Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

SteinerWald primal-dual

12. Vorlesung

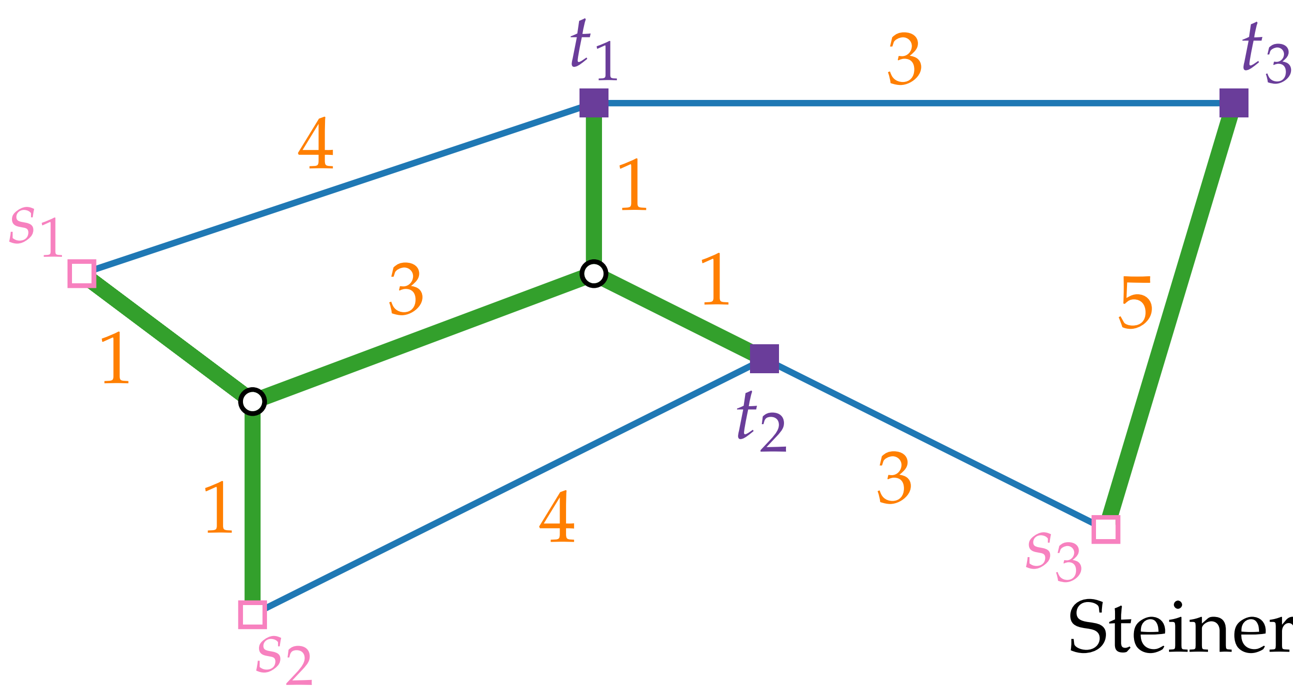
Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

SteinerWald

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{N}$ sowie Menge $R = \{(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)\}$ von k Paaren von Knoten.

Gesucht: Eine Kantenmenge $F \subseteq E$ mit minimalen Gesamtkosten $c(F)$, so dass der Teilgraph (V, F) jedes der Paare (s_i, t_i), $i = 1, \ldots, k$ verbindet.



Spezialfälle?

Kürzeste Wege ($k = 1$)

MST (Paare $= V \times V$)

Steinerbäume (Paare $= T \times T$)

Ansätze?

- Vereinigung k kürzester s_i-t_i-Wege
- SteinerTree auf der Terminalmenge

Obige Ansätze sind beliebig schlecht :-(

Schwierigkeit: Welche Terminalmengen liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente?

