Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

SetCover via lokale Suche

13. Vorlesung

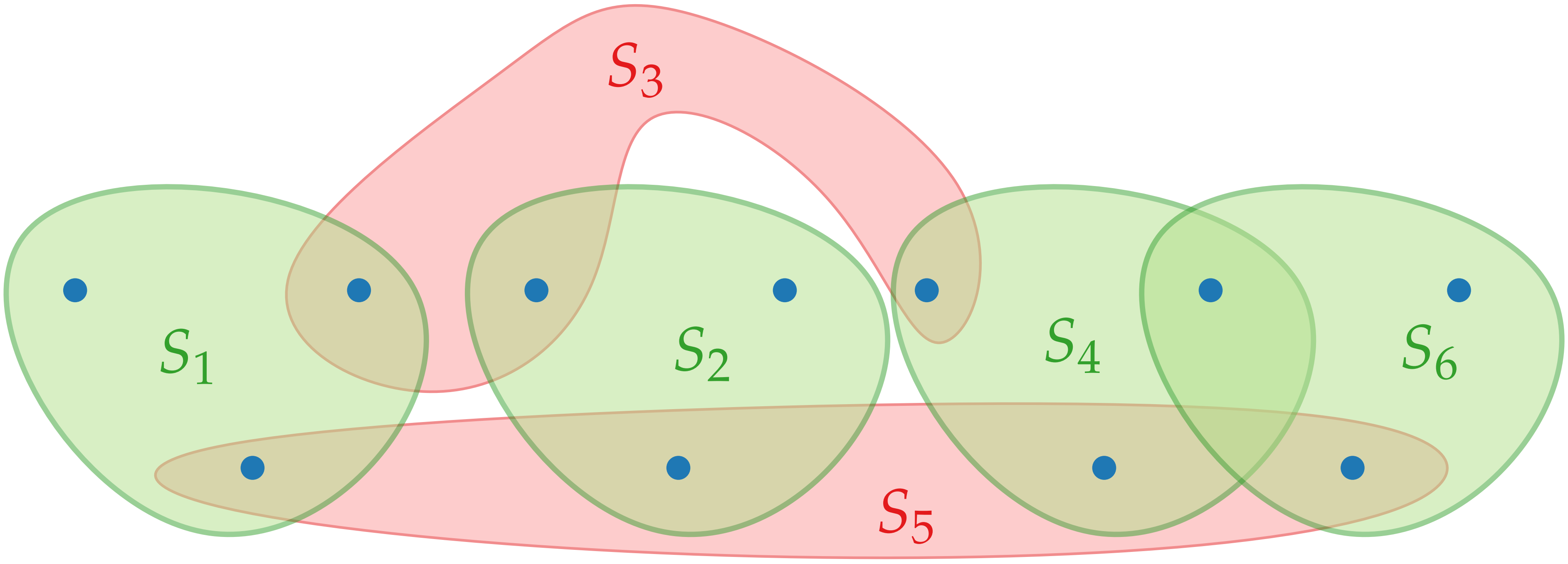
Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität



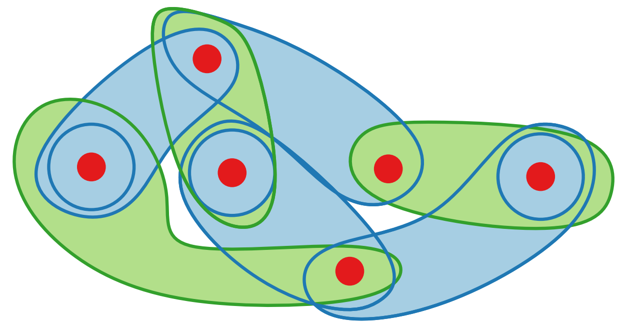
HittingSet

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

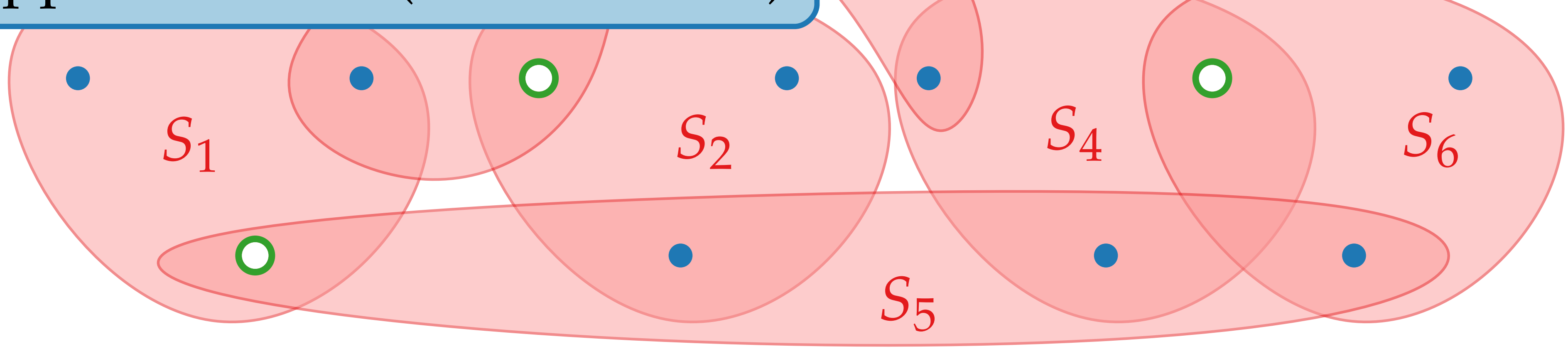
Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$
(d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' :\ u \in S$) minimaler Kardinalität

Sind HittingSet und SetCover unterschiedliche Probleme?

Nein!



HittingSet lässt sich nicht mit Faktor $(1 - o(1)) \cdot \log n$ approximieren (außer P=NP)



Lokale Suche für HittingSet

$n = |U|$, $m = |\mathcal{S}|$, Hitting Set U'

Flip: Ein Paar (U^*, U'') mit $U^* \subseteq U$, $U'' \subseteq U'$, $|U^*| < |U''|$ und $(U' \setminus U'') \cup U^*$ ist ein Hitting Set für $\mathcal{S}$.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist ein Flip (U^*, U'') ein k**-Flip** wenn $|U''| \leq k$.

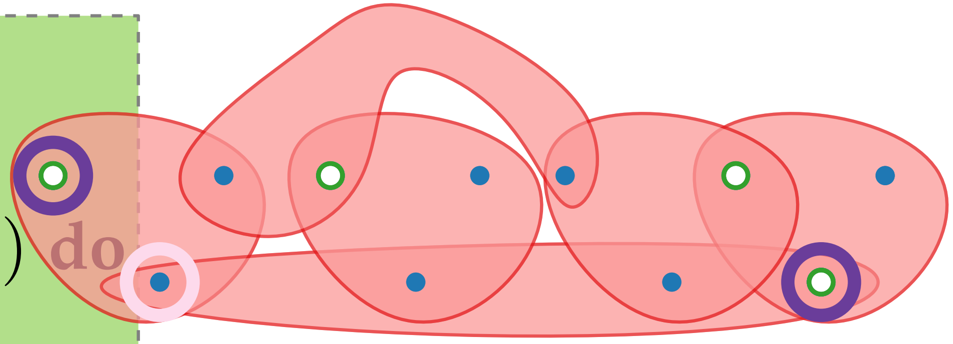
LokaleSuche$(U, \mathcal{S}, k)$

$U' \leftarrow$ Greedy Hitting Set für $\mathcal{S}$

while Es gibt einen k-Flip (U^*, U'') **do**

$U' \leftarrow (U' \setminus U'') \cup U^*$

return U'



Laufzeit? # mögliche k-flips: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \rightsquigarrow O(n^{2k-1})$ Zeit (Num.)

