Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

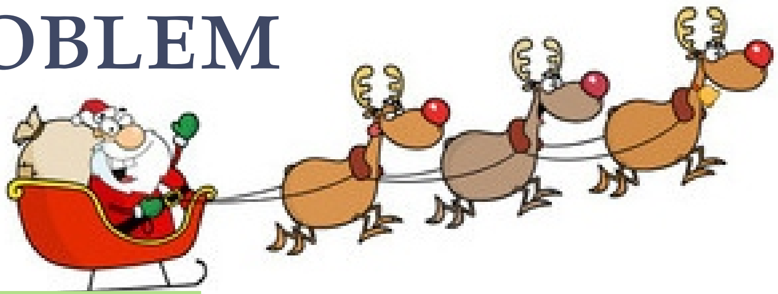
PTAS für das Weihnachtsmannproblem

10. Vorlesung

Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

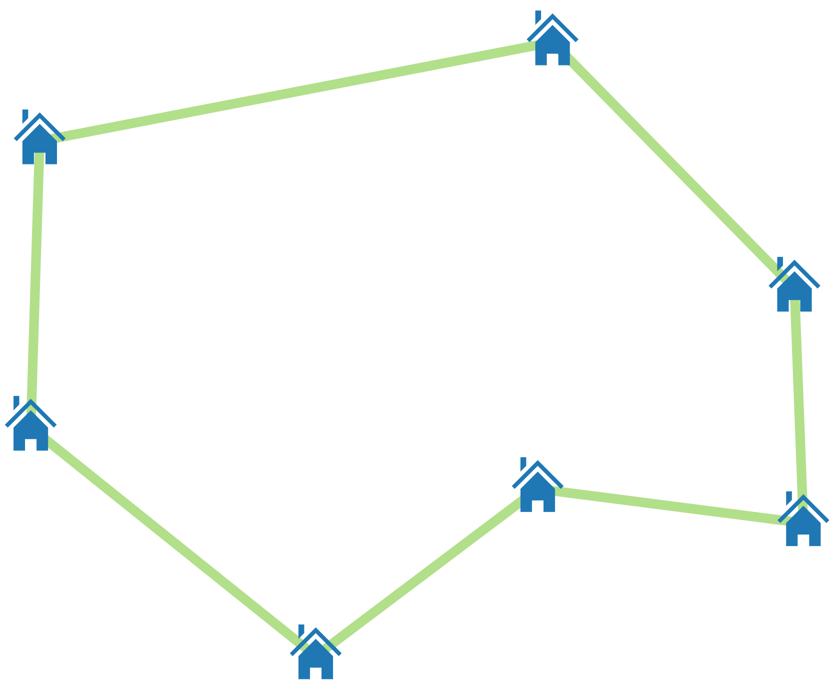
Das Weihnachtsmannproblem



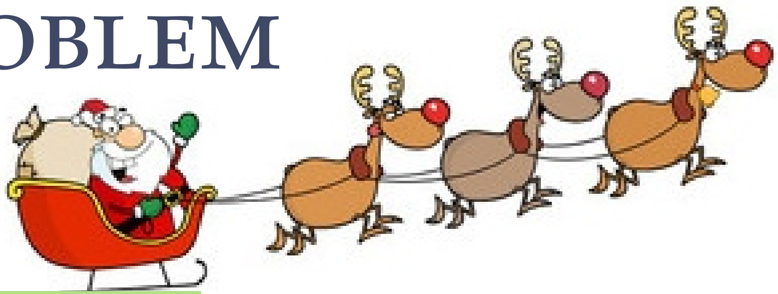
Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.