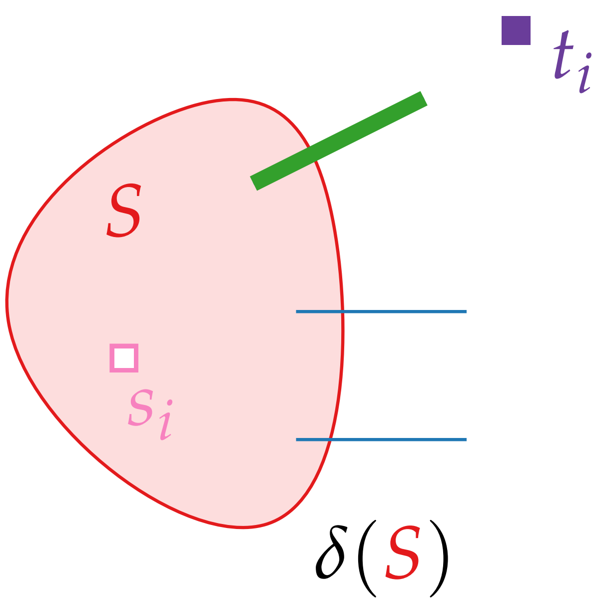
Ein ILP

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \sum_{e \in E} c_e x_e & \\ \textbf{subject to} & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, k \\ & x_e \in \{0,1\} & e \in E \end{array}$$

wobei $\mathcal{S}_i := \{S \subseteq V : |S \cap \{s_i, t_i\}| = 1\}$

und $\delta(S) := \{(u,v) \in E : u \in S \text{ und } v \notin S\}$

$\rightsquigarrow$ exponentiell großes ILP!



LP-Relaxierung und Duales LP

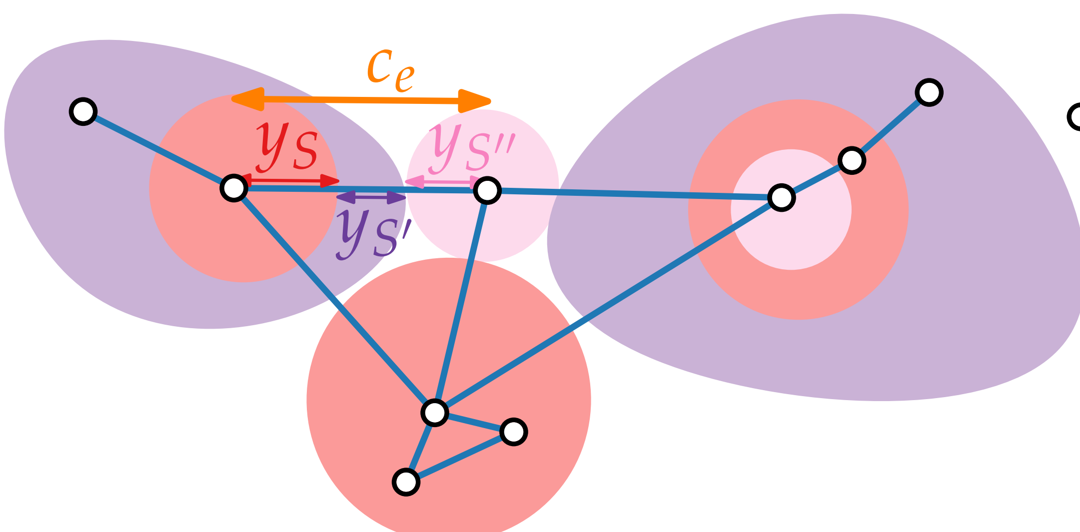
$$\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in E} c_e x_e & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 1 & S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, k \quad (y_S) \\
& x_e \geq 0 & e \in E
\end{array}$$