Validität von (U^*, U'') überprüfen: $O(nm)$ Zeit

$\rightsquigarrow O(mn^{2k+1})$ Gesamtzeit

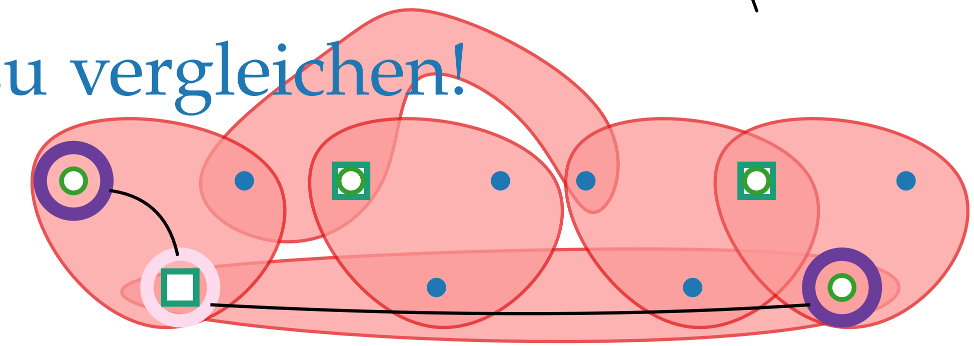
Aber wie analysieren wir die Lösungsqualität?

Lokale vs. optimale Lösung

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$.

Es genügt, private Teilmengen zu vergleichen!



Austauschgraph H:

- $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$
- Für jede Menge $S \in \mathcal{S}$ mit Element $u' \in \widehat{U'} \cap S$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap S$ gibt es eine Kante (u', u).

Beob. Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

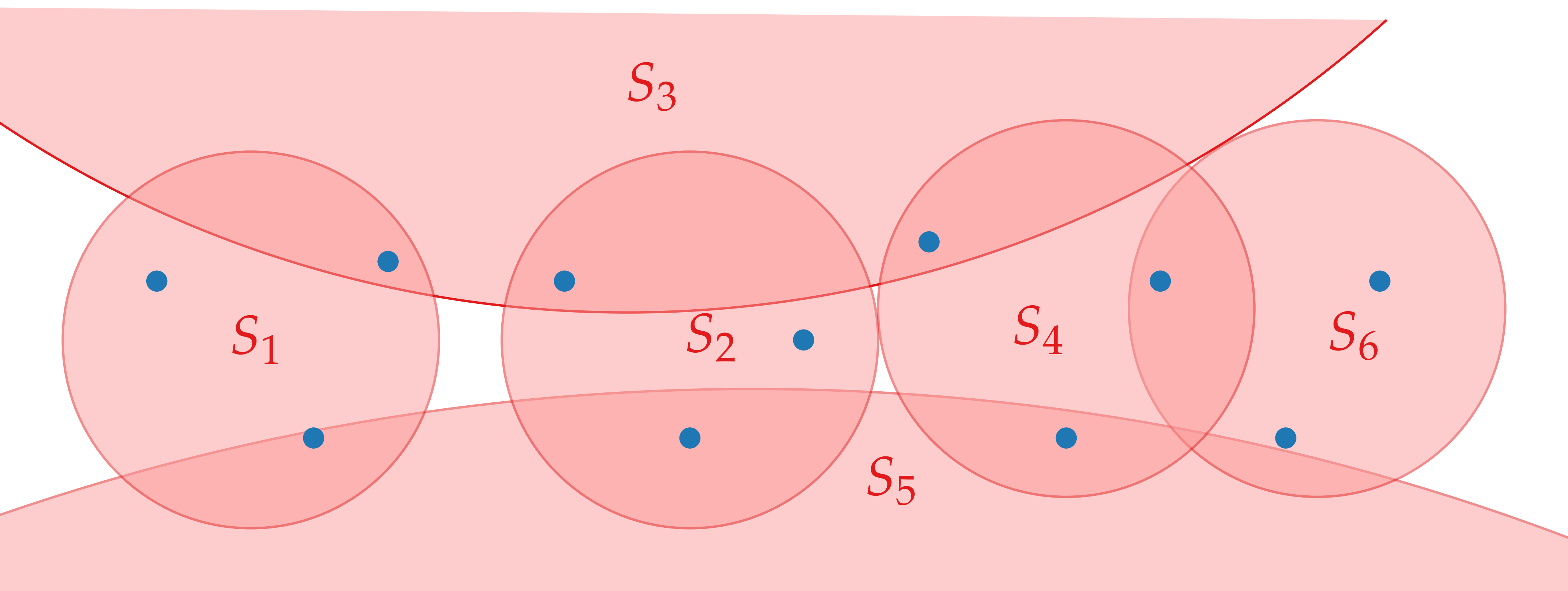
Beweis. Folgt von lokaler Optimalität. $\square$

Was bringt uns diese „Nachbarschaftserweiterung“ Beobachtung? $\rightsquigarrow$ Eingeschränkte Instanzen mit „schönen“ Austauschgraphen!

