Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

MaxSat via randomisiertes Runden

11. Vorlesung

Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

Maximum Satisfiability (MaxSat)

Gegeben: Boolesche Variablen $x_1, \dots, x_n$,
Klauseln $C_1, \dots, C_m$ mit Gewichten $w_1, \dots, w_m$.

Gesucht: Belegung der Variablen $x_1, \dots, x_n$, so dass das Gesamtgewicht der *erfüllten* Klauseln **maximiert** wird.

Literal: Variable oder Negation von Variable – z.B. x_1, $\overline{x_1}$

Klausel: Disjunktion von Literalen – z.B. $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$

Länge einer Klausel: Anzahl ihrer Literale

Problem NP-schwer, da Satisfiability (Sat) NP-schwer: Ist geg. aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform erfüllbar? Z.B. $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_4})$.

Ein einfacher randomisierter Algorithmus

Satz 1. Wenn man jede Variable unabhängig mit Wahrscheinlichkeit 1/2 auf 1 (`true`) setzt, erhält man eine 1/2-Approximation für MaxSat.

Beweis.

Sei $Y_j \in \{0, 1\}$ Zufallsvariable für den Wahrheitswert der Klausel C_j.

Sei W Zufallsvariable für das Gewicht der erfüllten Klauseln.

$$E[W] = E\left[\sum_{j=1}^{m} w_j Y_j\right] = \sum_{j=1}^{m} w_j E[Y_j] = \sum_{j=1}^{m} w_j \Pr[C_j \text{ erfüllt}]$$

Sei l_j Länge von C_j. $\Rightarrow \Pr[C_j \text{ erfüllt}] = 1 - (1/2)^{l_j} \geq 1/2$.

Daraus folgt $E[W] \geq 1/2 \sum_{j=1}^{m} w_j \geq \mathrm{OPT}/2$. $\square$

Methode der bedingten Erwartungswerte

Satz 2. Obiger Algorithmus kann derandomisiert werden. Es gibt somit einen *deterministischen* 1/2-Approximationsalgorithmus für Max Sat.

Beweis.

Wir setzen x_1 deterministisch, aber $x_2, \ldots, x_n$ randomisiert.

Genauer: setze $x_1 = 1 \iff E[W|x_1 = 1] \geq E[W|x_1 = 0]$.

$E[W] = (E[W|x_1 = 0] + E[W|x_1 = 1])/2.$

[wg. der ursprünglich randomisierten Wahl von x_1]

Wenn x_1 gemäß Obigem auf $b_1 \in \{0,1\}$ gesetzt wird, dann gilt $E[W|x_1 = b_1] \geq E[W] \geq \mathrm{OPT}/2$.

Methode der bedingten Erwartungswerte

Nimm (per Induktion) an, wir hätten $x_1, \ldots, x_i$ bereits so auf $b_1, \ldots, b_i$ gesetzt, dass

$$E[W | x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i] \geq \mathrm{OPT}/2$$

Es gilt (siehe auch Induktionsanfang):

$$\begin{aligned}
&\big(E[W | x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i, x_{i+1} = 0] \\
&+ E[W | x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i, x_{i+1} = 1]\big)/2 \\
&= E[W | x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i] \geq \mathrm{OPT}/2
\end{aligned}$$

Also setzen wir $x_{i+1} = 1$ g.d.w.

$$\begin{aligned}
&E[W | x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i, x_{i+1} = 1] \\
&\geq E[W | x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i, x_{i+1} = 0]
\end{aligned}$$

Methode der bedingten Erwartungswerte

Algorithmus kann also derandomisiert werden, sofern wir obige bedingte Erwartungswerte berechnen können!

Betrachte dazu partielle Belegung $x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i$ und eine Klausel C_j.

Wenn Klausel C_j durch die Belegung bereits erfüllt ist, beträgt ihr Beitrag zu $E[W|x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i]$ genau w_j.

Wenn C_j durch die Belegung noch nicht erfüllt ist und k unbelegte Variable enthält, so beträgt C_j's Beitrag zu $E[W|x_1 = b_1, \ldots, x_i = b_i]$ genau $w_j(1 - (1/2)^k)$.