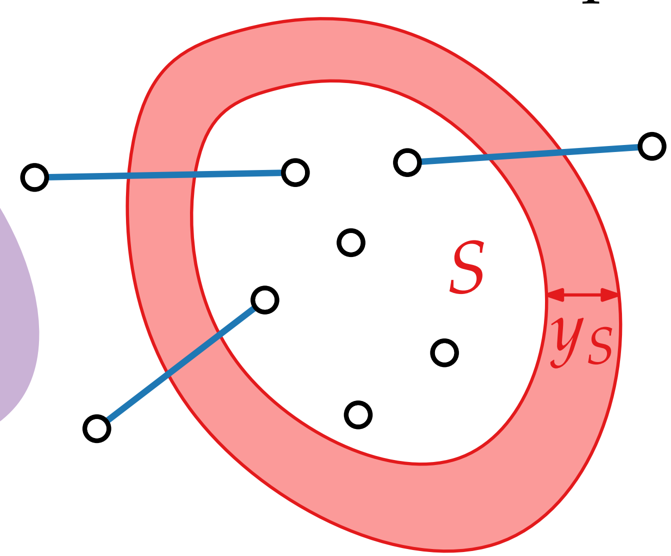
$$\begin{array}{lll}
\textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_i \\ i=1,\ldots,k}} y_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \colon e \in \delta(S)} y_S \leq c_e & e \in E \\
& y_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \ldots, k
\end{array}$$

Intuition für Duales

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_i \\ i=1,\dots,k}} y_S & & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S:\, e \in \delta(S)} y_S \leq c_e & & e \in E \\
 & y_S \geq 0 & & S \in \mathcal{S}_i, i = 1, \dots, k
\end{array}
$$

Graph ist Netzwerk von **Brücken**, die **Gräben** überspannen:





$\delta(S) =$ Menge der Kanten / Brücken über Graben um S

$y_S =$ Breite eines **Grabens** um Menge S

Komplementärer Schlupf (Wdh.)

minimize	$c^\intercal x$		
subject to	Ax	$\geq$	b
	x	$\geq$	0

maximize	$b^\intercal y$		
subject to	$A^\intercal y$	$\leq$	c
	y	$\geq$	0

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Ein erster Primal-Dual-Ansatz

Komplementärer Schlupf: $x_e > 0 \;\Rightarrow\; \sum_{S\,:\; e\in\delta(S)} y_S = c_e$.

$\Rightarrow$ Wähle „scharfe“ Kanten (und nur solche)!

Wollen iterativ zulässige ganzzahlige Primal-Lösung aufbauen.

Wie finden wir verletzte primale Beschränkung?

$\rightsquigarrow$ Zusammenhangskomponente C! $\left(\sum_{e\in\delta(S)} x_e < 1\right)$

Wie verbessern wir (iterativ) Dual-Lösung?

$\rightsquigarrow$ Erhöhe y_C! (Möglich, weil keine Kante aus $\delta(C)$ scharf.)

Ein erster Primal-Dual-Ansatz

PrimalDualSteinerwaldNaiv(G, c, R)

$y \leftarrow 0, F \leftarrow \emptyset$
while nicht alle $(s_i, t_i) \in R$ sind in (V, F) verbunden **do**
  Bestimme Zusammenhangskomponente C in (V, F)
   mit $|C \cap \{s_i, t_i\}| = 1$ für ein i.
  Erhöhe y_C bis $\sum_{S\colon e' \in \delta(S)} y_S = c_{e'}$ für ein $e' \in \delta(C)$.
  $F \leftarrow F \cup \{e'\}$
return F

Laufzeit?

Trick: Verwalte alle y_S mit $y_S = 0$ implizit.