Geometrisches HittingSet

Gegeben sei eine Grundmenge von **Objekten** U (z.B. Punkte in $\mathbb{R}^2$ und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Bereichen** (z.B. Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit $\bigcup U \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.

Gesucht ist ein **Hitting Set** $U' \subseteq U$ von $\mathcal{S}$ (d.h. $\forall S \in \mathcal{S}\ \exists u \in U' : \ u \cap S \neq \emptyset$) minimaler Kardinalität



Punkte und Kreisscheiben

Sei U' eine Lösung unsere Algorithmus mit Parameter k.
Sei OPT optimales Hitting Set.

Private Teilmengen $\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$,
$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus$ (Mengen überd. durch $U' \cap \mathrm{OPT}$)

Wie bauen wir den Austauschgraph auf?

Jede Kreisscheibe in $\hat{\mathcal{S}}$ muss eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante haben.

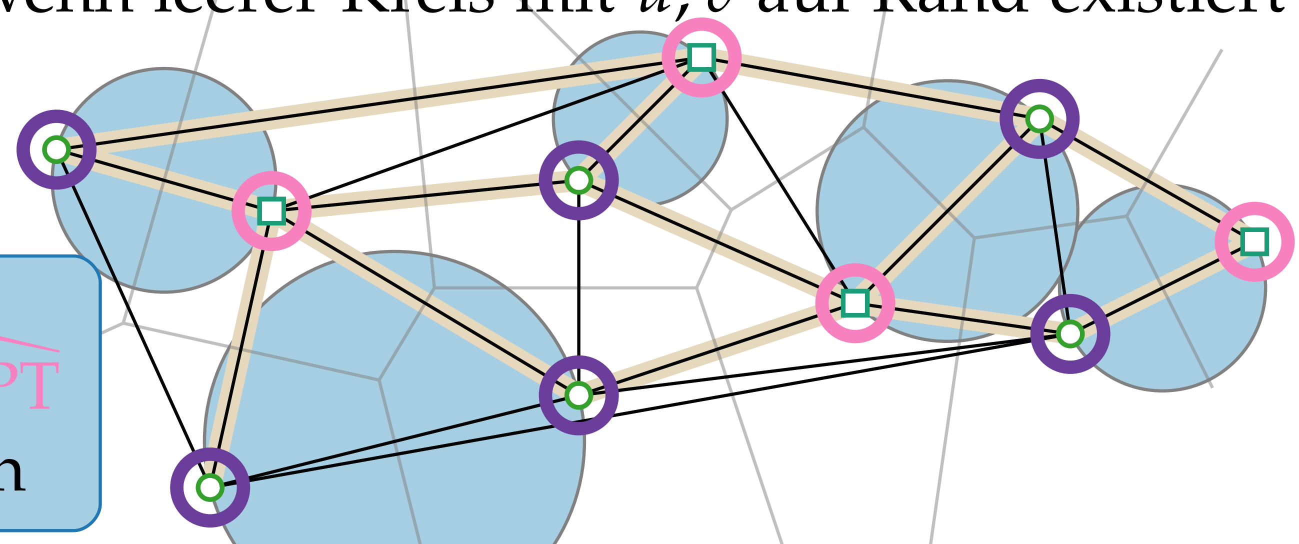
$\rightsquigarrow$ Werkzeug aus Algorithm. Geometrie: *Delaunay Triangulierung*