Das Weihnachtsmannproblem

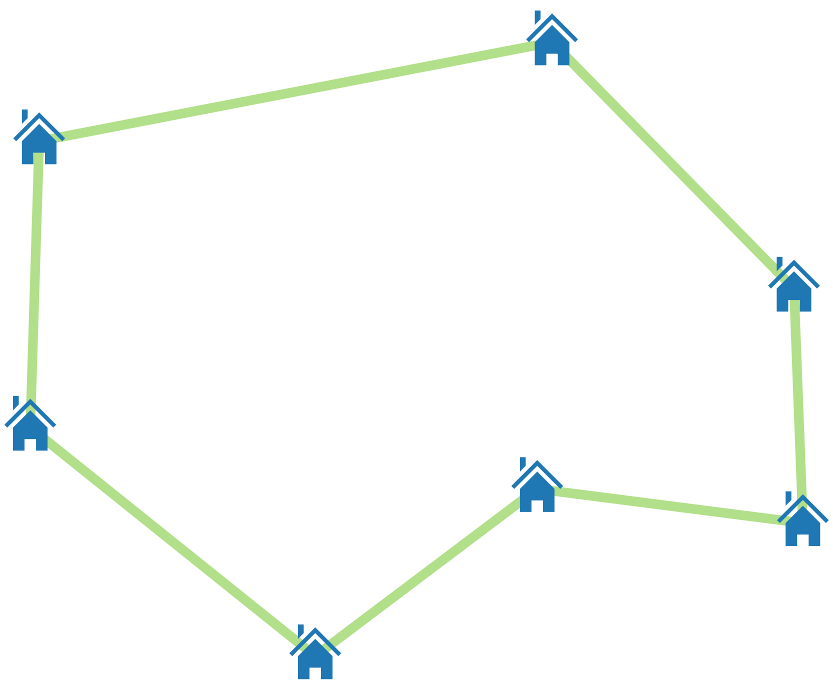


Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Distanz zwischen zwei Punkten?

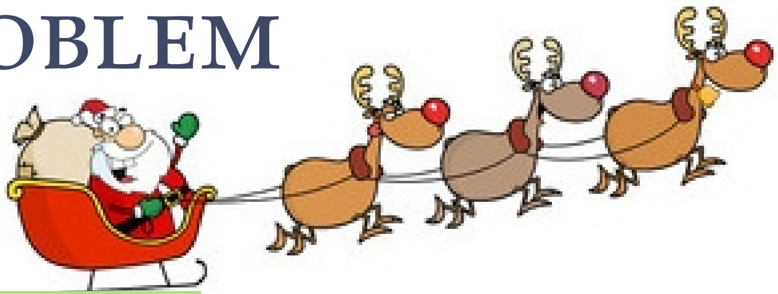


Für kein Polynom $p(n)$ lässt sich Rundreise mit Faktor $2^{p(n)}$ approximieren (außer P=NP).

MetrischeRundreise lässt sich mit Faktor $3/2$ approximieren.

MetrischeRundreise lässt sich nicht mit Faktor $\geq 123/122$ approximieren (außer P=NP).

