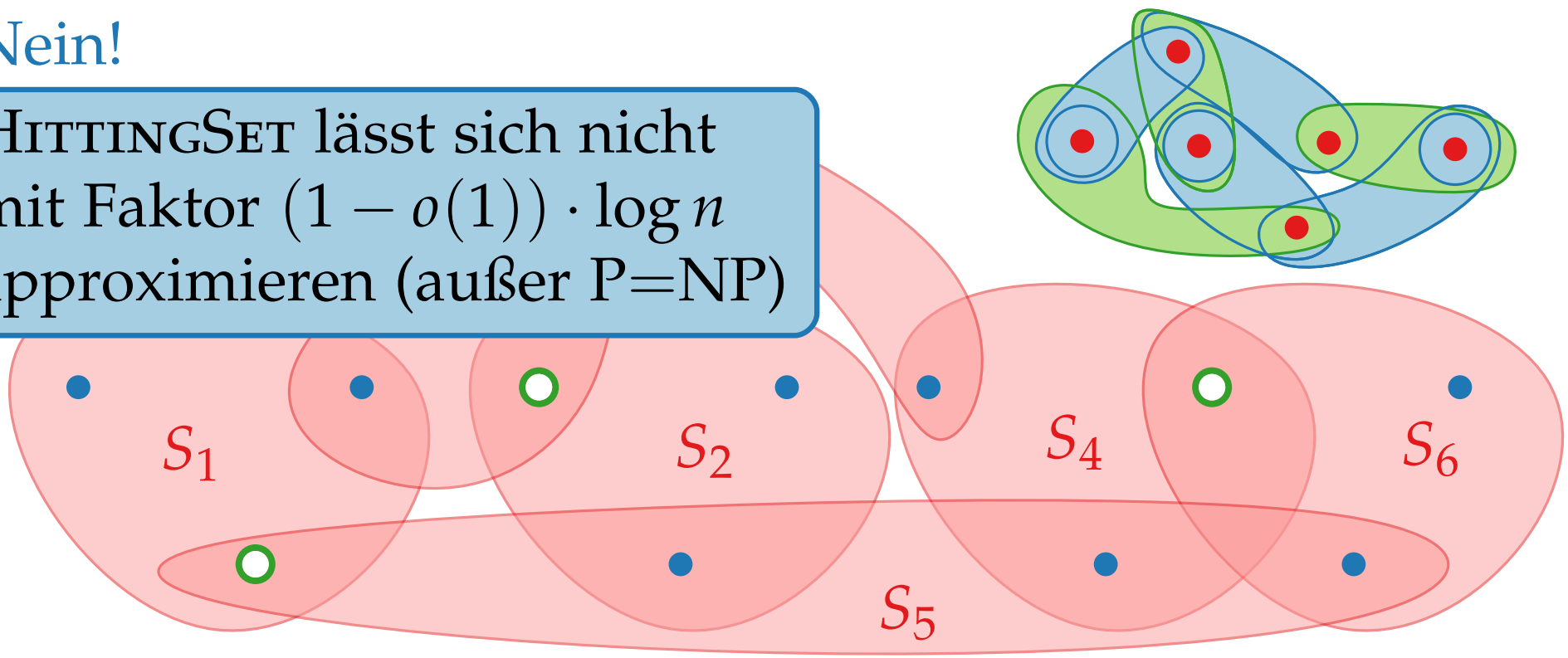
Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$ (d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

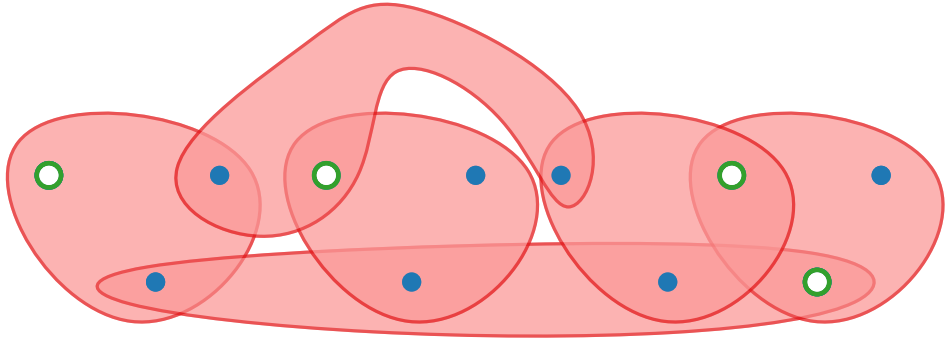
Nein!

HittingSet lässt sich nicht mit Faktor $(1 - o(1)) \cdot \log n$ approximieren (außer P=NP)



Lokale Suche für HittingSet

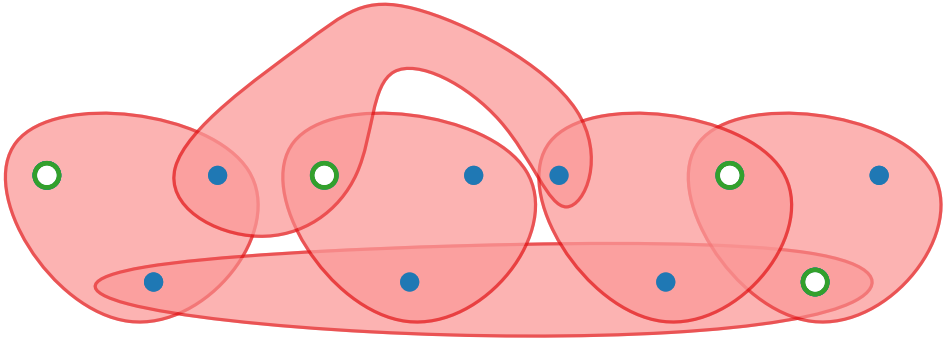
$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

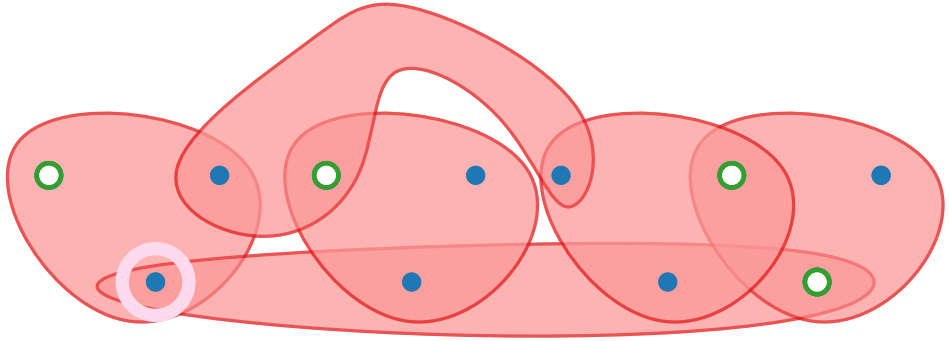
Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

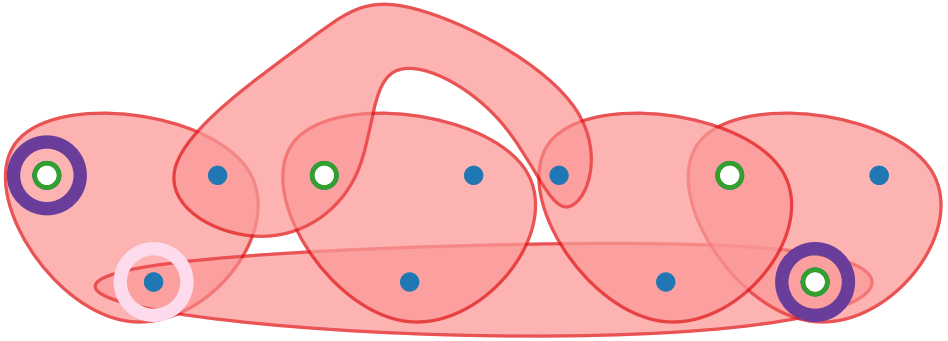
Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$,



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

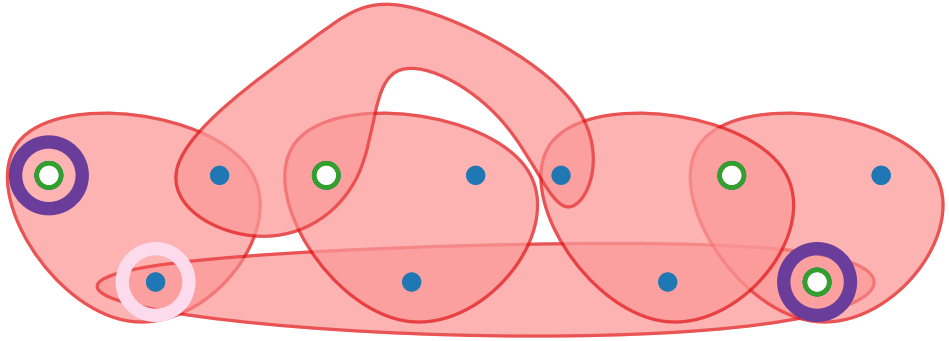
Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$,



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

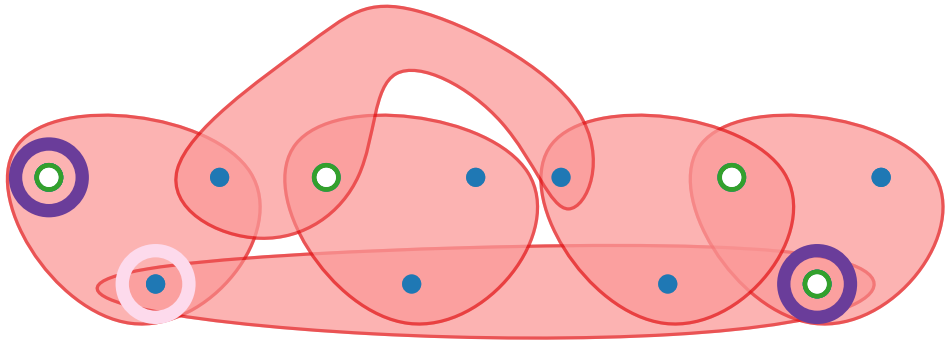
Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

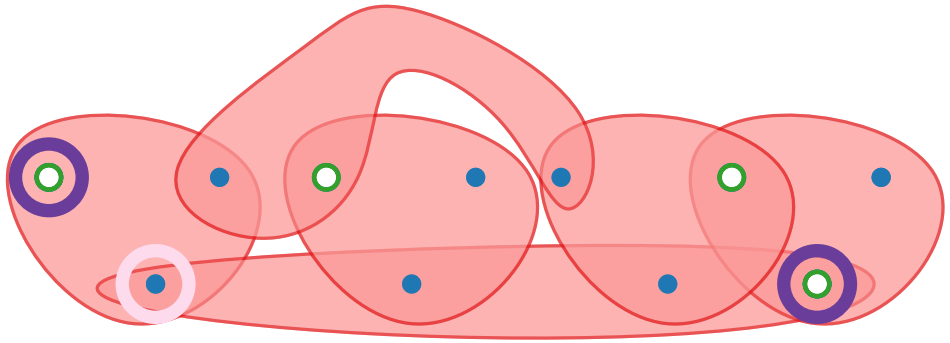


Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.



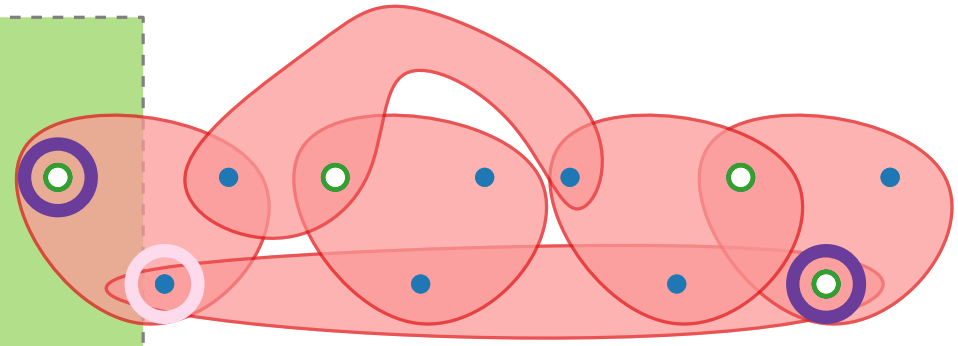
Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$



Lokale Suche für HittingSet

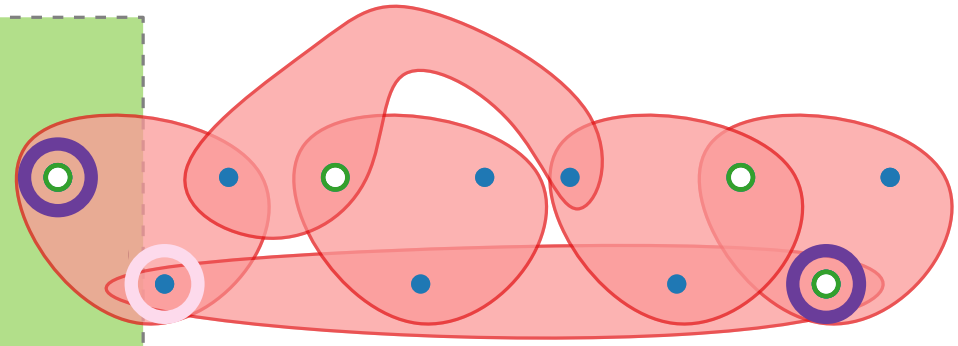
$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

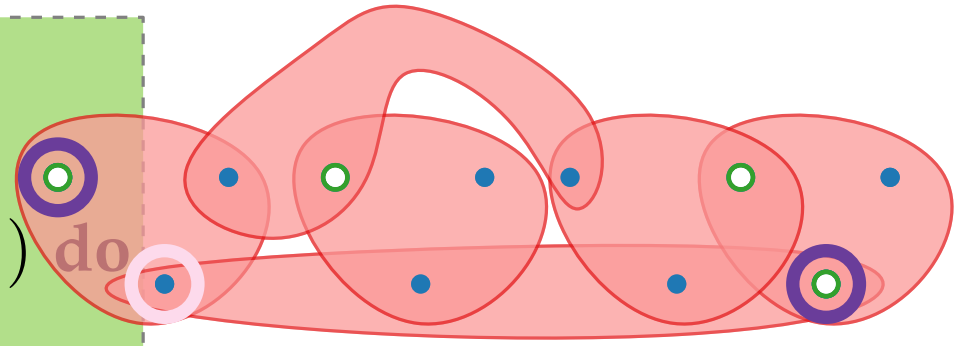
Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$

while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

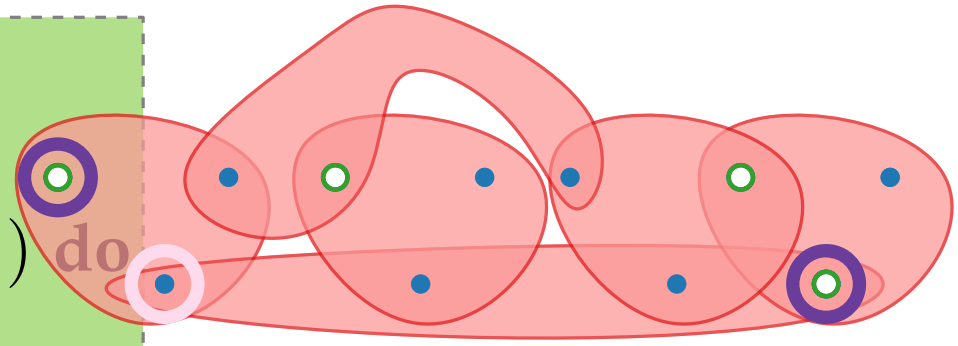
Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$

while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**

$U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

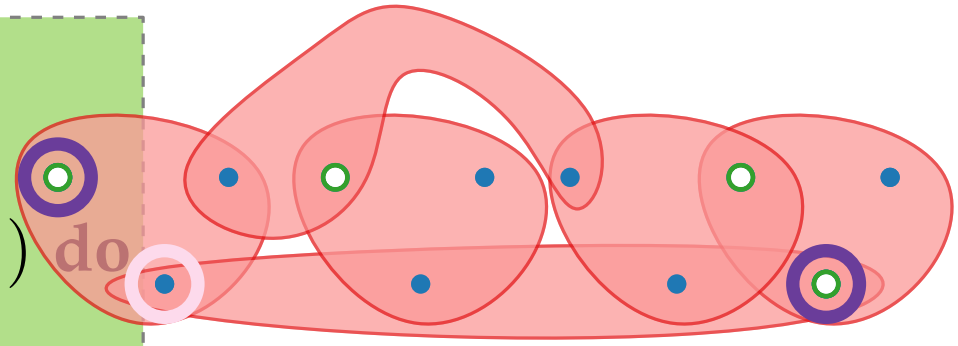
LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$

while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**

$U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$

return U'



Lokale Suche für HittingSet

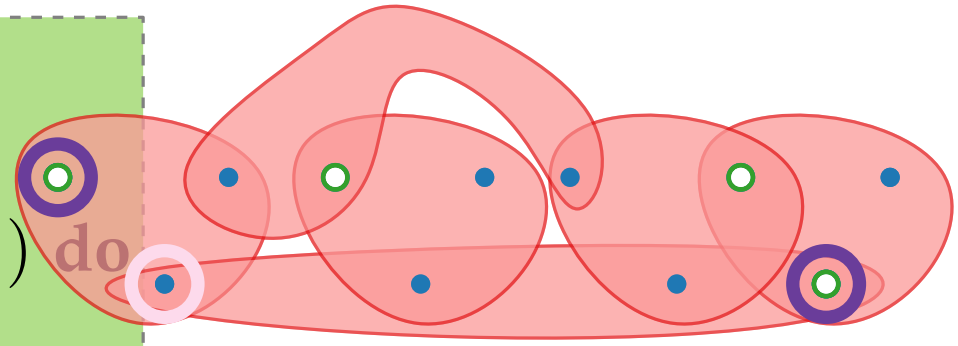
$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$
while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**
  $U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$
return U'



Laufzeit?

Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein **k-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

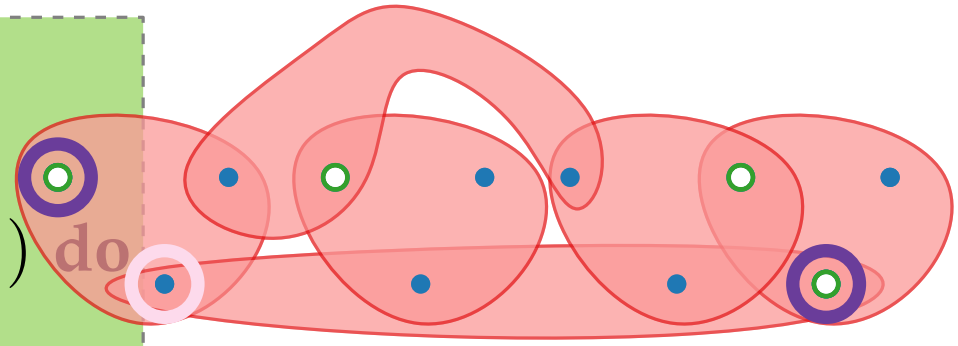
LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$

while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**

$U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$

return U'



Laufzeit? # mögliche k-flips: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \rightsquigarrow O(n^{2k-1})$ Zeit (Num.)

Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein **k-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

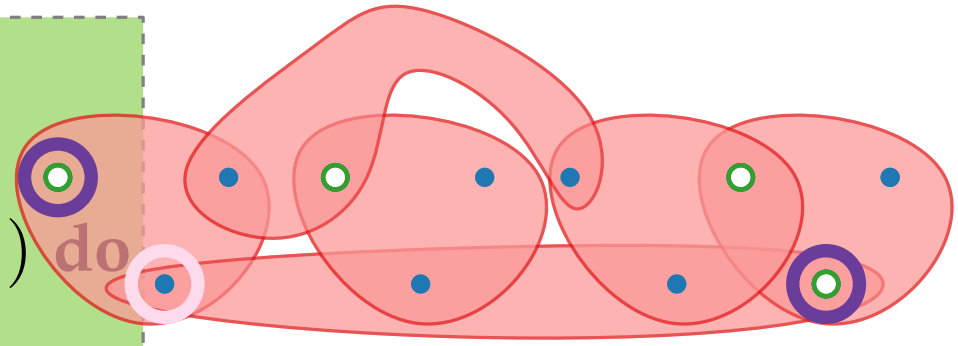
LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$

while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**

$U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$

return U'



Laufzeit? # mögliche k-flips: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \rightsquigarrow O(n^{2k-1})$ Zeit (Num.)

Validität von (U^*, U'') überprüfen: $O(nm)$ Zeit

Lokale Suche für HittingSet

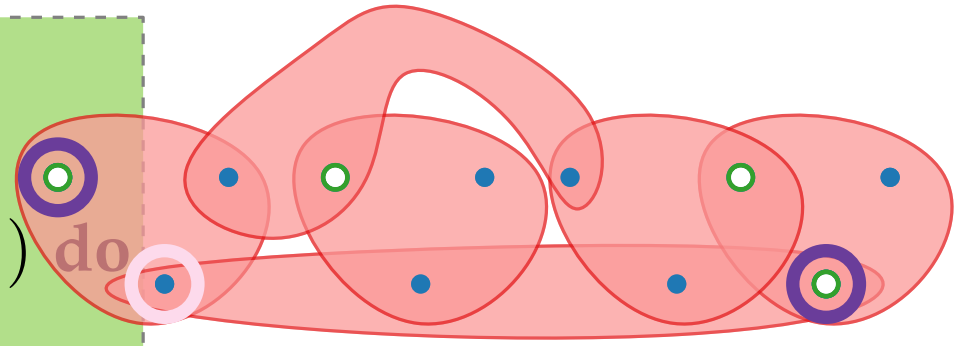
$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$
while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**
  $U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$
return U'



Laufzeit? # mögliche k-flips: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \rightsquigarrow O(n^{2k-1})$ Zeit (Num.)
Validität von (U^*, U'') überprüfen: $O(nm)$ Zeit
$\rightsquigarrow O(mn^{2k+1})$ Gesamtzeit

Lokale Suche für HittingSet

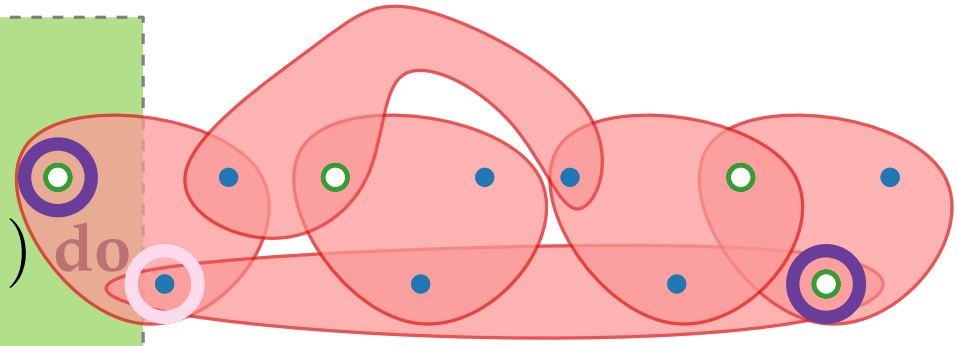
$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein **k-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$
while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**
  $U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$
return U'

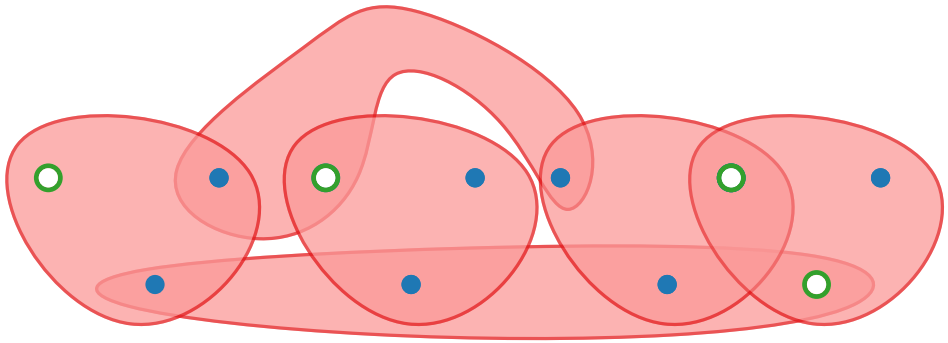


Laufzeit? # mögliche k-flips: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \rightsquigarrow O(n^{2k-1})$ Zeit (Num.)
Validität von (U^*, U'') überprüfen: $O(nm)$ Zeit
$\rightsquigarrow O(mn^{2k+1})$ Gesamtzeit

Aber wie analysieren wir die Lösungsqualität?

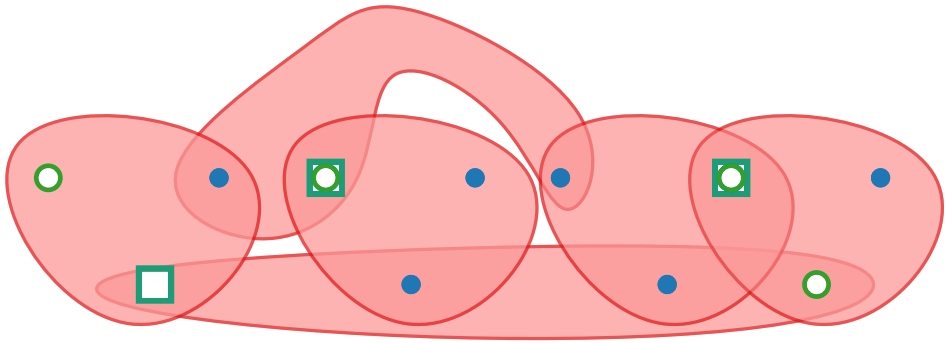
Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.



Lokale vs. optimale Lösung

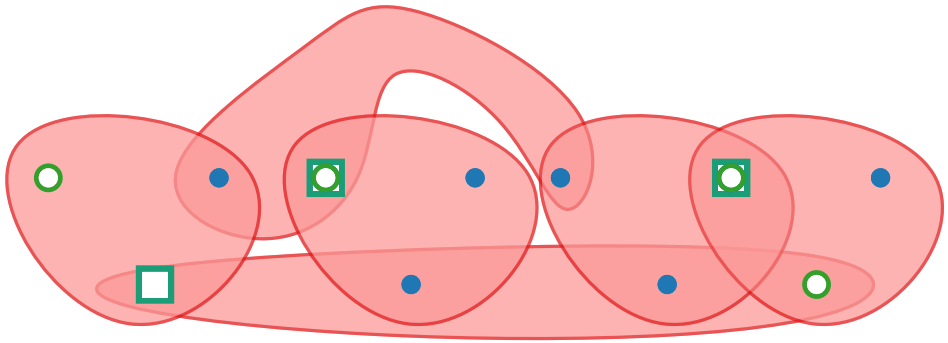
Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.



Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

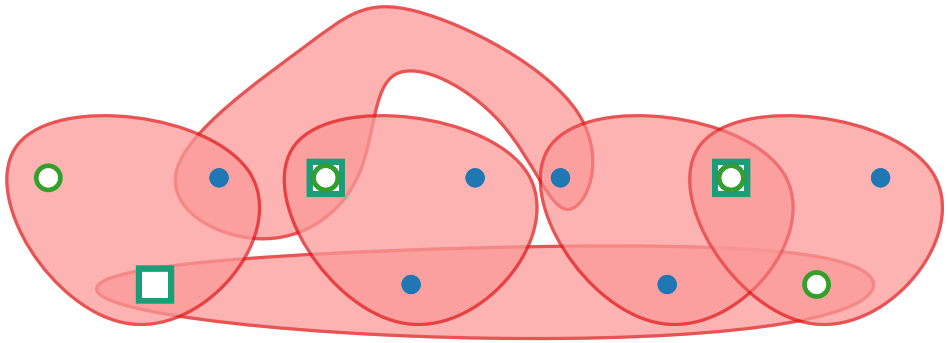
Private Teilmengen



Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

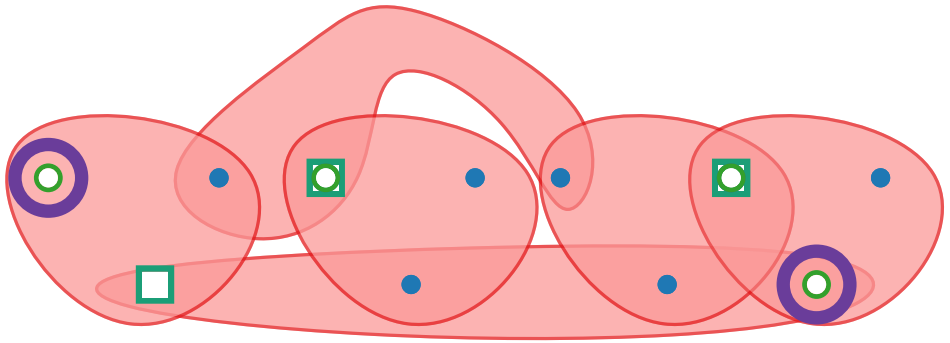
Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$



Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

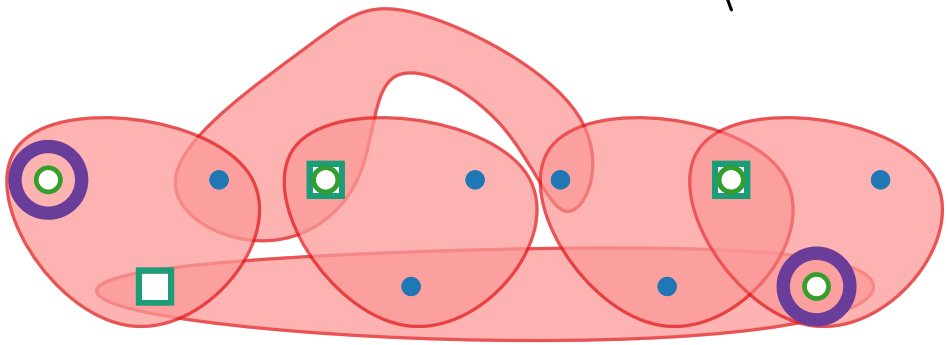
Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$



Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

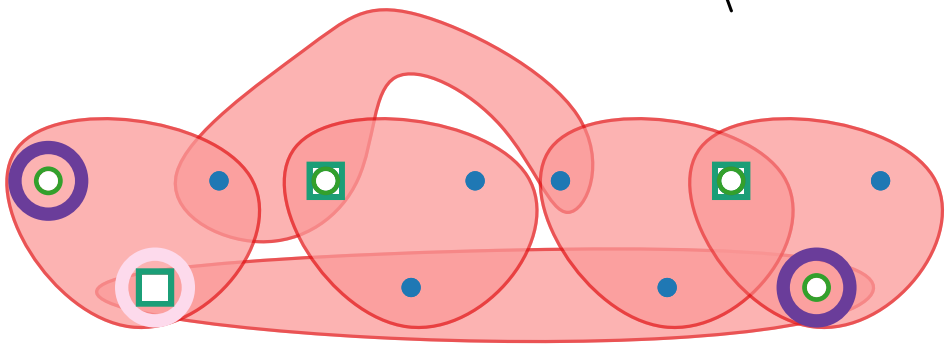
Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.



Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

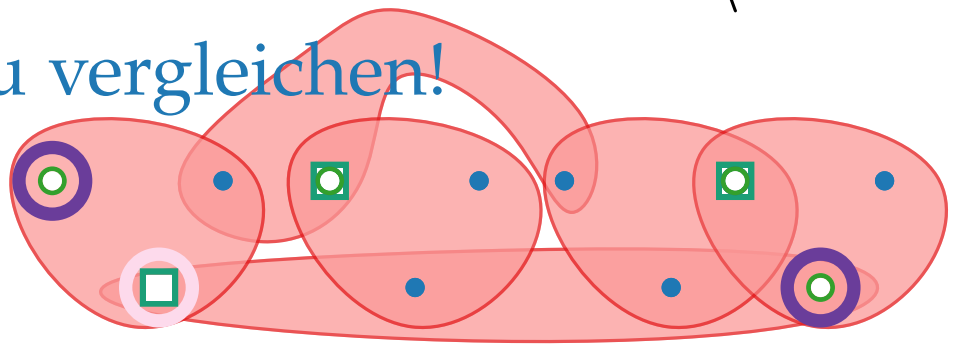


Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



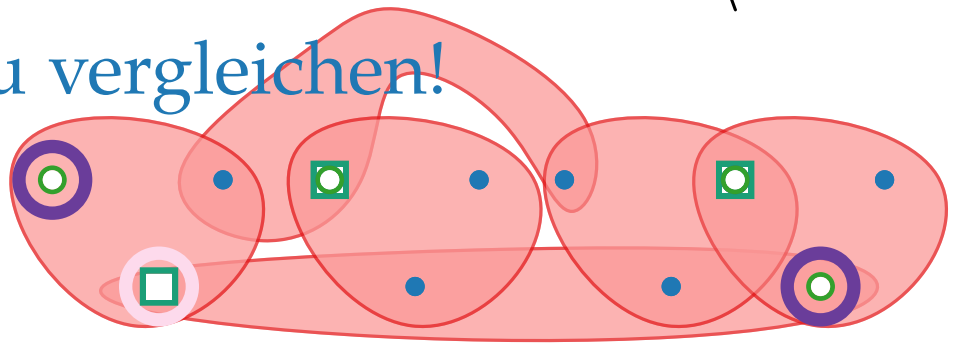
Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!