Analyse

Die Kosten der finalen Lösung F lassen sich schreiben als

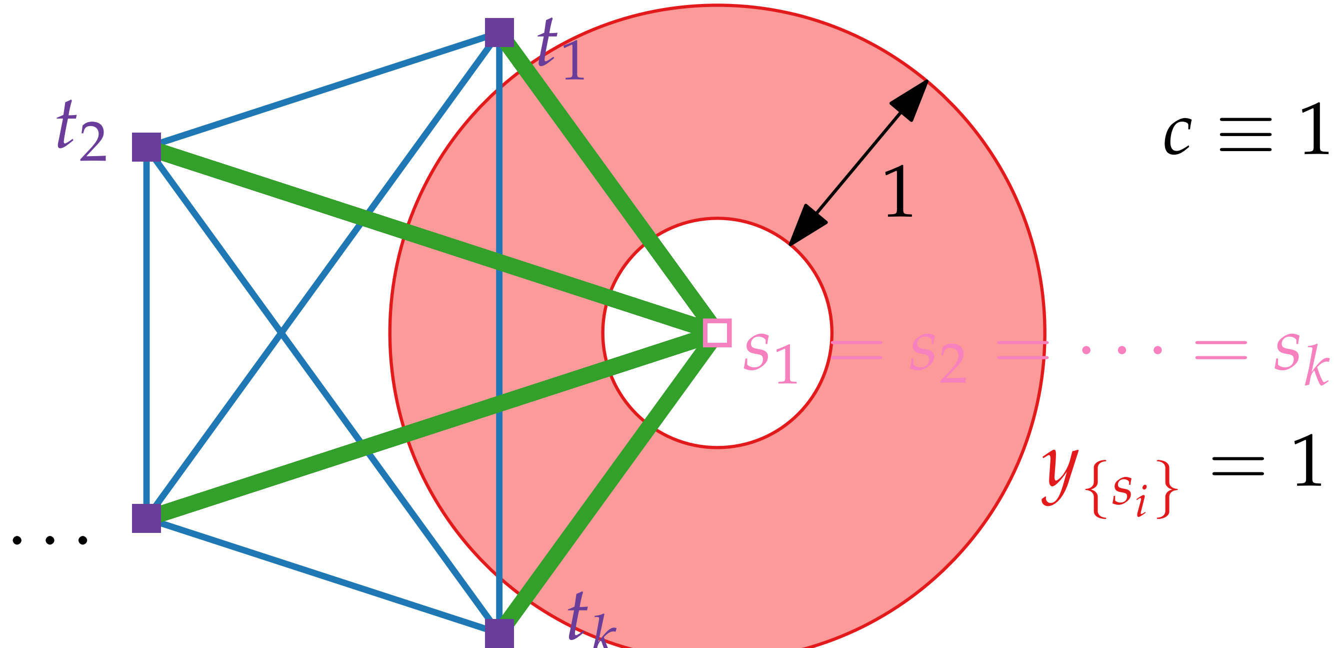
$$\sum_{e \in F} c_e \stackrel{\text{k. S.}}{=} \sum_{e \in F} \sum_{S \colon e \in \delta(S)} y_S = \sum_S |\delta(S) \cap F| \cdot y_S .$$

Vergleiche dies mit dem dualen Zielfunktionswert $\sum_S y_S$

Es gibt leider Beispiele mit $|\delta(S) \cap F| = k$ für alle $y_S > 0$:

Aber: Durchschnittsgrad der ZK $= 2$!

$\Rightarrow$ Erhöhe y_C für alle ZK C simultan!