Das Weihnachtsmannproblem

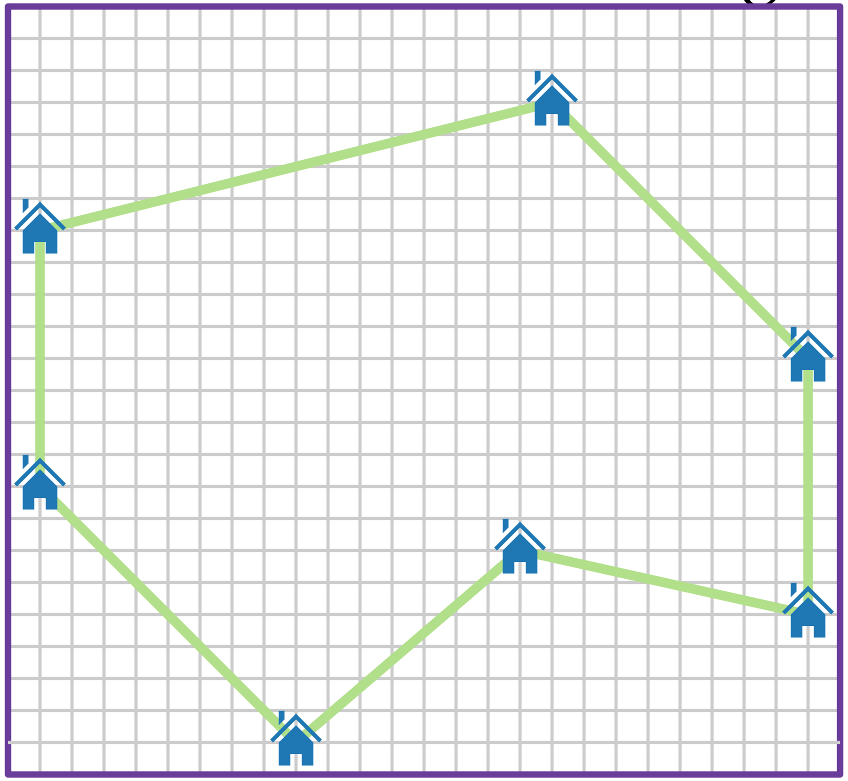


Frage: Wie schafft es der Weihnachtsmann am schnellsten, alle Häuser mit Geschenken zu beliefern?

Gegeben: Eine Menge von n Häusern in $\mathbb{R}^2$.

Gesucht: Eine Rundtour minimaler Länge.

Der Schlitten kann fliegen $\Rightarrow$ euklidische Distanz.