Austauschgraph H:

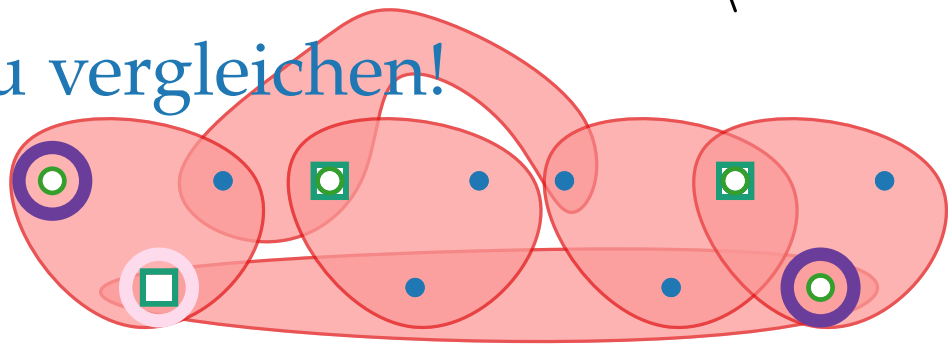


Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

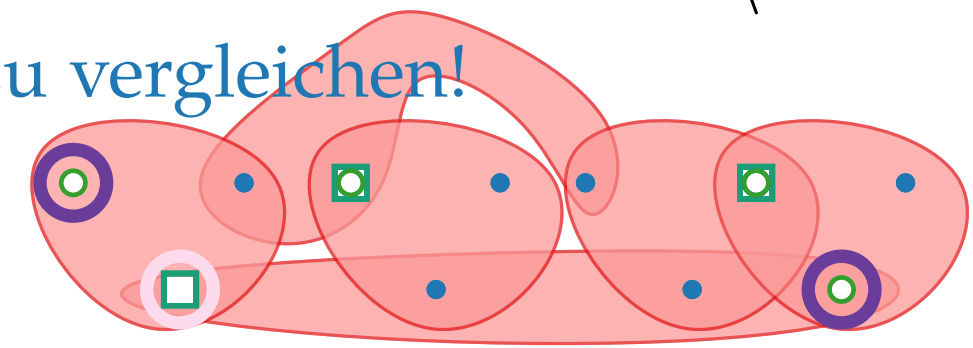
- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

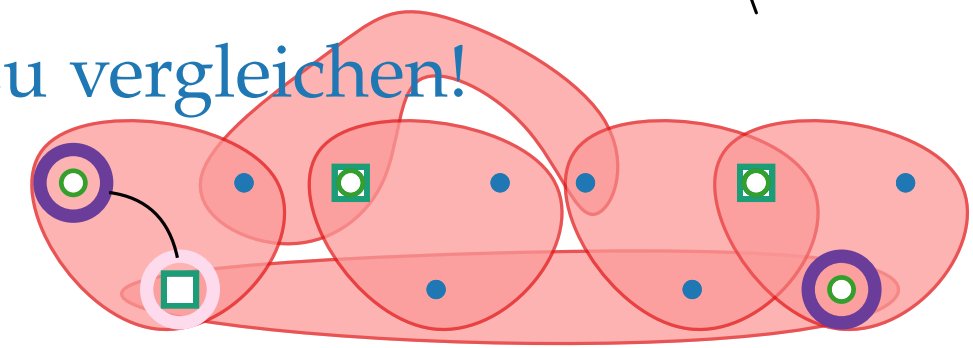
- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

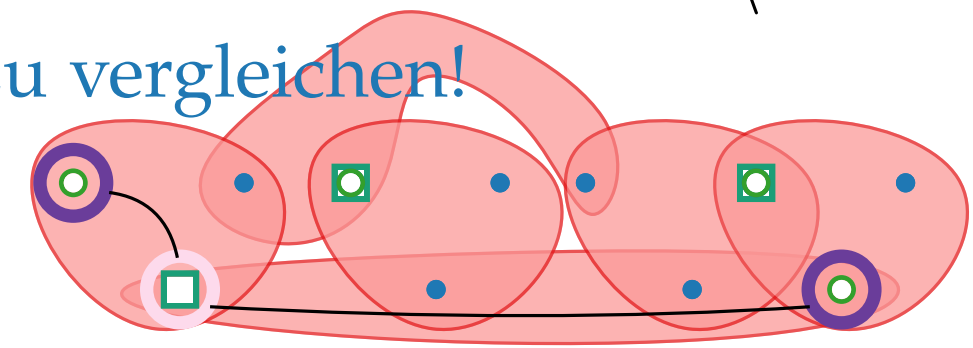
- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

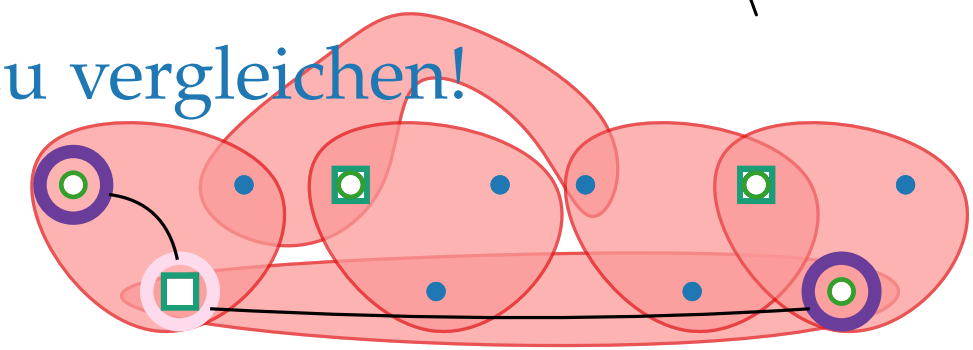
- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

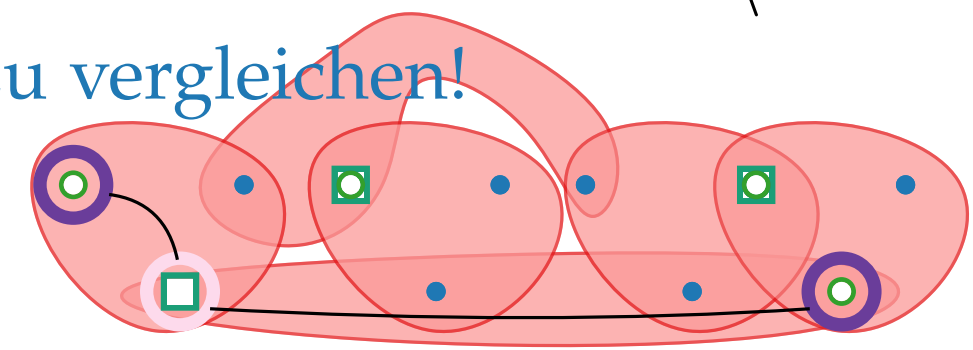
Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$:

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

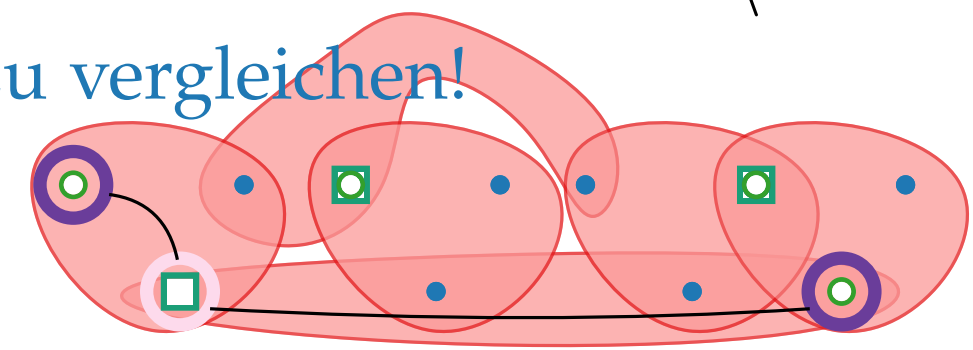
Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq$

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

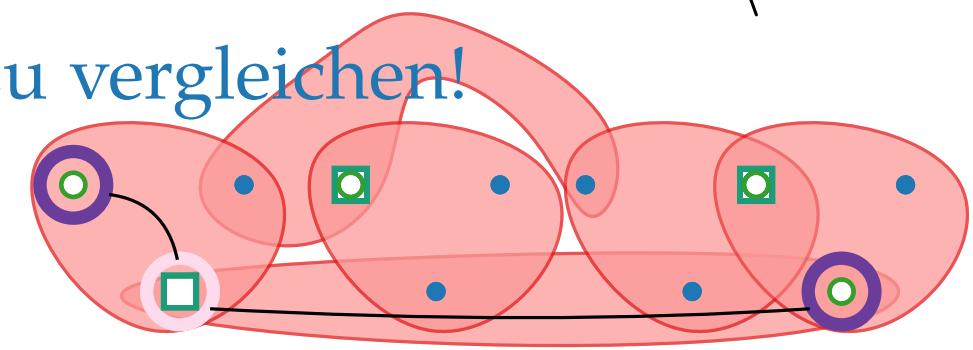
Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

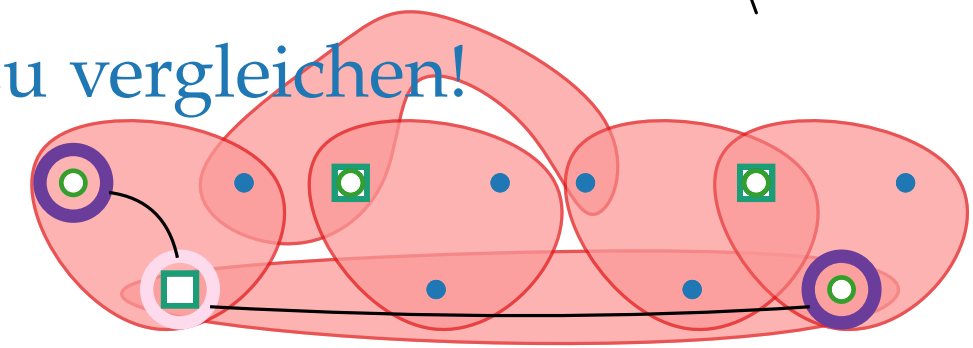
Beweis.

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

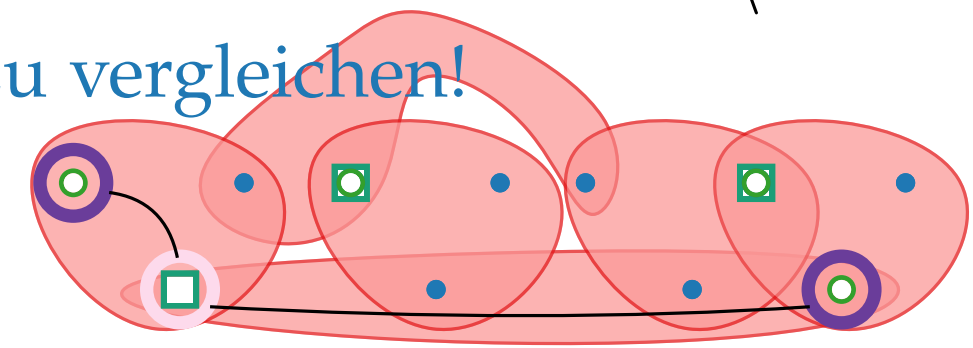
Beweis. Folgt von lokaler Optimalität. $\square$

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Beweis. Folgt von lokaler Optimalität. □

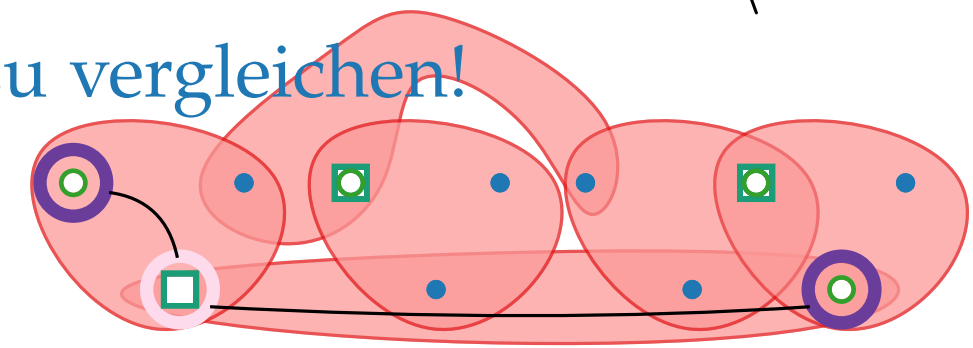
Was bringt uns diese „Nachbarschaftserweiterung“ Beobachtung?

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

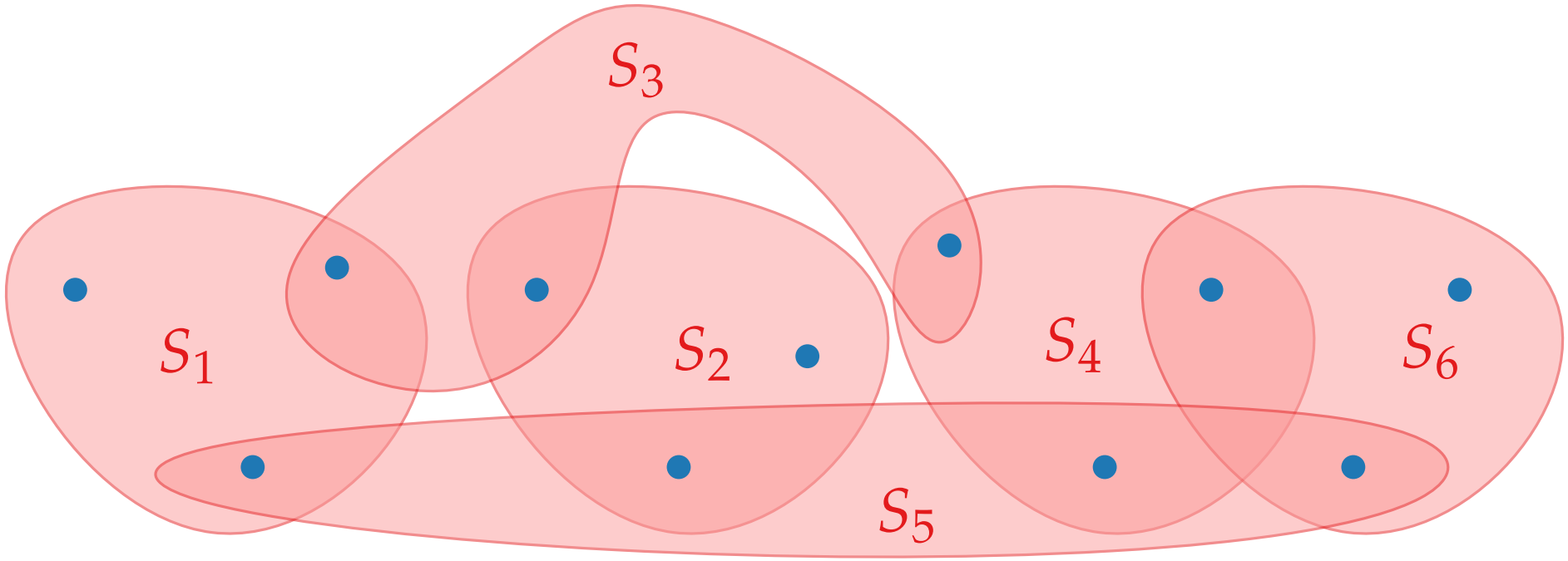
Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Beweis. Folgt von lokaler Optimalität. □

Was bringt uns diese „Nachbarschaftserweiterung“ Beobachtung? $\rightsquigarrow$ Eingeschränkte Instanzen mit „schönen“ Austauschgraphen!