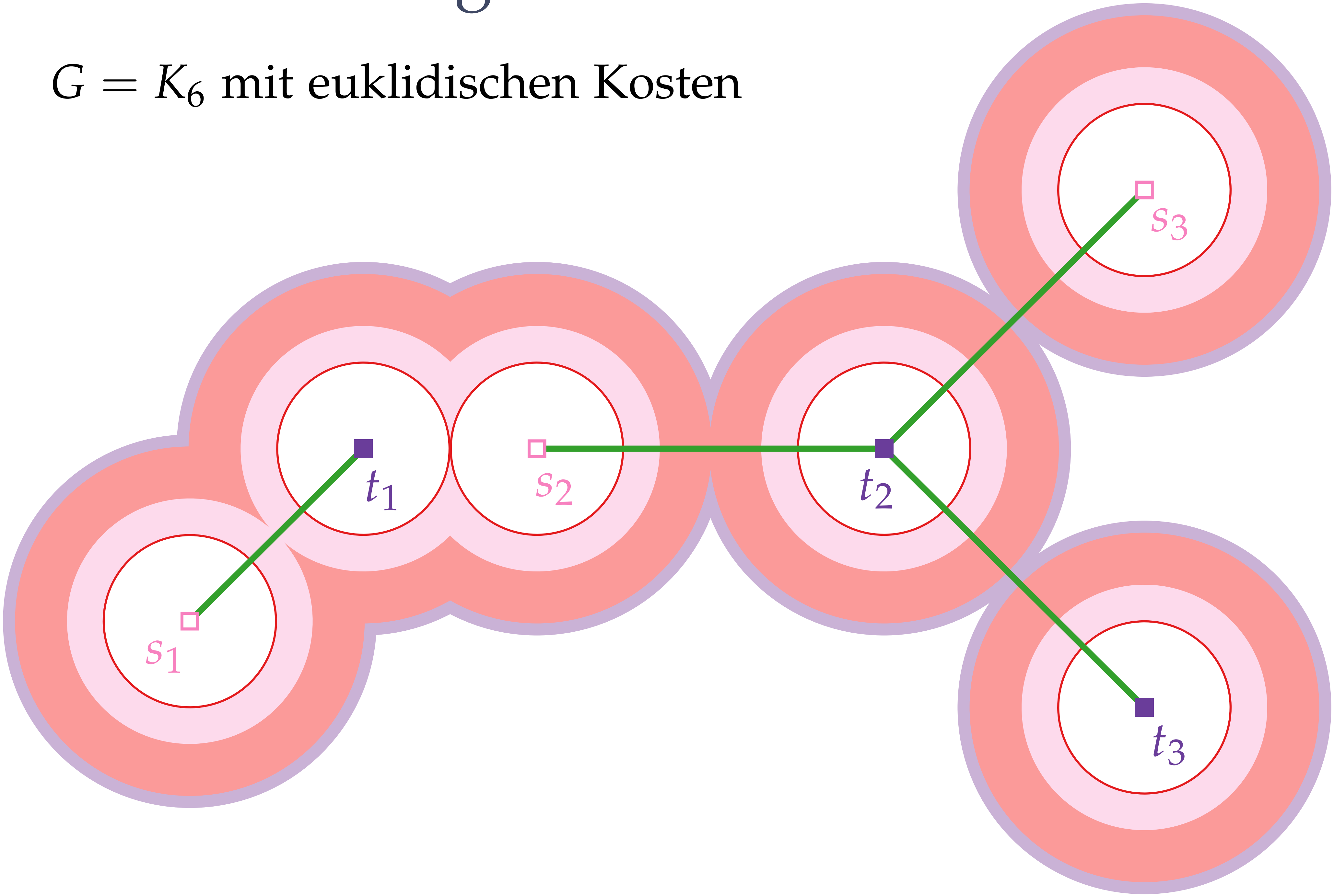
Primal-Dual mit simultaner Erhöhung

PrimalDualSteinerwald(G, c, R)

$y \leftarrow 0, F \leftarrow \emptyset, \ell \leftarrow 0$
while nicht alle $(s_i, t_i) \in R$ sind in (V, F) verbunden **do**
  $\ell \leftarrow \ell + 1$
  $\mathcal{C} \leftarrow$ Menge aller ZK C in (V, F) mit $|C \cap \{s_i, t_i\}| = 1$ für ein i
  Erhöhe y_C für alle $C \in \mathcal{C}$ einheitlich,
    bis $\sum_{S\colon e_\ell \in \delta(S)} y_S = c_{e_\ell}$ für ein $e_\ell \in \delta(C), C \in \mathcal{C}$.
  $F \leftarrow F \cup \{e_\ell\}$
$F' \leftarrow F$
// Pruning
for $j \leftarrow \ell$ **down to** 1 **do**
  if $F' \setminus \{e_j\}$ ist zulässige Lösung **then**
    $F' \leftarrow F' \setminus \{e_j\}$
return F'