Teile Ebene in Regionen auf, die Punkten am Nähesten sind

Verbinde Punkte mit adjazenten Regionen

$\rightsquigarrow$ Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert

Lemma 1.
Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph



Delaunay Triang. $\rightsquigarrow$ Austauschgraph

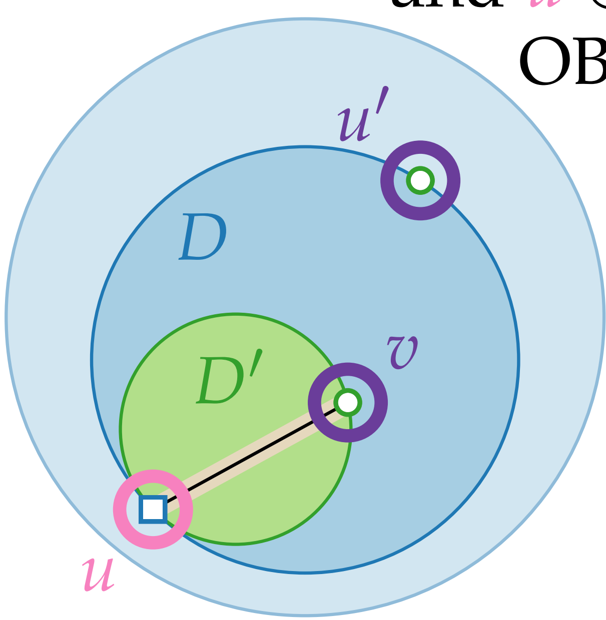
Delaunay Triang.: Kante zwischen u, v wenn leerer Kreis mit u, v auf Rand existiert.

Lemma 1. Der Teilgraph aus $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kanten ist Austauschgraph

Lemma 2. Jede Kreisscheibe mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ hat eine $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

Beweis. Betrachte kleinste Kreisscheibe D mit Punkt $u' \in \widehat{U'} \cap D$ und $u \in \widehat{\mathrm{OPT}} \cap D$ und ohne $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante.

OBdA u, u' auf Rand von D.



Fall 1: Kein anderer Punkt in D.

$\rightsquigarrow$ Kante (u, u') in Delaunay Triang.

Fall 2: O.B.d.A. Punkt $v \in \widehat{U'}$ in D.

$\rightsquigarrow$ ex. Kreisscheibe $D' \subseteq D$ mit u, v auf Rand

$\rightsquigarrow$ D' hat $\widehat{U'} - \widehat{\mathrm{OPT}}$ Kante (wegen Minimalität von D). $\square$

Planare Austauschgraphen

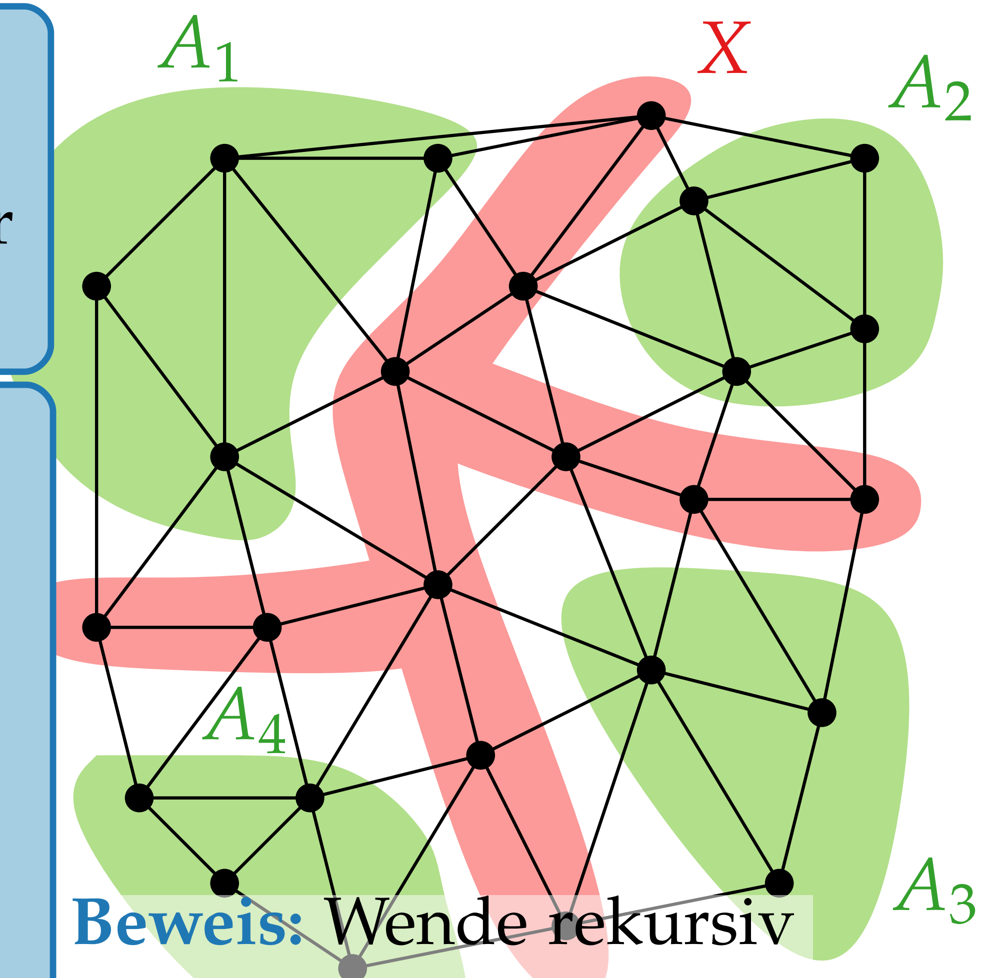
Separatoren: Für knotengewichteten Graph G ist eine Dreiteilung (A, B, X) der Knoten ein *balancierter Separator* wenn:

- $w(A \cup X), w(B \cup X) \leq \frac{2}{3} w(V(G))$
- X trennt A von B (keine Kante von A zu B).

Theorem (Lipton-Tarjan):
Jeder knotengewichtete planare Graph G hat balancierten Separator (A, B, X) mit $|X| \leq 2\sqrt{2n}$

Theorem (Frederickson):
Für jeden planaren Graph G und jedes $t > 0$ ex. Separator $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/t)}, X = \bigcup_i N(A_i))$ mit

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq t, \forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{t}}$.



Beweis: Wende rekursiv Lipton-Tarjan an.

Planare Austauschgraphen

Austauschgraph H mit $V(H) = \widehat{U'} \cup \widehat{\mathrm{OPT}}$ so dass

$\widehat{U'} = U' \setminus \mathrm{OPT}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}} = \mathrm{OPT} \setminus U'$

Beob. $(*)$ Für jedes $U'' \subseteq \widehat{U'}$ mit $|U''| \leq k$: $|N_H(U'')| \geq |U''|$.

Theorem (Frederickson): (auf H angewandt)

Wähle $t = k$, zerlege $V(H)$ in $(A_1, \ldots, A_{\Theta(n/k)}, X)$ so dass

- $|A_i \cup N(A_i)| \leq k$, $\forall i$.
- X trennt A_i von A_j, $(\forall i, j)$.
- $\sum_i |N(A_i)| \leq 2\sqrt{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{k}}$. $(**)$

Lemma 3. Für $k > 8$, $|\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})/(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$.

Beweis. Zerlege jedes A_i durch $\widehat{U'}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}$ in $\widehat{U'}_i$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_i$.
Ähnlich: zerl. $N(A_i)$ in $\widehat{U'}_{i,X}$ und $\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}$

$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq \sum_i |\widehat{U'}_i| + |\widehat{U'}_{i,X}| \ \leq^{(*)} \sum_i |\widehat{\mathrm{OPT}}_i| + |\widehat{\mathrm{OPT}}_{i,X}| + |\widehat{U'}_{i,X}|$

$\leq^{(**)} |\widehat{\mathrm{OPT}}| + 2\sqrt{2} \cdot \frac{|\widehat{U'}| + |\widehat{\mathrm{OPT}}|}{\sqrt{k}} = |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}) + |\widehat{U'}| \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$

$\rightsquigarrow |\widehat{U'}| \leq |\widehat{\mathrm{OPT}}| \cdot (1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})/(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}})$ (wenn $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k}} < 1 \Leftrightarrow k > 8$) $\square$

PTAS für GEOM. HITTINGSET

Satz. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen $(1+\varepsilon)$-Approximationsalgorithmus for HITTINGSET von Punkten auf Kreisscheiben in $\mathbb{R}^2$ mit Laufzeit $mn^{O(\varepsilon^{-2})}$.

Beweis. Verwe

$\rightsquigarrow$ pla

Nach Lemma … (für $k > 8$).

Wähle k, um d… en.

Wähle $k = \frac{8}{\varepsilon^2}$ … $= O(mn^{16\varepsilon^{-2}+1})$

Anmerkung: k

f

$\rightsquigarrow |U'| \leq |\mathrm{OPT}$ … $\square$

Letzte Anmerkungen:

- Ansatz lässt sich auf viele nicht-geom. Instanzen anwenden.
- Hauptidee ist es, den Austauschgraph zu „planarisieren“.