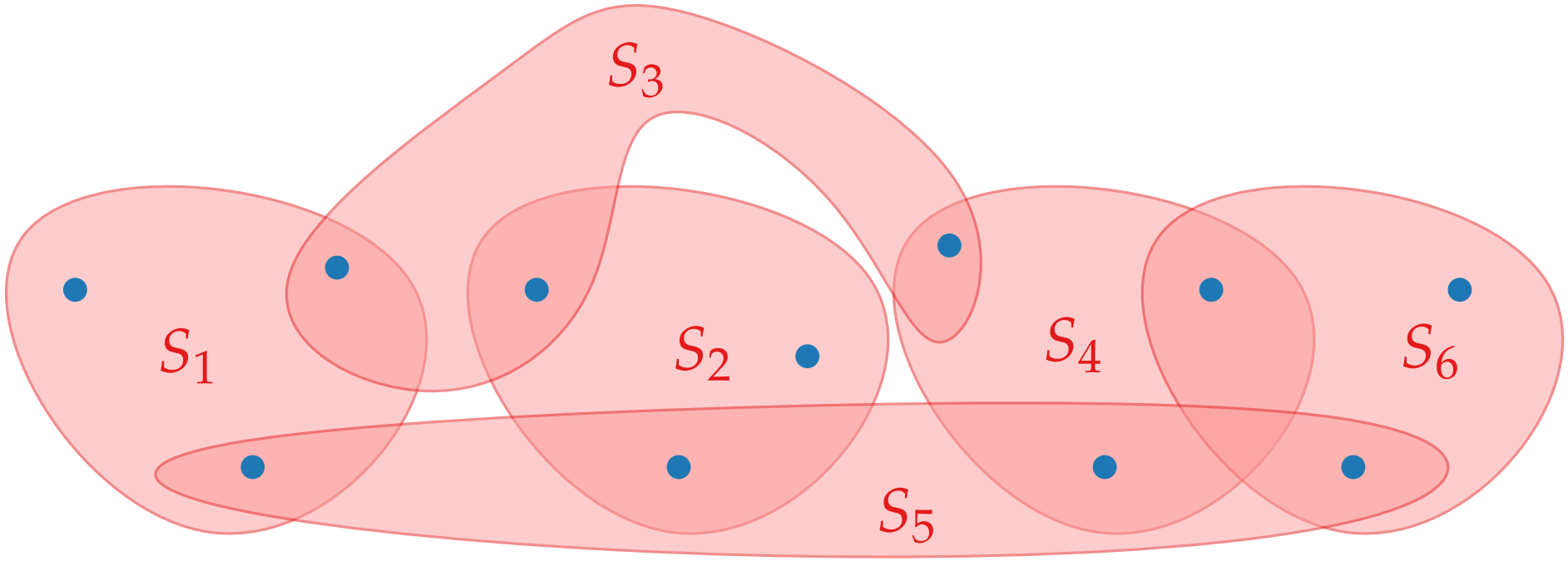
Geometrisches HittingSet

Gegeben sei eine Grundmenge von **Objekten** U (z.B. Punkte in $\mathbb{R}^2$



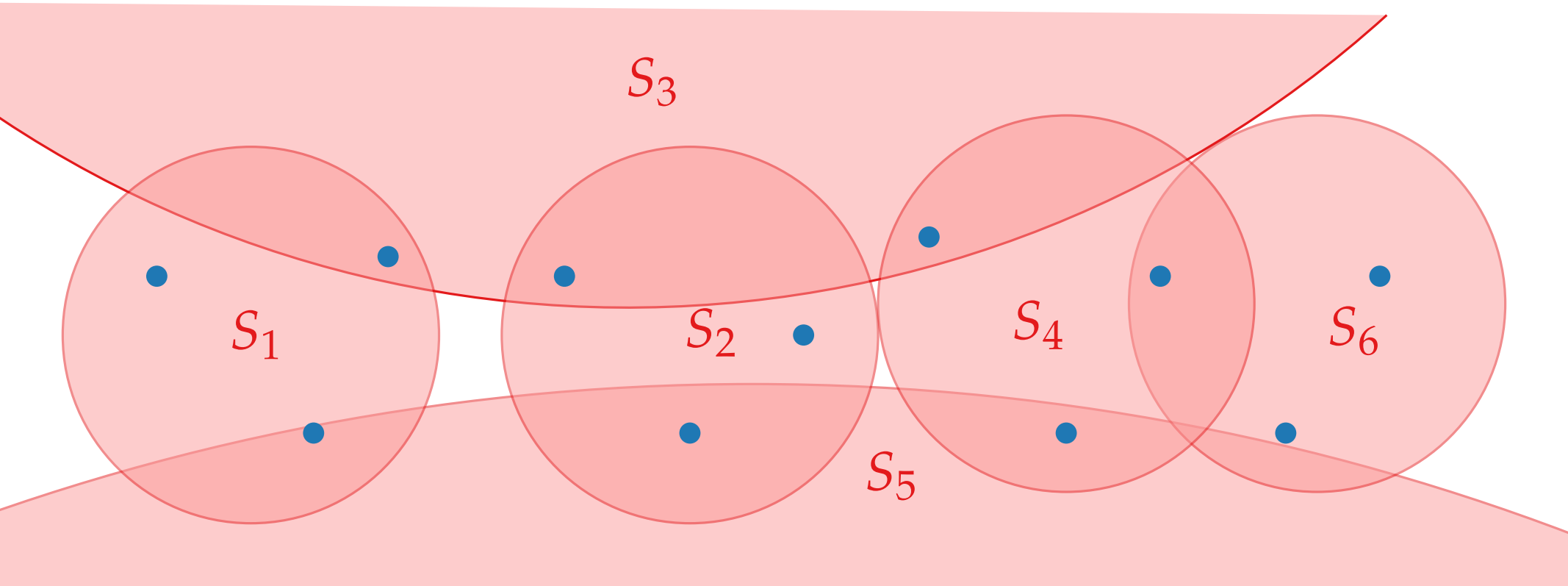
Geometrisches HittingSet

Gegeben sei eine Grundmenge von **Objekten** U (z.B. Punkte in $\mathbb{R}^2$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Bereichen** (z.B. Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit $\bigcup U \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.



Geometrisches HittingSet

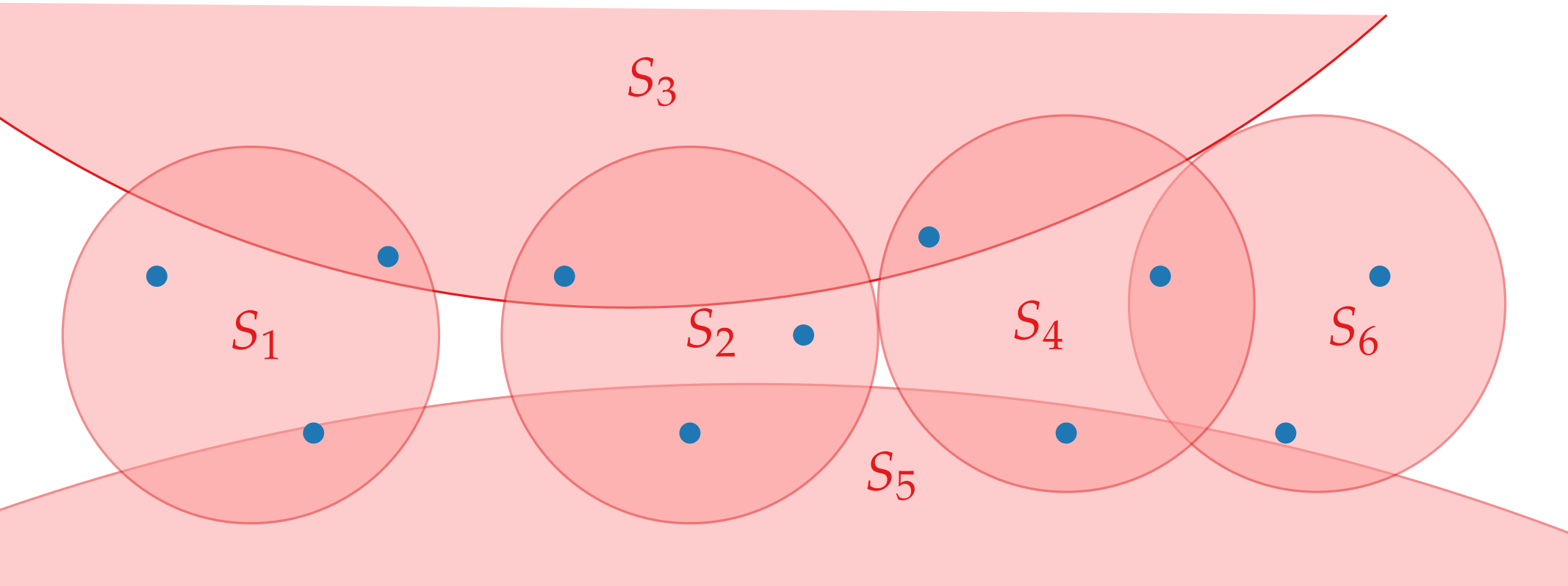
Gegeben sei eine Grundmenge von **Objekten** U (z.B. Punkte in $\mathbb{R}^2$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Bereichen** (z.B. Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit $\bigcup U \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.



Geometrisches HittingSet

Gegeben sei eine Grundmenge von **Objekten** U (z.B. Punkte in $\mathbb{R}^2$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Bereichen** (z.B. Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit $\bigcup U \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$ (d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \cap S \neq \emptyset$) minimaler Kardinalität



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,

Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

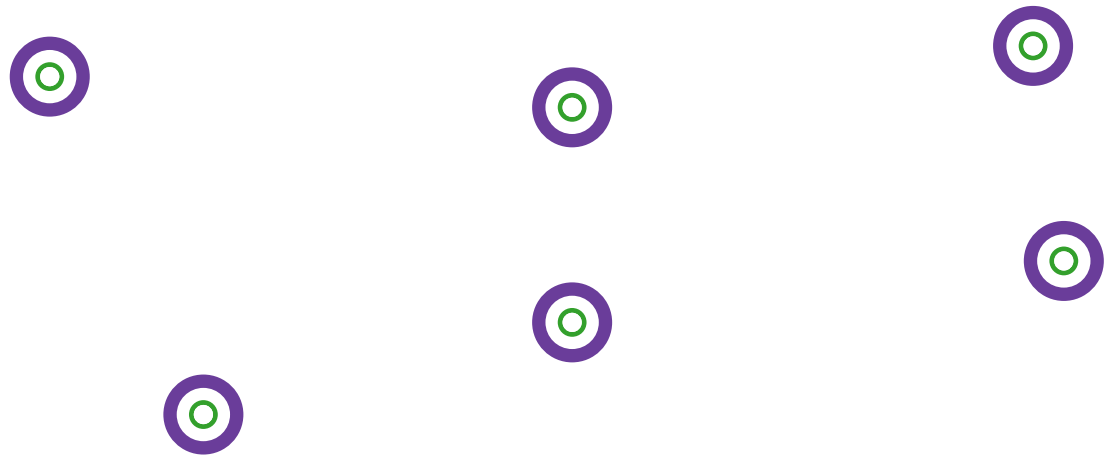
Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

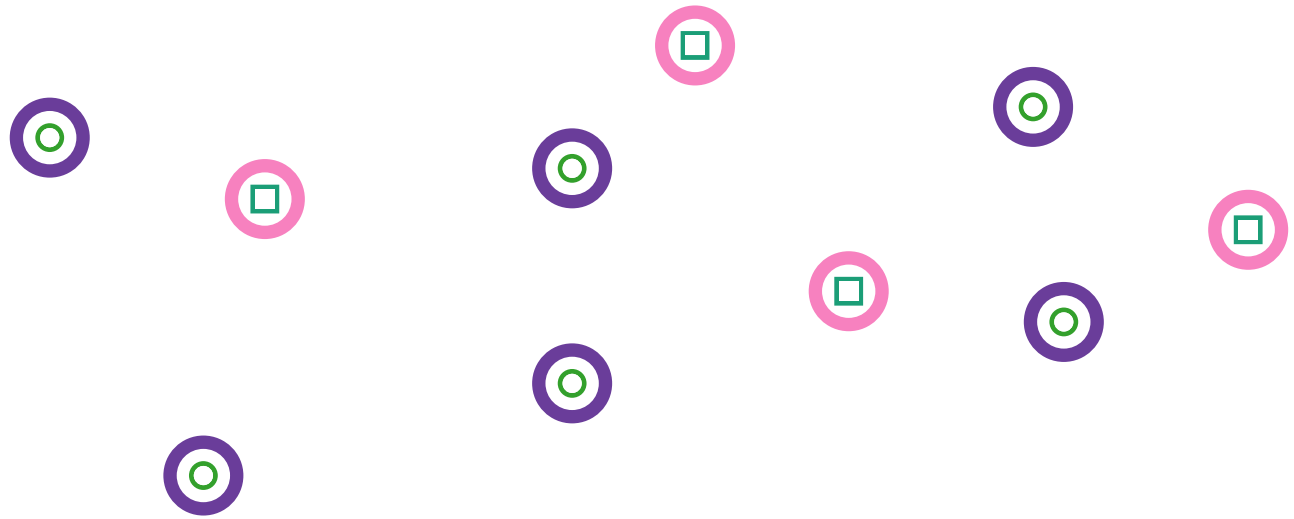


Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?



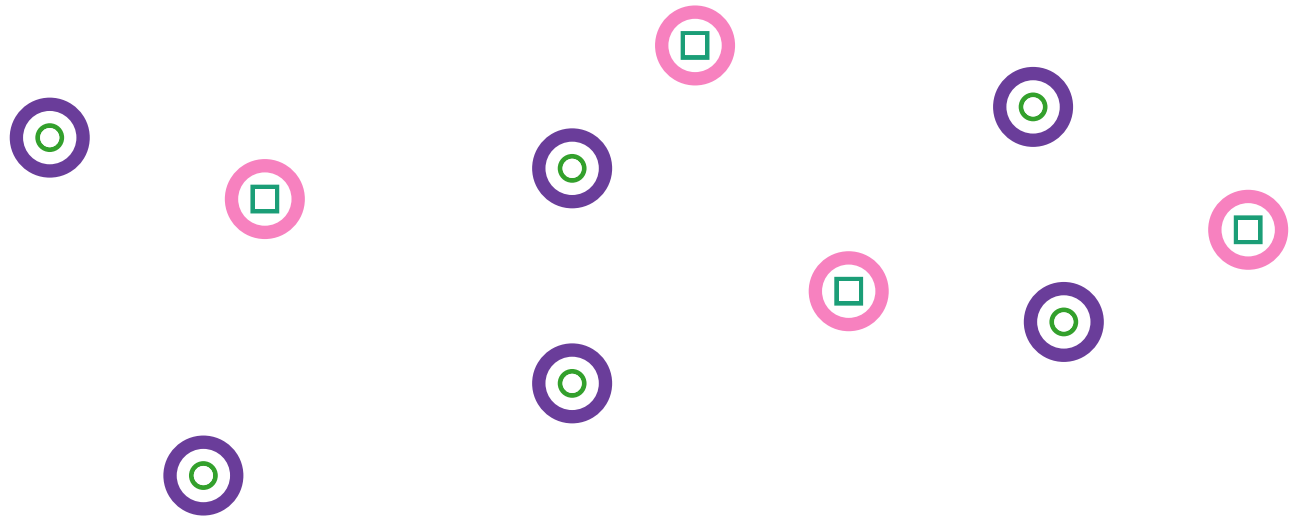
Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.