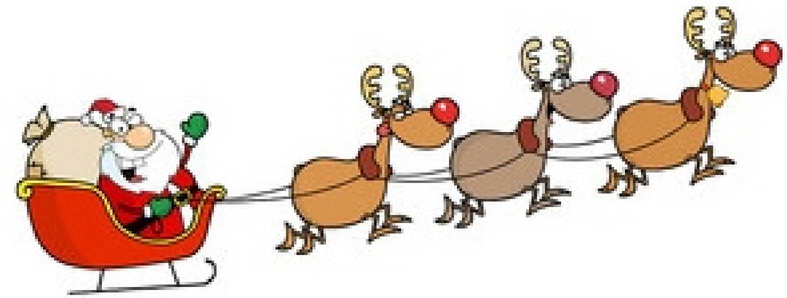
Vereinfachende Annahmen

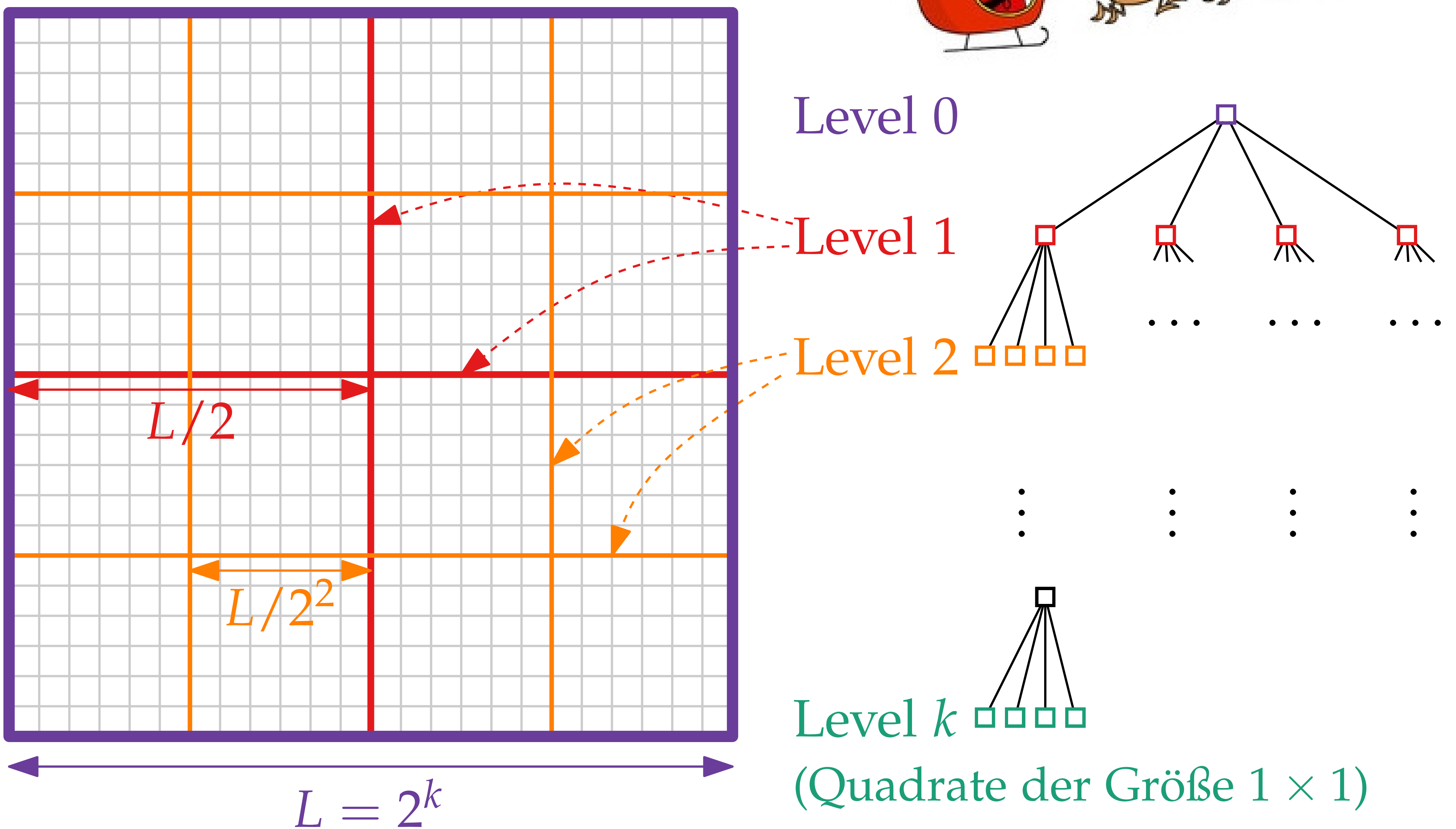
- Punkte innerhalb $(L \times L)$-Quadrat
- $L := 4n^2 = 2^k$; $k = 2 + 2\log_2 n$
- Koordinaten ganzzahlig

(„Rechtfertigung" ÜA)

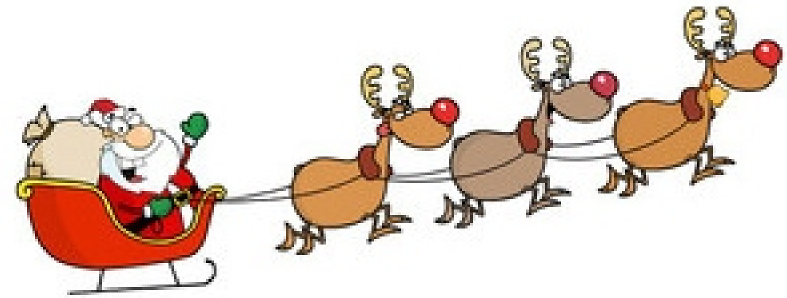
Ziel: $(1+\varepsilon)$-Approximation!