Visualisierung

$G = K_6$ mit euklidischen Kosten



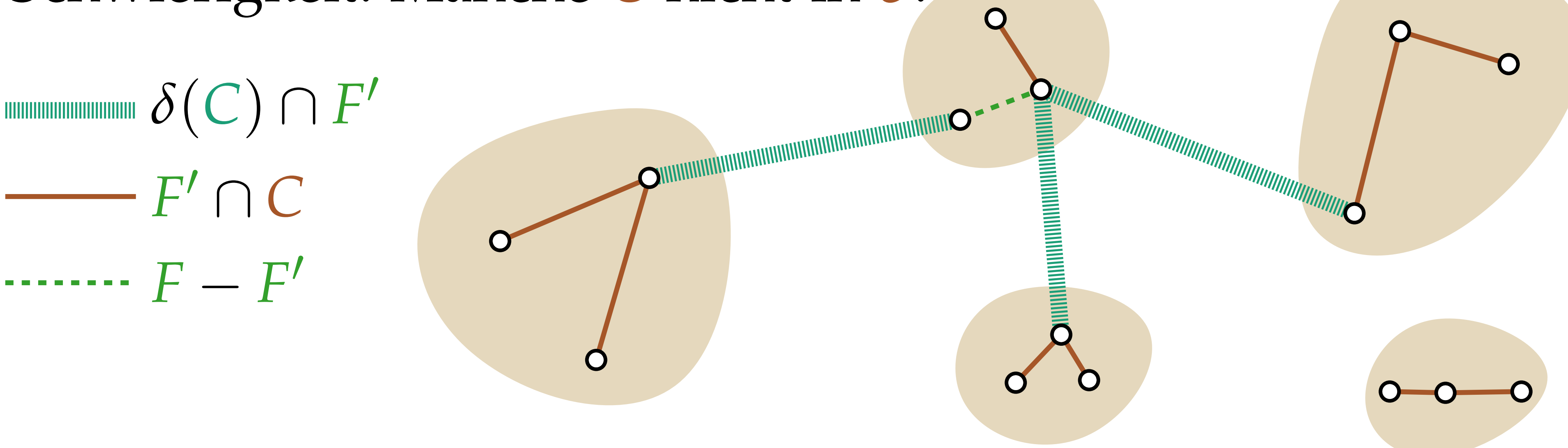
Struktur-Lemma

Lemma 1. In jeder Iteration des Algorithmus gilt
$$\sum_{C \in \mathcal{C}} |\delta(C) \cap F'| \leq 2|\mathcal{C}|\,.$$

Beweisidee. Zunächst Intuition…

Durchschnittsgrad der ZK C bezüglich F ist ≤ 2!

Schwierigkeit: Manche C nicht in $\mathcal{C}$.



Beweis des Struktur-Lemmas

Lemma 1. In jeder Iteration des Algorithmus gilt
$$\sum_{C \in \mathcal{C}} |\delta(C) \cap F'| \leq 2|\mathcal{C}|\,.$$

Beweis.

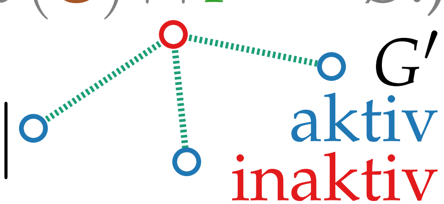
Sei $G^* = (V, F')$. G^* ist ein Wald.

Betrachte die i. Iteration, in der e_i zu F hinzugefügt wird.

Kontrahiere jede ZK C zu einem Knoten $\rightsquigarrow G'$.

(Ignoriere alle ZK C mit $\delta(C) \cap F' = \emptyset$.)