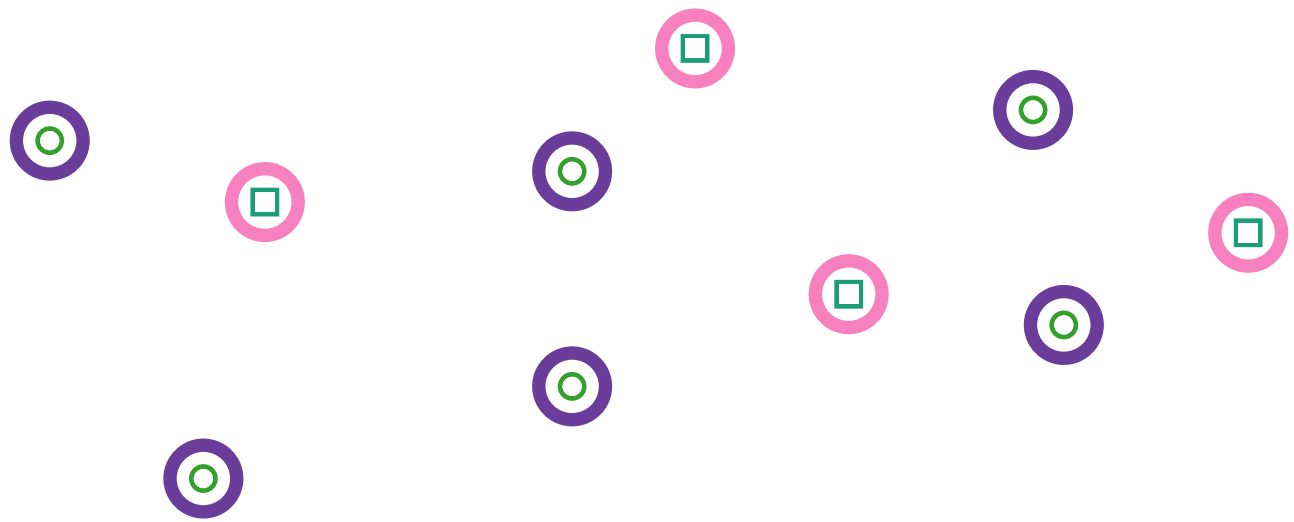
Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.
$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

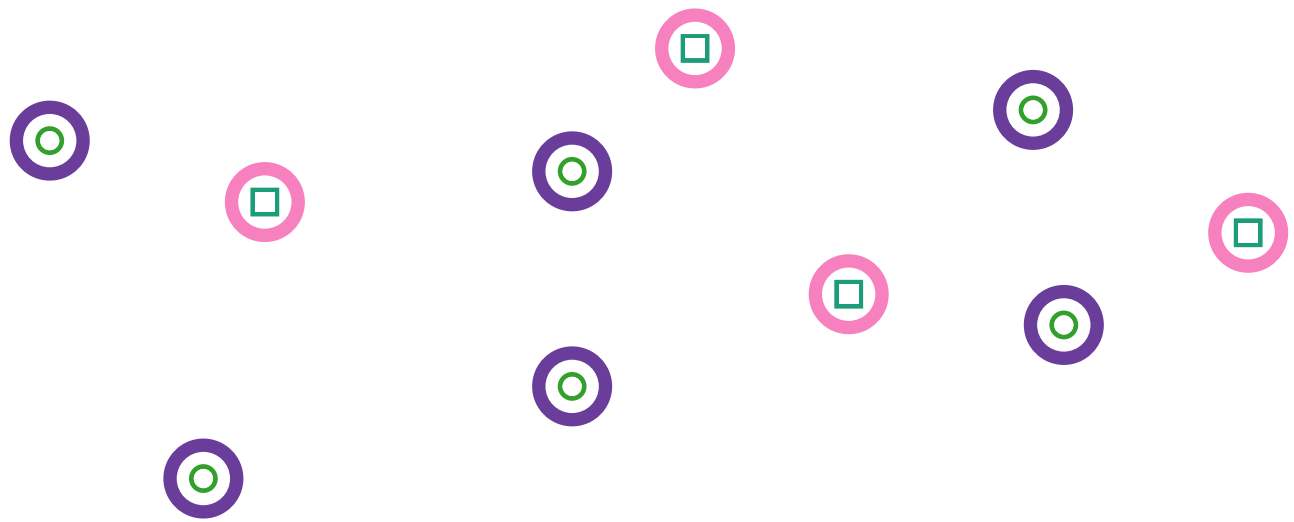
Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

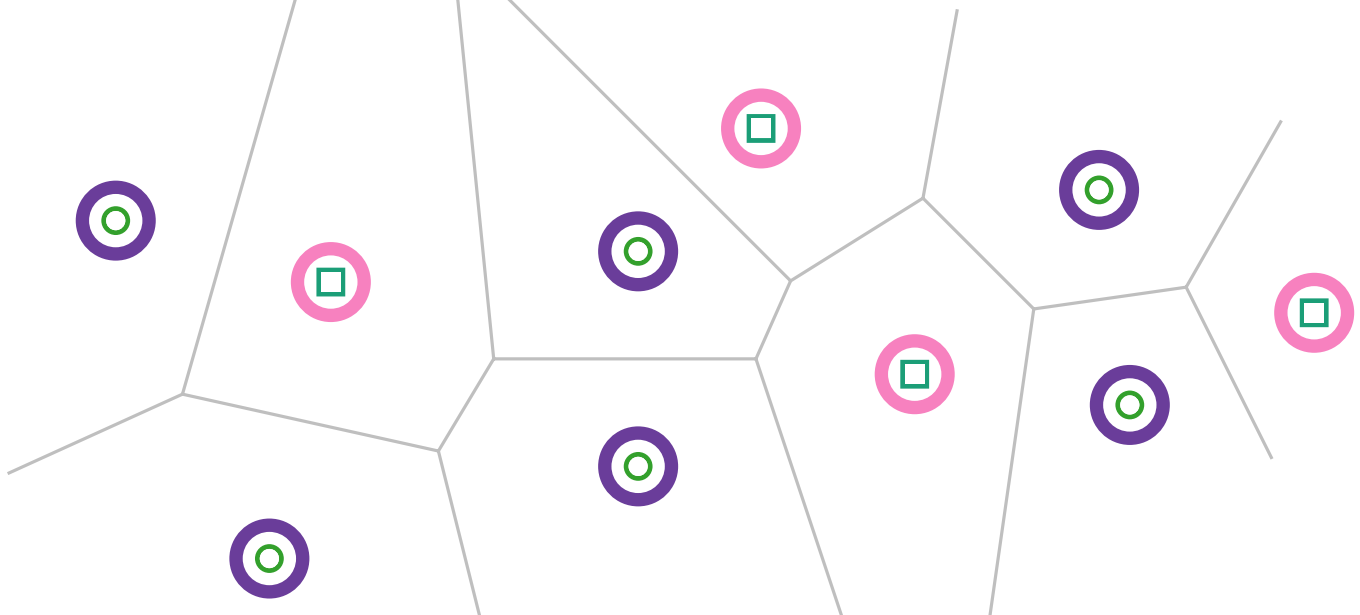
Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

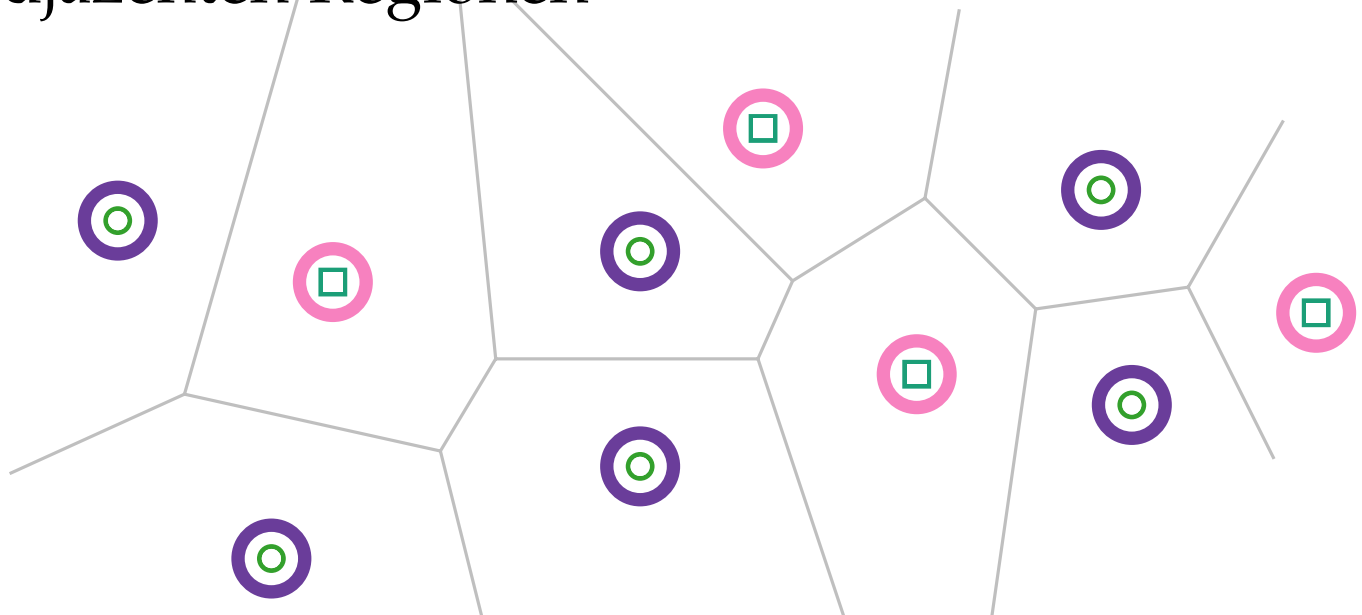
Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind

Verbinde Punkte mit adjazenten Regionen



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

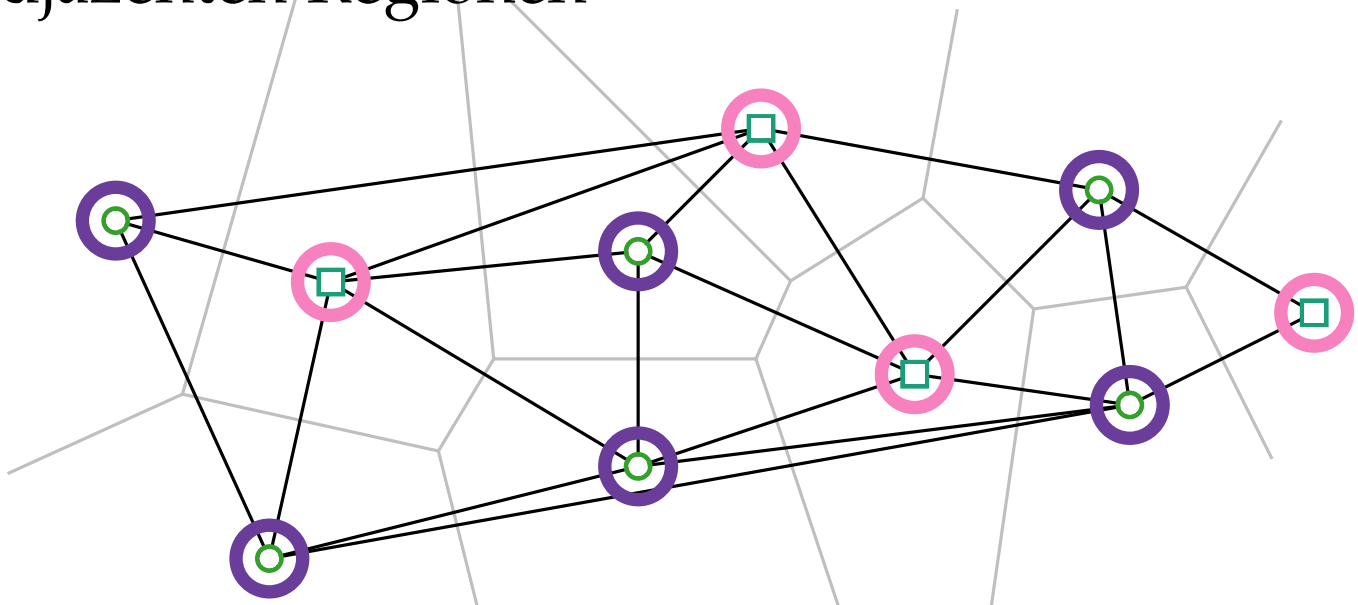
Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind

Verbinde Punkte mit adjazenten Regionen



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

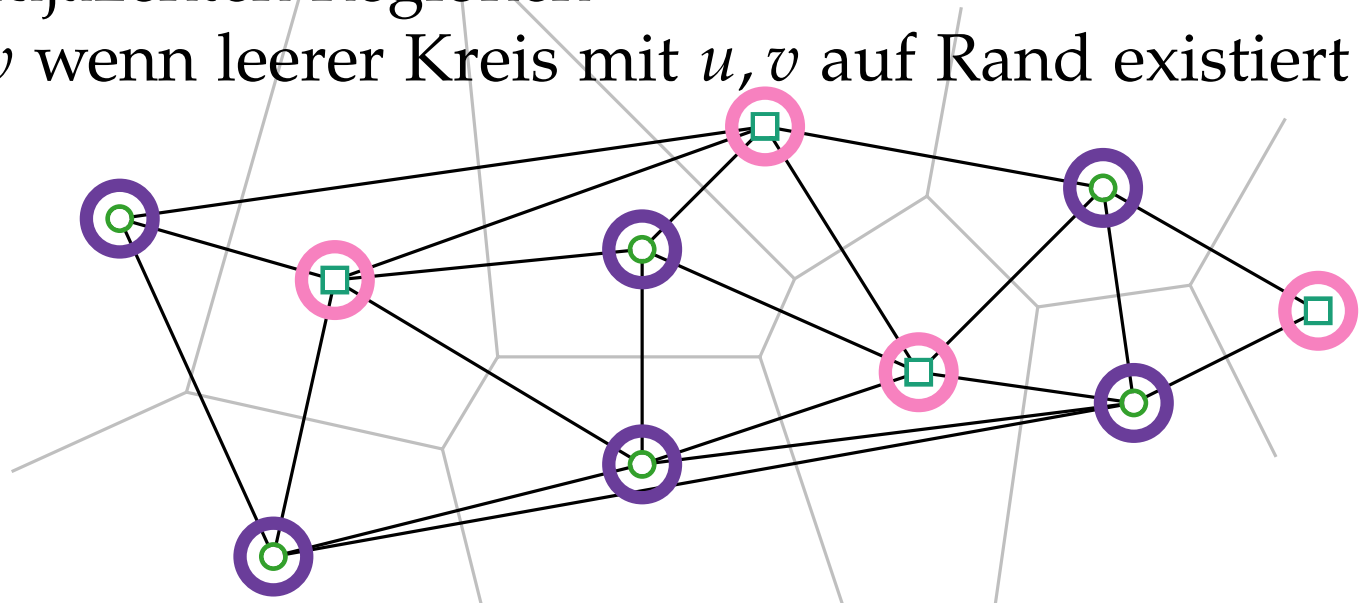
Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind

Verbinde Punkte mit adjazenten Regionen

$\rightsquigarrow$ Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

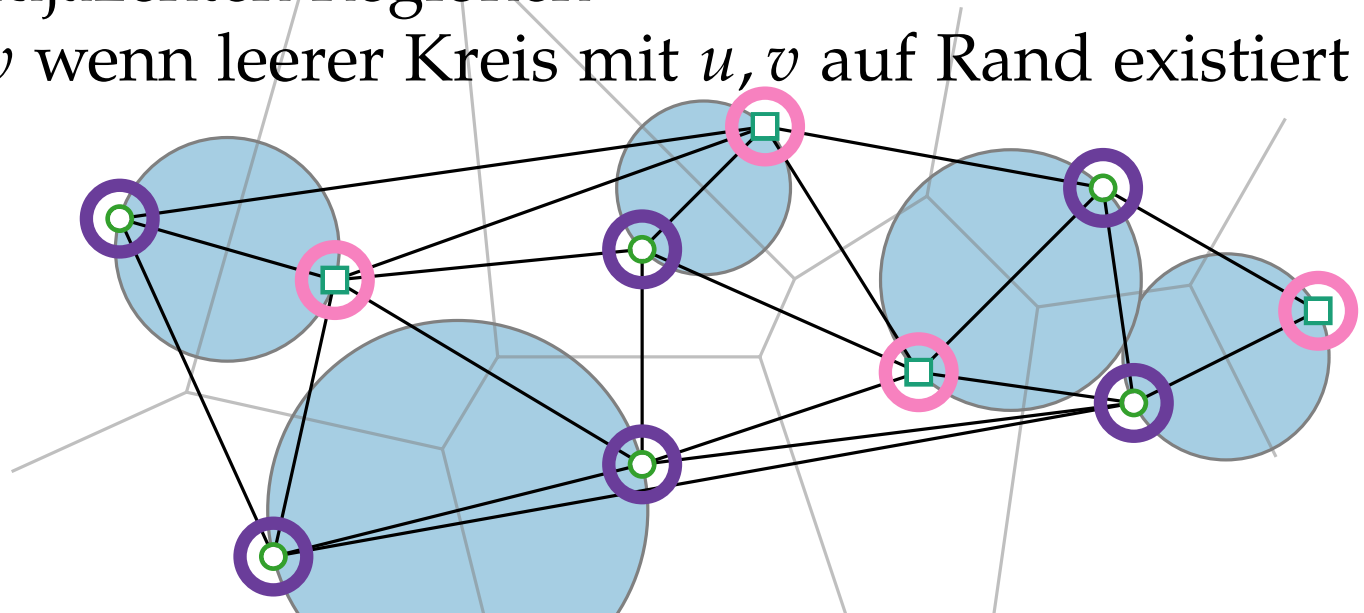
Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind

Verbinde Punkte mit adjazenten Regionen

$\rightsquigarrow$ Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

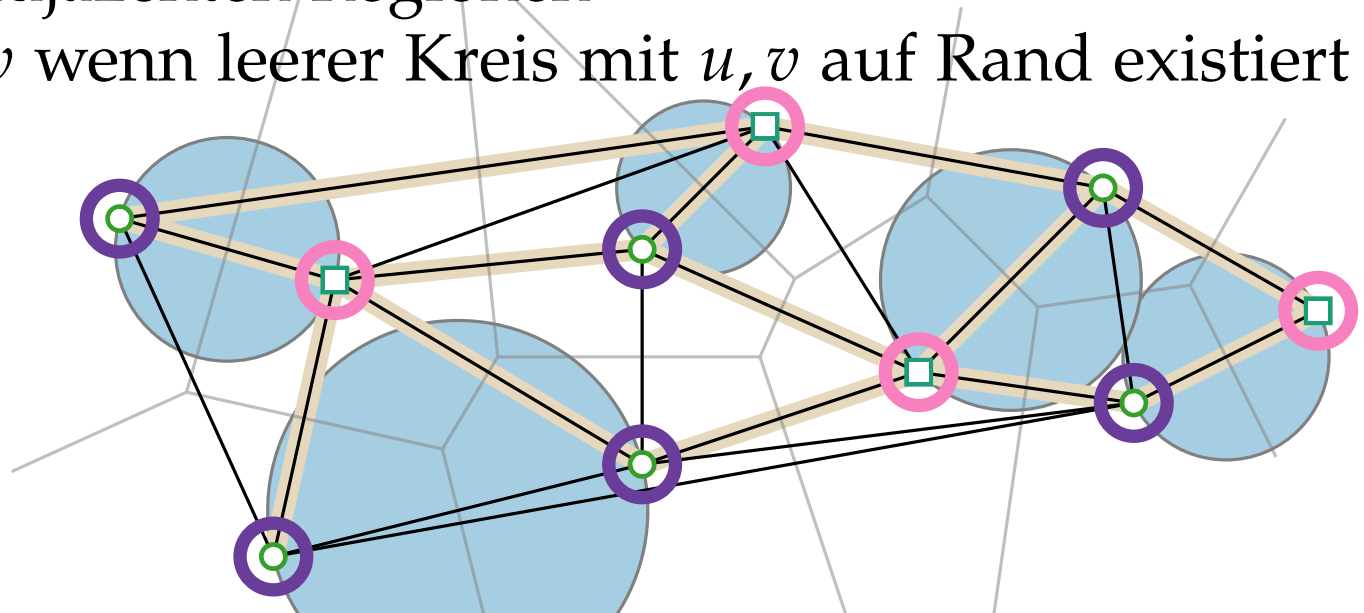
Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind

Verbinde Punkte mit adjazenten Regionen

$\rightsquigarrow$ Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

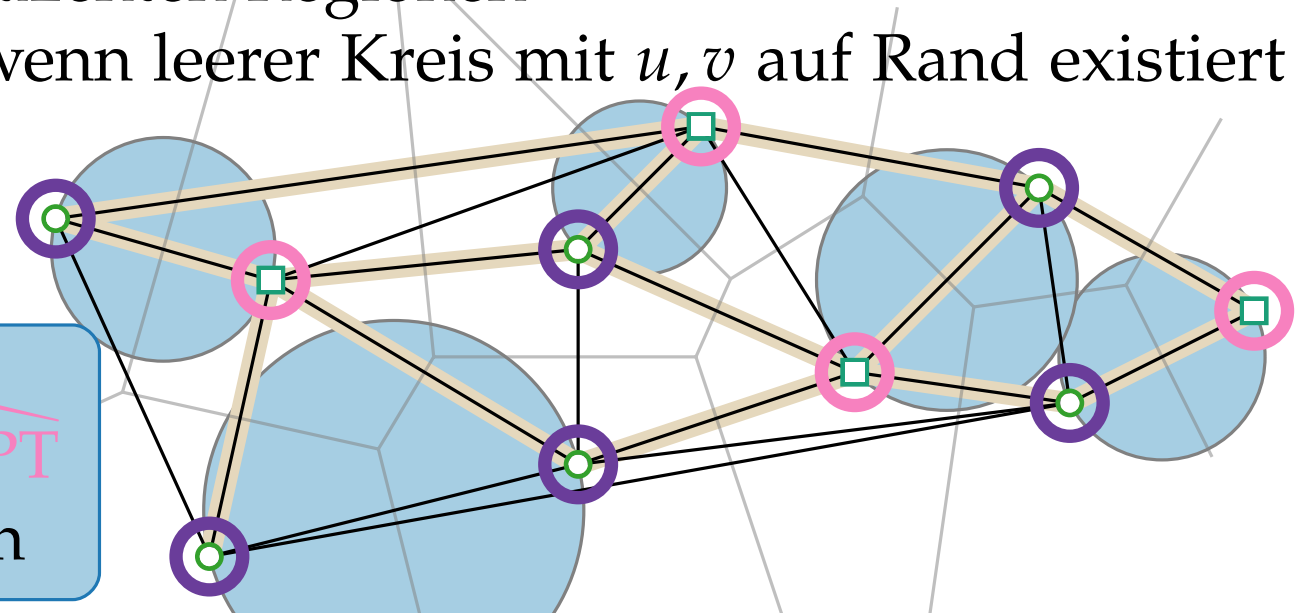
Jede Kreisscheibe in $\widehat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind

Verbinde Punkte mit adjazenten Regionen

$\rightsquigarrow$ Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert



Lemma 1.
Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

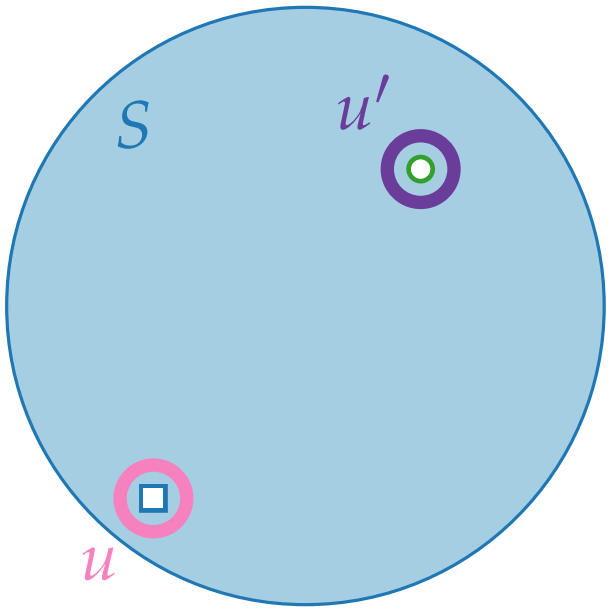
Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.



Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

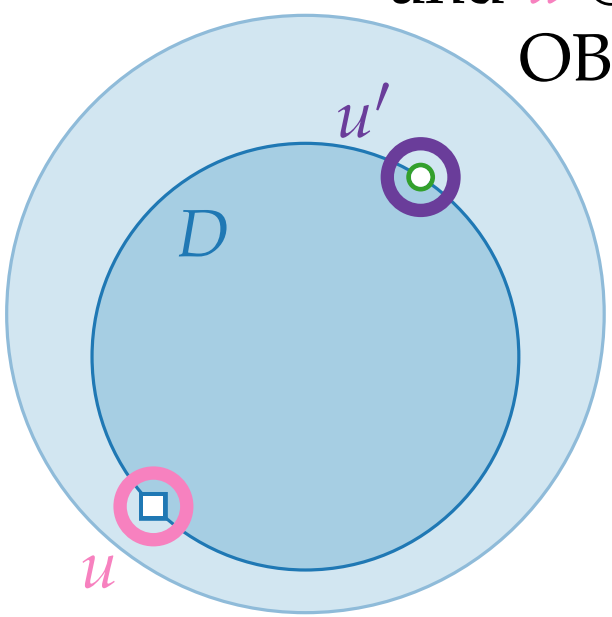
Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.



Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

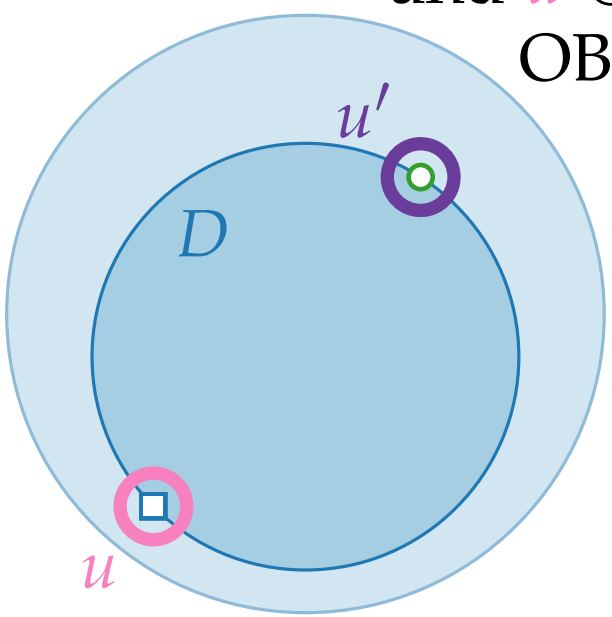
Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.

Fall 1: Kein anderer Punkt in D.



Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

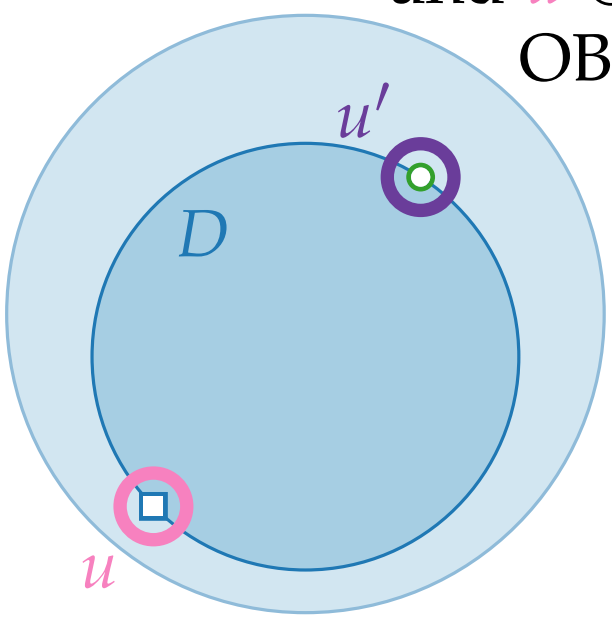
Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.

Fall 1: Kein anderer Punkt in D.

$\rightsquigarrow$ Kante (u, u') in Delaunay Triang.



Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

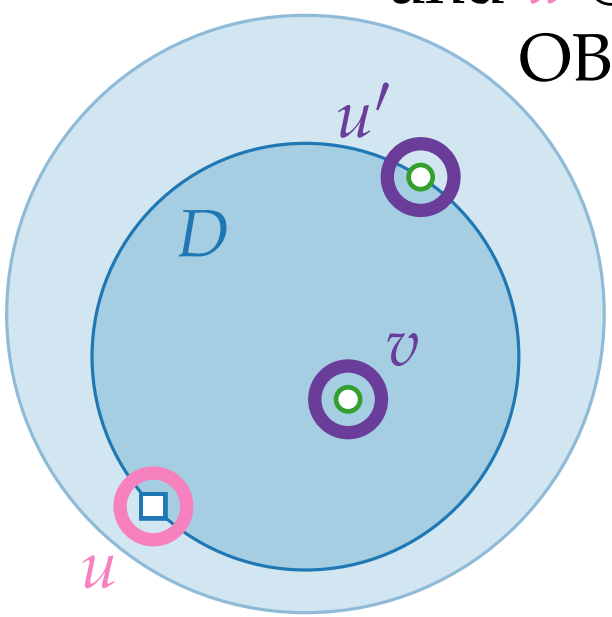
Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.



Fall 1: Kein anderer Punkt in D.

$\rightsquigarrow$ Kante (u, u') in Delaunay Triang.

Fall 2: O.B.d.A. Punkt $v \in \widehat{U'}$ in D.

Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

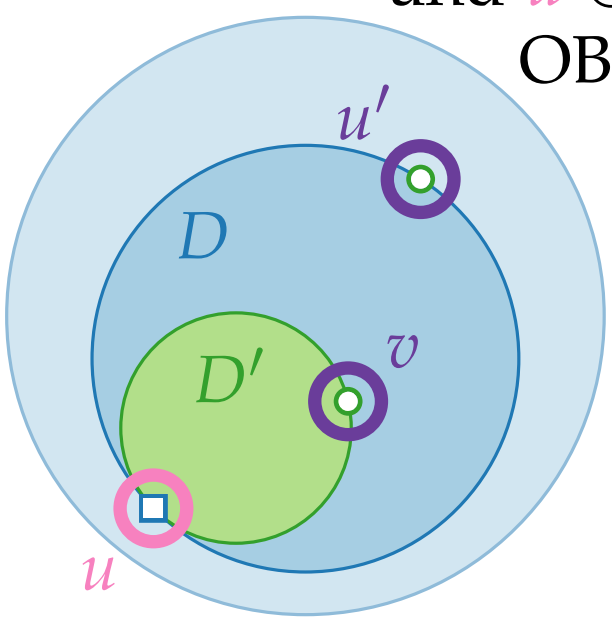
Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.



Fall 1: Kein anderer Punkt in D.

$\rightsquigarrow$ Kante (u, u') in Delaunay Triang.

Fall 2: O.B.d.A. Punkt $v \in \widehat{U'}$ in D.

$\rightsquigarrow$ ex. Kreisscheibe $D' \subseteq D$ mit u, v auf Rand

Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

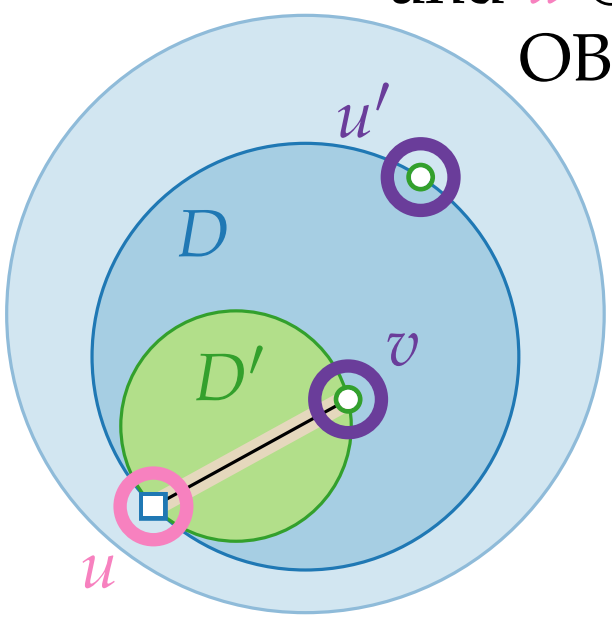
Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.



Fall 1: Kein anderer Punkt in D.

$\rightsquigarrow$ Kante (u, u') in Delaunay Triang.

Fall 2: O.B.d.A. Punkt $v \in \widehat{U'}$ in D.

$\rightsquigarrow$ ex. Kreisscheibe $D' \subseteq D$ mit u, v auf Rand

$\rightsquigarrow$ D' hat $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante (wegen Minimalität von D).

Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

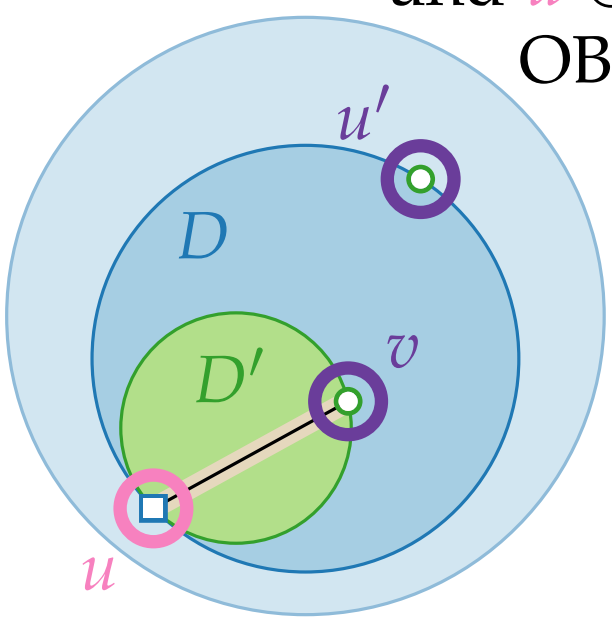
Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.



Fall 1: Kein anderer Punkt in D.

$\rightsquigarrow$ Kante (u, u') in Delaunay Triang.

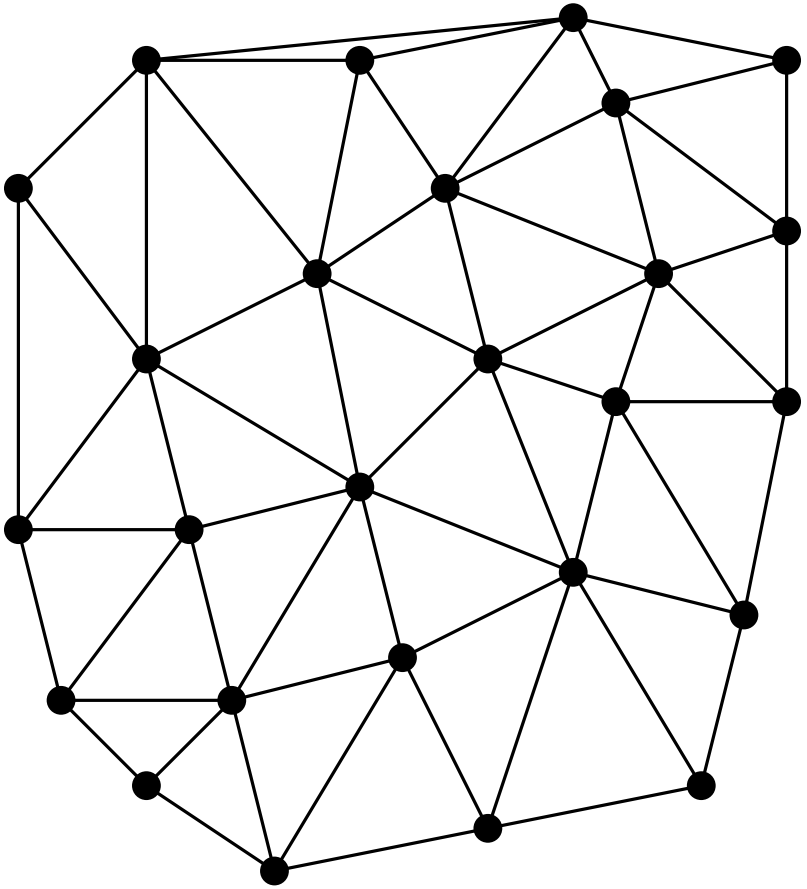
Fall 2: O.B.d.A. Punkt $v \in \widehat{U'}$ in D.

$\rightsquigarrow$ ex. Kreisscheibe $D' \subseteq D$ mit u, v auf Rand

$\rightsquigarrow$ D' hat $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante (wegen Minimalität von D). $\square$

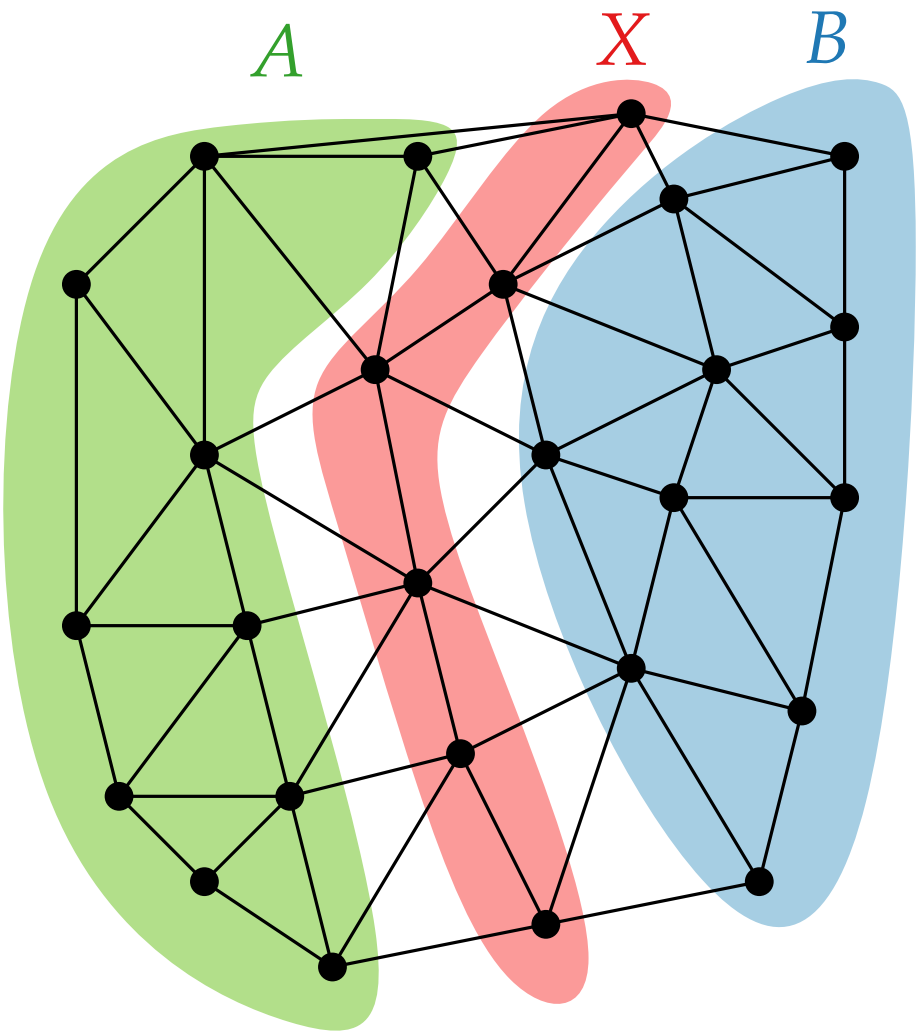
Planare Austauschgraphen

Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:



Planare Austauschgraphen

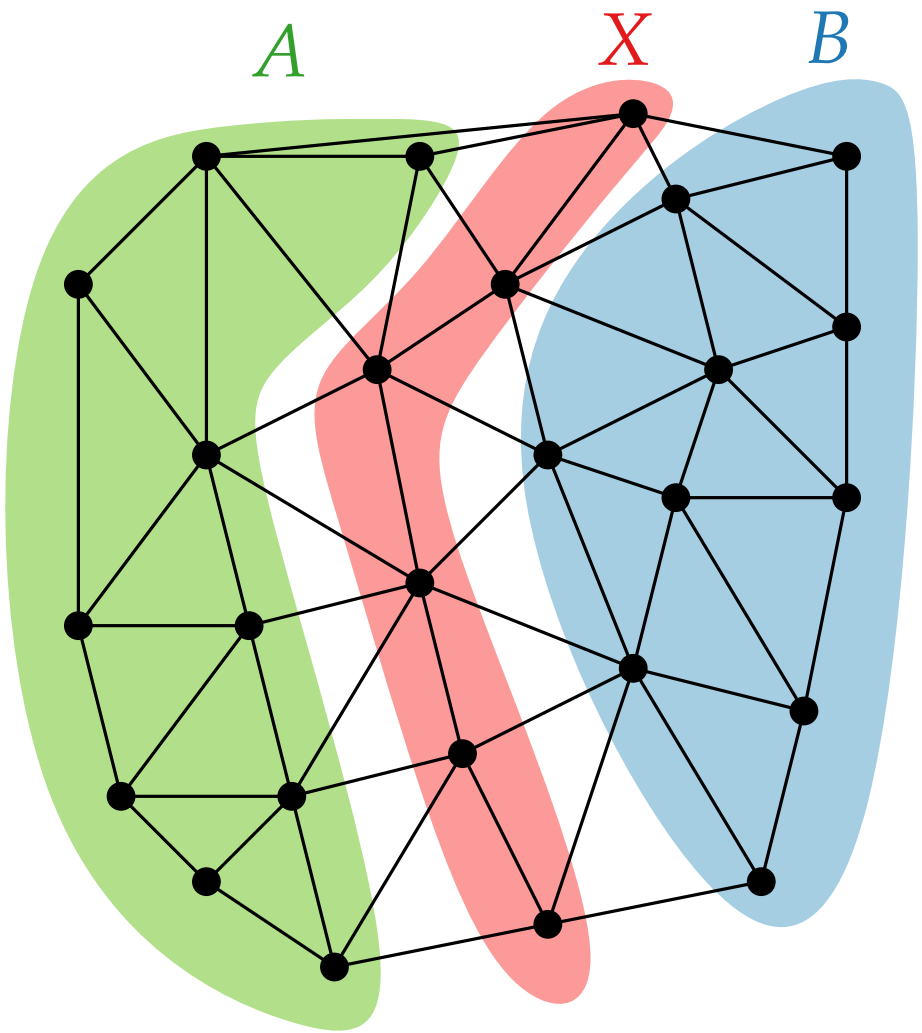
Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:



Planare Austauschgraphen

Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:

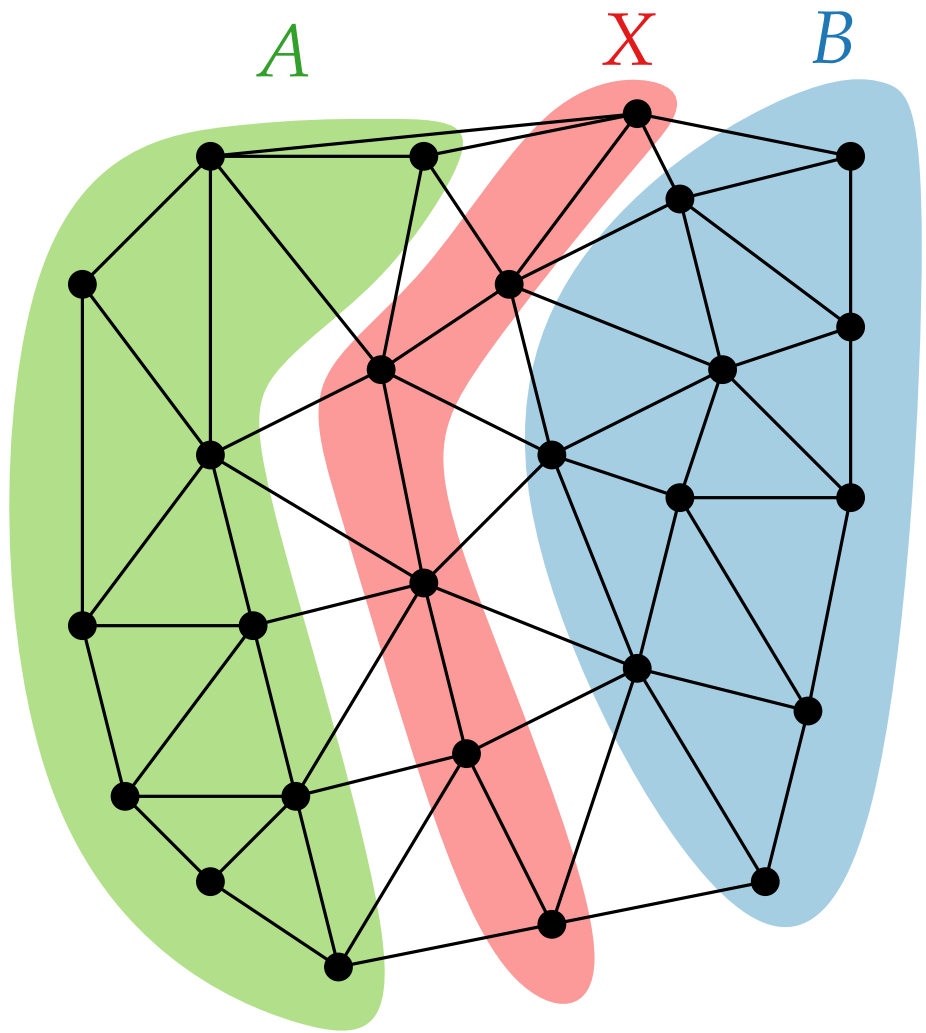
- $w(A \cup X), w(B \cup X) \leq \frac{2}{3} w(V(G))$



Planare Austauschgraphen

Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:

- $w(A \cup X), w(B \cup X) \leq \frac{2}{3} w(V(G))$
- X trennt A von B (keine Kante von A zu B).

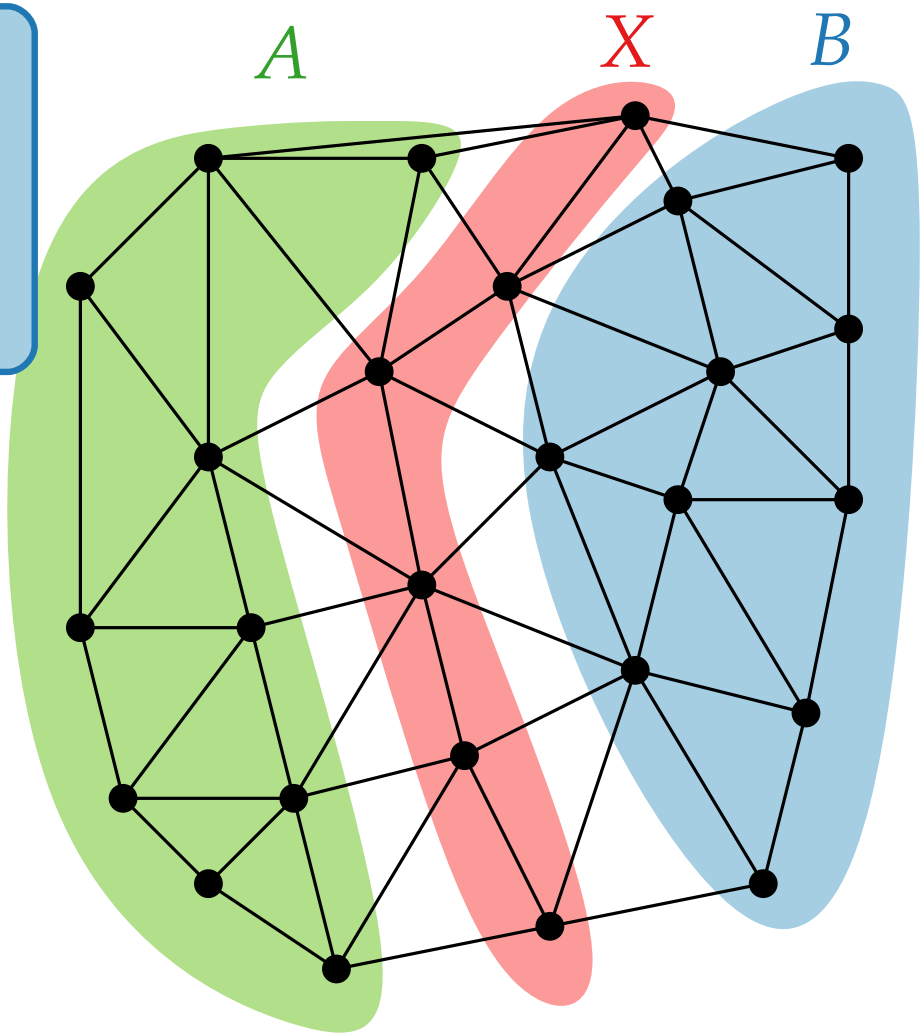


Planare Austauschgraphen

Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:

- $w(A \cup X), w(B \cup X) \leq \frac{2}{3} w(V(G))$
- X trennt A von B (keine Kante von A zu B).