Bedingter Erwartungswert ist Summe der Beiträge der einzelnen Klauseln. $\square$

Zusammenfassung: Bedingte Erwartungswerte

Standardverfahren, mit dem sich viele randomisierte Algorithmen derandomisieren lassen.

Voraussetzung ist, dass sich für jede zufällige Entscheidung die jeweiligen bedingten Erwartungswerte gut abschätzen lassen.

Algorithmus wählt dann in jedem Schritt die dementsprechend beste Option.

Die Qualität der ausgegebenen Lösung ist mindestens so hoch wie die des Erwartungswertes.

Der Algorithmus legt iterativ die Variablen fest und entscheidet sich greedy für die lokal beste Belegung.

Global optimieren?

Ein ILP

$$\textbf{minimize} \quad \sum_{j=1}^{m} w_j z_j$$

$$\textbf{subject to} \quad \boxed{\sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i)} \geq z_j \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

$$\cancel{z_j \in \{0,1\}},\ 0 \leq z_j \leq 1 \quad \text{für } j = 1, \dots, m$$

Das genügt, weil $\in \mathbb{Z}$.

wobei $C_j = \bigvee_{i \in P_j} x_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \bar{x}_i$ für $j = 1, \dots, m$.

... und seine Relaxierung

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimize} \quad & \sum_{j=1}^{m} w_j z_j \\
\textbf{subject to} \quad & \sum_{i \in P_j} y_i + \sum_{i \in N_j} (1 - y_i) \geq z_j && \text{für } j = 1, \ldots, m \\
& 0 \leq y_i \leq 1, && \text{für } i = 1, \ldots, n \\
& 0 \leq z_j \leq 1, && \text{für } j = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

wobei $C_j = \bigvee_{i \in P_j} x_i \vee \bigvee_{i \in N_j} \bar{x}_i$ für $j = 1, \ldots, m$.

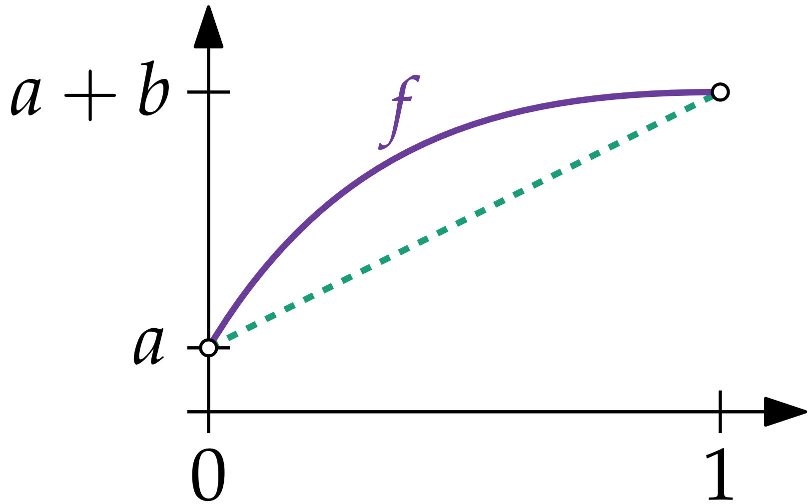
Randomisiertes Runden

Satz 3. Sei (y^*, z^*) eine optimale Lösung für obige LP-Relaxierung. Wenn wir jede Variable x_i unabhängig mit WK y_i^* auf 1 setzen, erhalten wir eine $\underbrace{(1 - 1/e)}_{\approx 0{,}63}$-Approximation für MaxSat.

Der mathematische Werkzeugkasten

Sei f eine auf $[0,1]$ konkave Funktion
(d.h. $f''(x) \leq 0$ auf $[0,1]$) mit $f(0) = a$ und $f(1) = a + b$

$\Rightarrow f(x) \geq \boxed{bx + a}$ für $x \in [0,1]$.