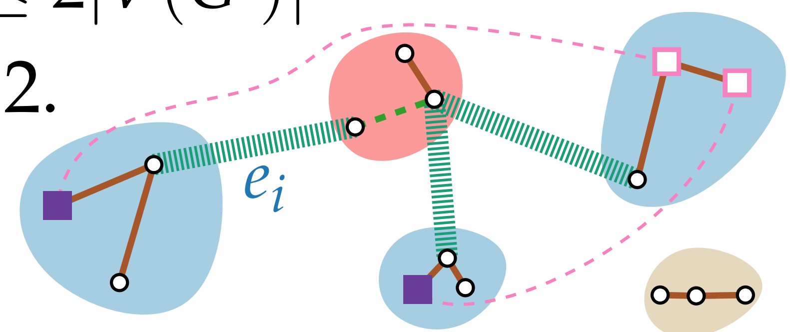
Beh. G' ist ein Wald.



Beachte: $\sum_{C \text{ ZK}} |\delta(C) \cap F'| = \sum_{v \in V(G')} |\deg_{G'}(v)|$
$= 2|E(G')| \leq 2|V(G')|$

Beh. Inaktive Knoten haben Grad ≥ 2.

Dann, $\sum_{v \text{ aktiv}} |\deg_{G'}(v)| \leq$
$2 \cdot |V(G')| - 2 \cdot \#(\text{inaktiv}) = 2|\mathcal{C}|$. $\square$



Analyse

Satz 1. Der synchronisierte Primal-Dual-Algorithm liefert eine 2-Approximation für das SteinerWald Problem.

Beweis.

Wie zuvor

$$\sum_{e \in F'} c_e \overset{\text{k. S.}}{=} \sum_{e \in F'} \sum_{S\colon e \in \delta(S)} y_S = \sum_S |\delta(S) \cap F'| \cdot y_S.$$

Wir zeigen per Induktion über die Anzahl der Iterationen des Algorithmus, dass

$$\sum_S |\delta(S) \cap F'| \cdot y_S \leq 2 \sum_S y_S. \qquad (*)$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes.

Analyse

Satz 1. Der synchronisierte Primal-Dual-Algorithm liefert eine 2-Approximation für das SteinerWald Problem.

Beweis.
$$\sum_S |\delta(S) \cap F'| \cdot y_S \leq 2 \sum_S y_S. \qquad (*)$$

Beziehung gilt trivialerweise zu Begin, da $y_S = 0$ für alle S.

Angenommen $(*)$ gilt zu Beginn einer Iteration.

In dieser Iteration erhöhen wir y_C für alle $C \in \mathcal{C}$ um den gleichen Betrag, sagen wir um $\varepsilon \geq 0$.

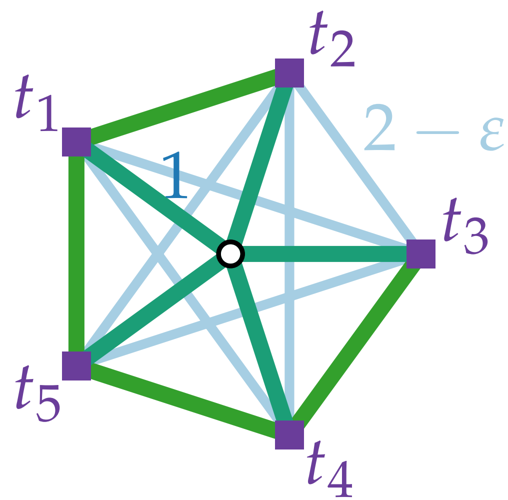
Das erhöht die linke Seite von $(*)$ um $\varepsilon \sum_{C \in \mathcal{C}} |F' \cap \delta(C)|$ und die rechte Seite um $2\varepsilon|\mathcal{C}|$.

Nach Lemma 1 gilt $(*)$ somit auch nach der Iteration. □

Zusammenfassung

Satz 1. Der synchronisierte Primal-Dual-Algorithm liefert eine 2-Approximation für das SteinerWald Problem.

Analyse scharf?



ALG $= (2-\varepsilon)(n-1)$
OPT $= n$

besser?
Es ist kein besserer Approximationsfaktor bekannt.
Das Integrality Gap beträgt $2 - 1/n$.
SteinerWald lässt sich nicht mit Faktor $1{,}0074$ approximieren (außer P=NP) [Thimm '03]