Theorem (Lipton-Tarjan):
Jeder knotengewichtete planare Graph G hat balancierten Separator (A, B, X) mit $|X| \leq 2\sqrt{2n}$



Planare Austauschgraphen

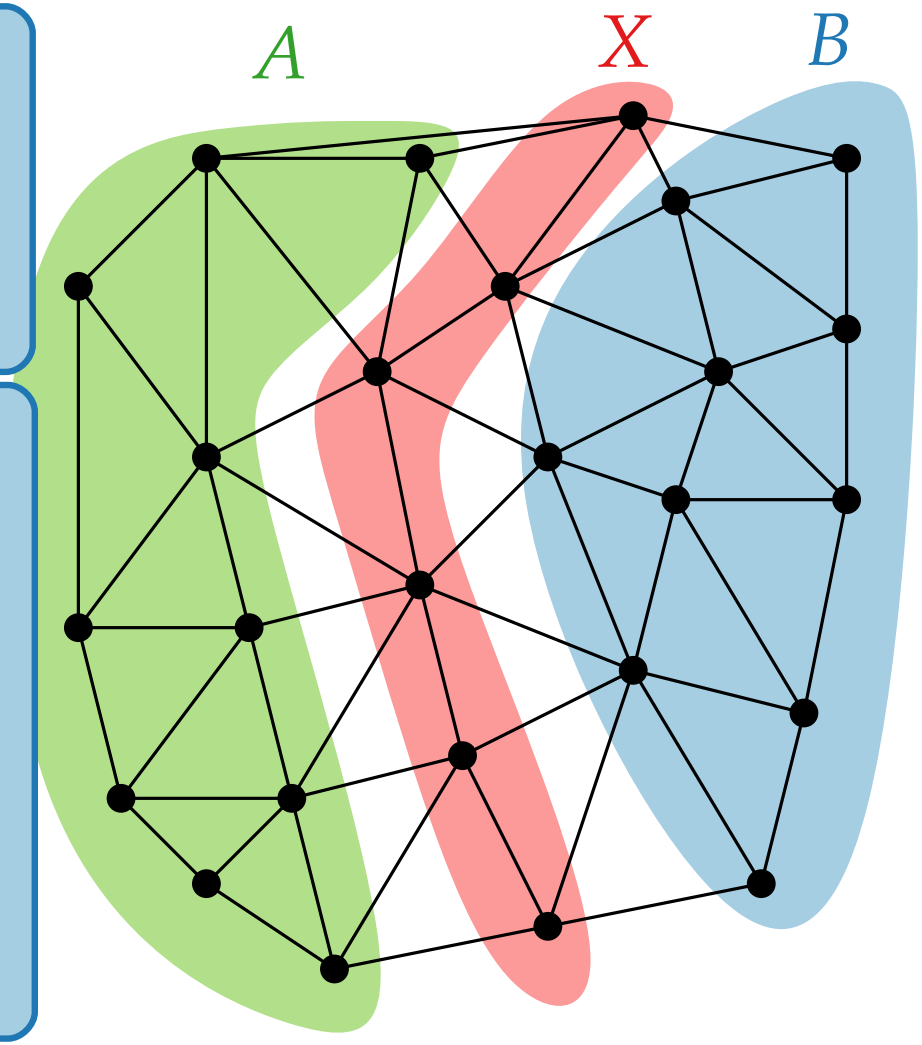
Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:

- $w(A \cup X), w(B \cup X) \leq \frac{2}{3} w(V(G))$
- X trennt A von B (keine Kante von A zu B).

Theorem (Lipton-Tarjan):
Jeder knotengewichtete planare Graph G hat balancierten Separator (A, B, X) mit $|X| \leq 2\sqrt{2n}$

Theorem (Frederickson):
Für jeden planaren Graph G und jedes $t > 0$ ex. Separator $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/t)}, X = \bigcup_i N(A_i))$ mit

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq t, \forall i.$
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{t}}.$



Planare Austauschgraphen

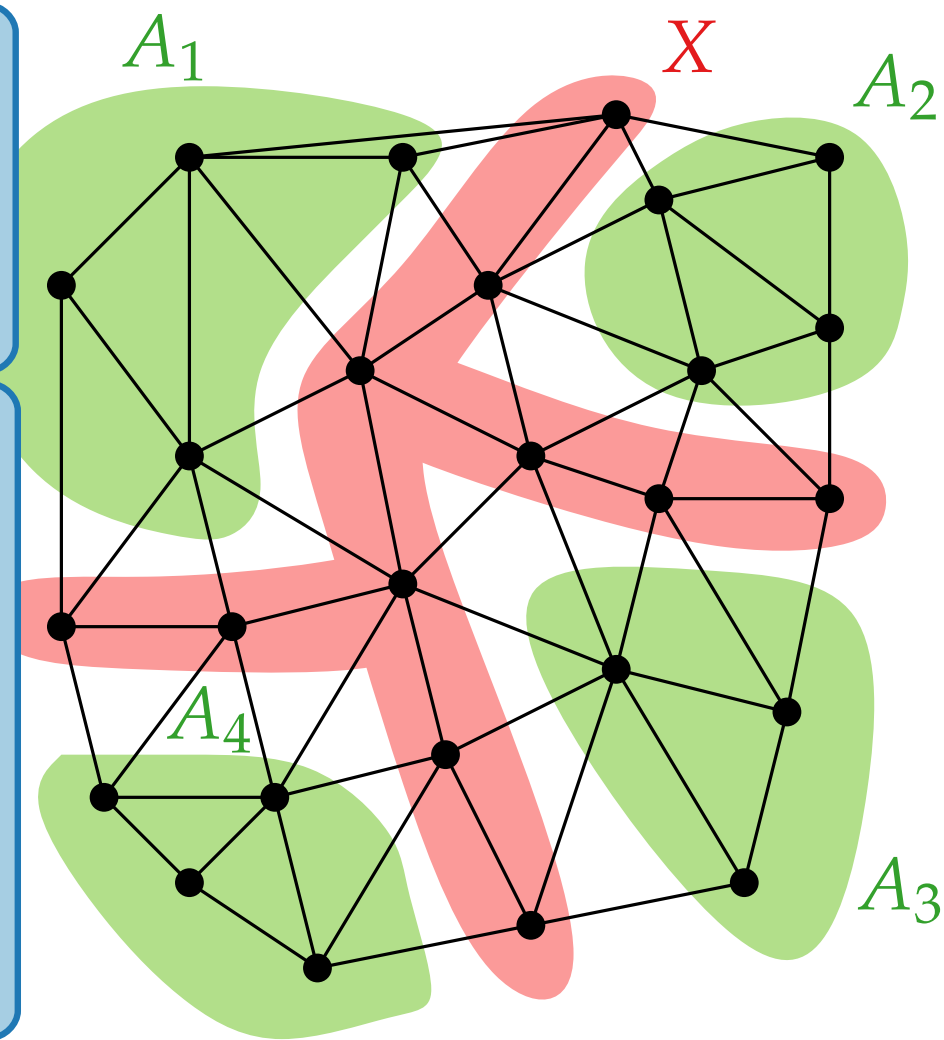
Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:

- $w(A \cup X), w(B \cup X) \leq \frac{2}{3} w(V(G))$
- X trennt A von B (keine Kante von A zu B).

Theorem (Lipton-Tarjan):
Jeder knotengewichtete planare Graph G hat balancierten Separator (A, B, X) mit $|X| \leq 2\sqrt{2n}$

Theorem (Frederickson):
Für jeden planaren Graph G und jedes $t > 0$ ex. Separator $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/t)}, X = \bigcup_i N(A_i))$ mit

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq t, \forall i.$
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{t}}.$



Planare Austauschgraphen

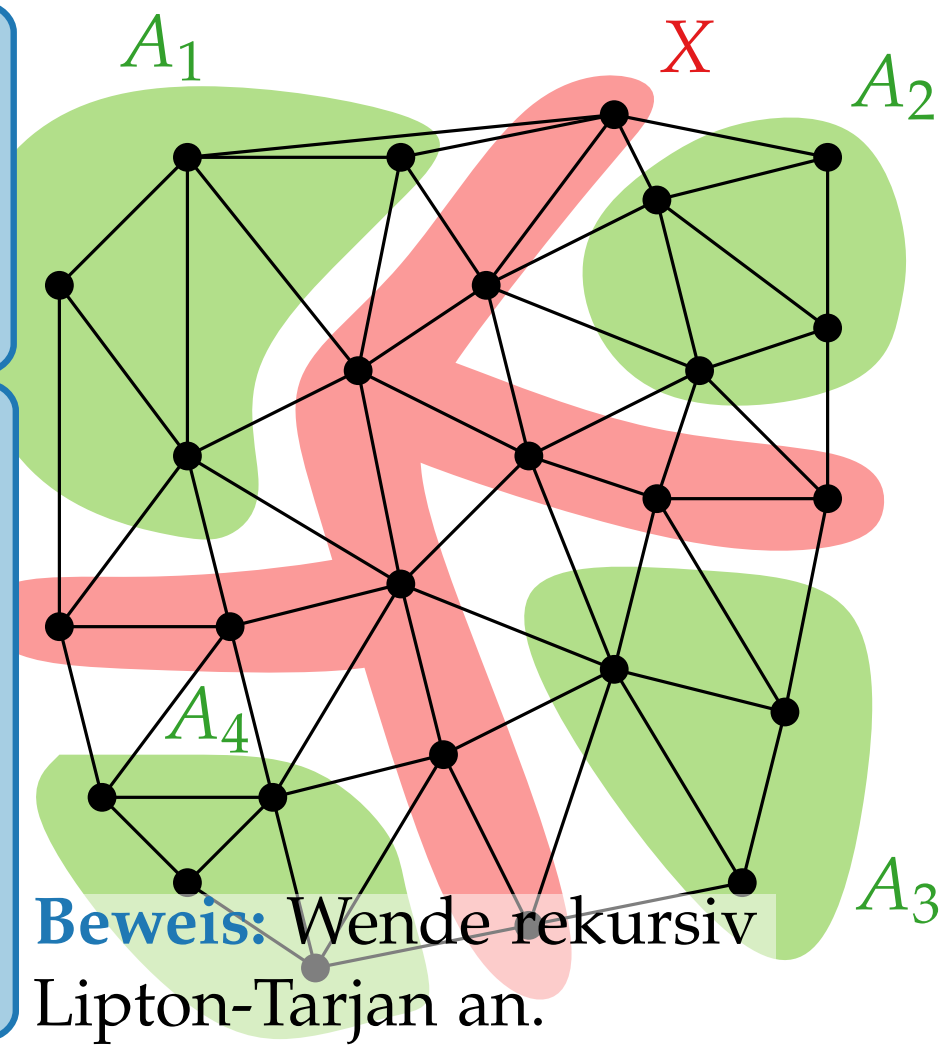
Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:

- $w(A \cup X), w(B \cup X) \leq \frac{2}{3} w(V(G))$
- X trennt A von B (keine Kante von A zu B).

Theorem (Lipton-Tarjan):
Jeder knotengewichtete planare Graph G hat balancierten Separator (A, B, X) mit $|X| \leq 2\sqrt{2n}$

Theorem (Frederickson):
Für jeden planaren Graph G und jedes $t > 0$ ex. Separator $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/t)}, X = \bigcup_i N(A_i))$ mit

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq t, \forall i.$
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{t}}.$



Beweis: Wende rekursiv Lipton-Tarjan an.

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis.

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq \sum_i |\widehat{U'}_i| + |\widehat{U'}_{i,X}|$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq \sum_i |\widehat{U'}_i| + |\widehat{U'}_{i,X}| \leq^{(*)} \sum_i |\widehat{\mathrm{OPT}}_i| + |\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}| + |\widehat{U'}_{i,X}|$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

$$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq \sum_i |\widehat{U'}_i| + |\widehat{U'}_{i,X}| \leq^{(*)} \sum_i |\widehat{\mathrm{OPT}}_i| + |\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}| + |\widehat{U'}_{i,X}|$$

$$\leq^{(**)} |\widehat{\mathrm{OPT}}| + 2\sqrt{2} \cdot \frac{|\widehat{U'}| + |\widehat{\mathrm{OPT}}|}{\sqrt{k}}$$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k, \forall i.$
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

$$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq \sum_i |\widehat{U'}_i| + |\widehat{U'}_{i,X}| \leq^{(*)} \sum_i |\widehat{\mathrm{OPT}}_i| + |\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}| + |\widehat{U'}_{i,X}|$$

$$\leq^{(**)} |\widehat{\mathrm{OPT}}| + 2\sqrt{2} \cdot \frac{|\widehat{U'}| + |\widehat{\mathrm{OPT}}|}{\sqrt{k}} = |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) + |\widehat{U'}| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k, \forall i.$
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

$$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq \sum_i |\widehat{U'}_i| + |\widehat{U'}_{i,X}| \leq^{(*)} \sum_i |\widehat{\mathrm{OPT}}_i| + |\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}| + |\widehat{U'}_{i,X}|$$

$$\leq^{(**)} |\widehat{\mathrm{OPT}}| + 2\sqrt{2} \cdot \frac{|\widehat{U'}| + |\widehat{\mathrm{OPT}}|}{\sqrt{k}} = |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) + |\widehat{U'}| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$$

$$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$$

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k, \forall i.$
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.

Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

$$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq \sum_i |\widehat{U'}_i| + |\widehat{U'}_{i,X}| \leq^{(*)} \sum_i |\widehat{\mathrm{OPT}}_i| + |\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}| + |\widehat{U'}_{i,X}|$$

$$\leq^{(**)} |\widehat{\mathrm{OPT}}| + 2\sqrt{2} \cdot \frac{|\widehat{U'}| + |\widehat{\mathrm{OPT}}|}{\sqrt{k}} = |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) + |\widehat{U'}| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$$

$$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) (\text{wenn } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} < 1 \Leftrightarrow k > 8) \quad \square$$

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$.

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$.

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$. $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(mn^{2k+1})$

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit .

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$. $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(mn^{2k+1}) = O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit $mn^{O(\varepsilon^{-2})}$.

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$. $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(mn^{2k+1}) = O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit $mn^{O(\varepsilon^{-2})}$.

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$. $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(mn^{2k+1}) = O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

$\rightsquigarrow |U'| \leq |\mathrm{OPT}| \cdot (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit $mn^{O(\varepsilon^{-2})}$.

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$. $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(mn^{2k+1}) = O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

$\rightsquigarrow |U'| \leq |\mathrm{OPT}| \cdot (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon) \leq |\mathrm{OPT}| \cdot (1+\varepsilon)$. $\square$

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit $mn^{O(\varepsilon^{-2})}$.

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$. $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(mn^{2k+1}) = O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

$\rightsquigarrow |U'| \leq |\mathrm{OPT}| \cdot (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon) \leq |\mathrm{OPT}| \cdot (1+\varepsilon)$. $\square$

Letzte Anmerkungen:

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit $mn^{O(\varepsilon^{-2})}$.

Beweis. Verwende k-lokale Suche Algorithmus

$\rightsquigarrow$ planarer Austauschgraph auf $\widehat{U'}$, $\widehat{\mathrm{OPT}}$.

Nach Lemma 3: $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) / (1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (für $k > 8$).

Wähle k, um den Approximationsfaktor zu erreichen.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2} \leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} = \varepsilon$. $\Rightarrow$ Laufzeit: $O(mn^{2k+1}) = O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: $k > 8$ für alle $\varepsilon < 1$;

für $\varepsilon \geq 1$ wähle $k = 9 > \frac{8}{\varepsilon^2}$.

$\rightsquigarrow |U'| \leq |\mathrm{OPT}| \cdot (1+\varepsilon)/(1-\varepsilon) \leq |\mathrm{OPT}| \cdot (1+\varepsilon)$. $\square$

Letzte Anmerkungen:

- Ansatz lässt sich auf viele nicht-geom. Instanzen anwenden.
- Hauptidee ist es, den Austauschgraph zu „planarisieren“.

PTAS für Geom. HittingSet

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HittingSet von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit $mn^{O(\varepsilon^{-2})}$.

Beweis. Verwe

$\rightsquigarrow$ pla

Nach Lemma (für $k > 8$).

Wähle k, um d en.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2}$ $= O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: k

f

$\rightsquigarrow |U'| \leq |\mathrm{OPT}$ $\square$

Letzte Anmerkungen:

- Ansatz lässt sich auf viele nicht-geom. Instanzen anwenden.
- Hauptidee ist es, den Austauschgraph zu „planarisieren“.