Ungleichung von geom. & arithmetischen Mittel (UgaM):

Für alle nicht-negativen Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gilt:

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{1/k} \leq \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)$$

Randomisiertes Runden (Beweis)

Betrachte eine feste Klausel C_j der Länge l_j. Dann gilt:

$$\Pr[C_j \text{ nicht erf.}] = \prod_{i \in P_j} (1 - y_i^*) \prod_{i \in N_j} y_i^*$$

$$\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^{1/k} \leq \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)$$

UgaM

$$\leq \left[\frac{1}{l_j}\left(\sum_{i \in P_j}(1 - y_i^*) + \sum_{i \in N_j} y_i^*\right)\right]^{l_j}$$

$$= \left[1 - \frac{1}{l_j}\underbrace{\left(\sum_{i \in P_j} y_i^* + \sum_{i \in N_j}(1 - y_i^*)\right)}_{\geq z_j^* \text{ wg. LP-Nebenbed.}}\right]^{l_j}$$

$$\leq \left(1 - \frac{z_j^*}{l_j}\right)^{l_j}$$

Randomisiertes Runden (Beweis)

Funktion $f(z_j^*) = 1 - \left(1 - \frac{z_j^*}{l_j}\right)^{l_j}$ ist konkav auf $[0,1]$.

Also gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[C_j \text{ erfüllt}] &\geq f(z_j^*) \geq f(1) \cdot z_j^* + f(0) \\
&\geq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{l_j}\right)^{l_j}\right] z_j^* \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) z_j^*
\end{aligned}$$

$1 + x \leq e^x$

Randomisiertes Runden (Beweis)

Also

$$\begin{aligned}
E[W] &= \sum_{j=1}^{m} \Pr[C_j \text{ erfüllt}] \cdot w_j \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \boxed{\sum_{j=1}^{m} w_j z_j^*} \quad \text{(Zielfunktion des LPs)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \mathrm{OPT} \qquad \square
\end{aligned}$$

Satz 4. Obiger Algorithmus kann mit Hilfe der Methode der bedingten Erwartungswerte derandomisiert werden.

Nimm die bessere beider Lösungen!

Satz 5. Die bessere der beiden Lösungen, die durch den randomisierten Algorithmus (Satz 1) sowie durch den randomisierten Rundungsalgorithmus (Satz 3) berechnet werden, liefert eine 3/4-Approximation für MaxSat.

Beweis.

Wieder ein probabilistisches Argument:
Mit Wahrscheinlichkeit jeweils 1/2 führe entweder den Algorithmus von Satz 1 oder von Satz 3 aus.

Die bessere der beiden Lösungen ist mindestens so gut wie der Erwartungswert des obigen randomisierten Algorithmus.

Nimm die bessere beider Lösungen!

Die Wahrscheinlichkeit, dass Formel C_j erfüllt wird, ist min.

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(1-\left(1-\frac{1}{l_j}\right)^{l_j}\right)}_{\text{LP-Runden}}+\underbrace{\left(1-2^{-l_j}\right)}_{\text{rand. Alg.}}\right] z_j^*.$$

Wir behaupten, dass dies mindestens $\frac{3}{4}z_j^*$ ist.

(Der Rest folgt dann analog zu Satz 1 bzw. Satz 3 durch die Linearität des Erwartungswerts)

Für $l_j = 1,2$ erhält man durch Einsetzen jeweils genau $\frac{3}{4}z_j^*$.

Für $l_j \geq 3$ gilt $1-(1-1/l_j)^{l_j} \geq (1-1/e)$ und $1-2^{-l_j} \geq \frac{7}{8}$.
Folglich ist obiger Term mindestens

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{e}\right)+\frac{7}{8}\right] z_j^* \approx 0{,}753 z_j^* \geq \frac{3}{4} z_j^* \qquad \square$$

Veranschaulichung und Derandomisierung

– Randomisierter Algorithmus für große l_j besser;
– randomisiertes Runden für kleine l_j besser
$\Rightarrow$ größere Wahrscheinlichkeit, dass Klausel C_j erfüllt ist.

Mittel beider Lösungen ist für *ganzzahlige* l_j immer $\geq \frac{3}{4}$.

Maximum ist mindestens so gut wie das Mittel.

Algorithmus kann mit Methode der bedingten Erwartungswerte derandomisiert werden.