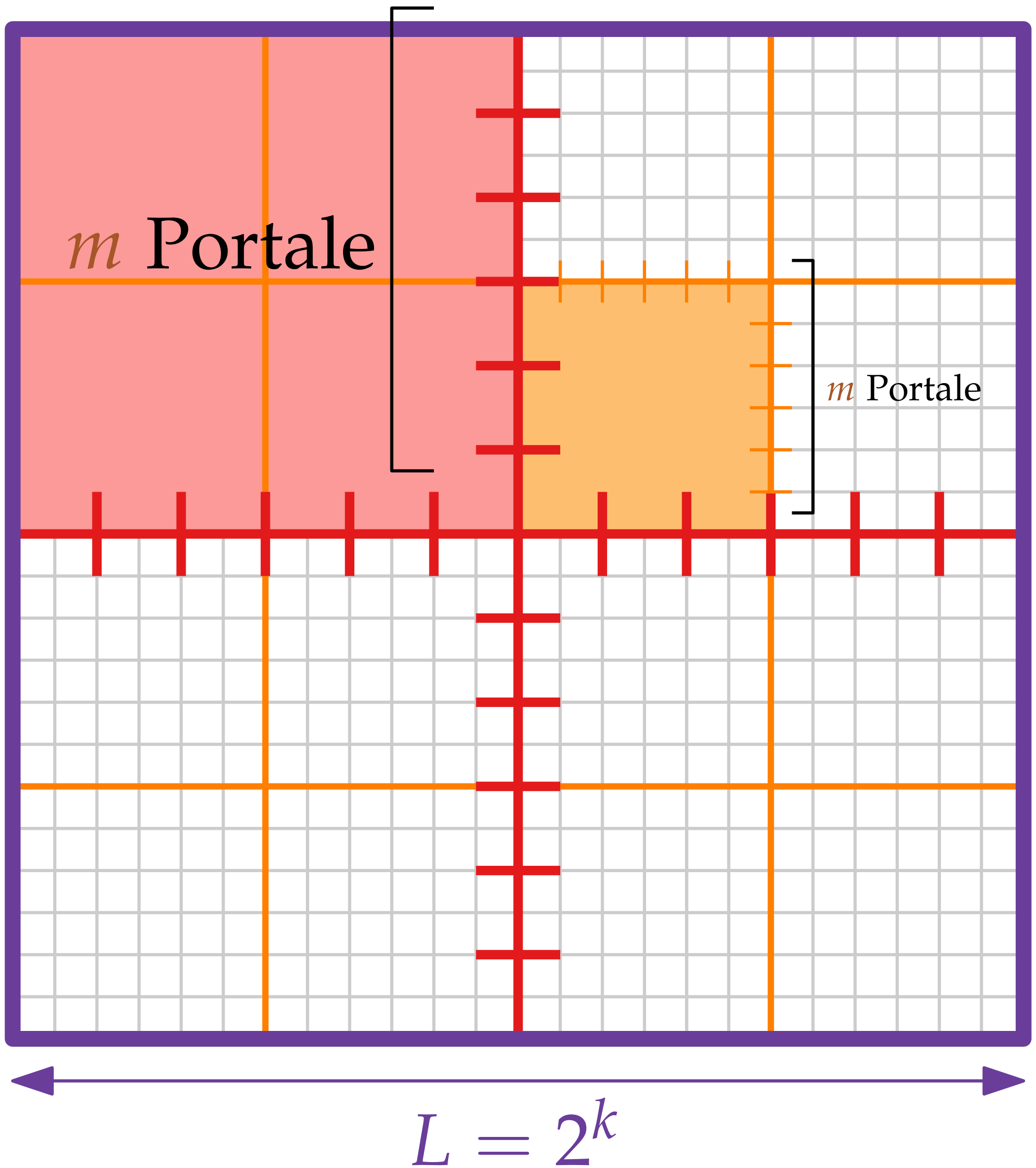
Basiszerlegung





Portale





- m Zweierpotenz aus Intervall $[k/\varepsilon, 2k/\varepsilon]$

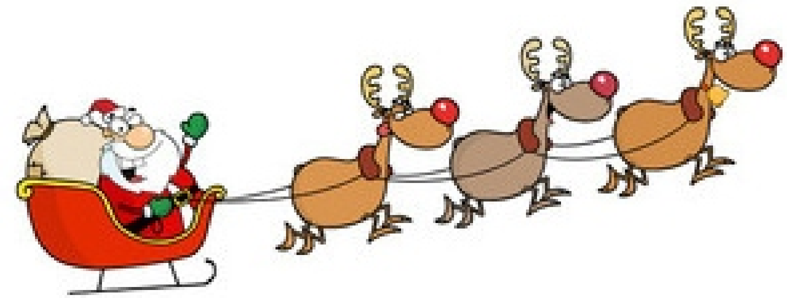
  $\Rightarrow m = O((\log n)/\varepsilon)$

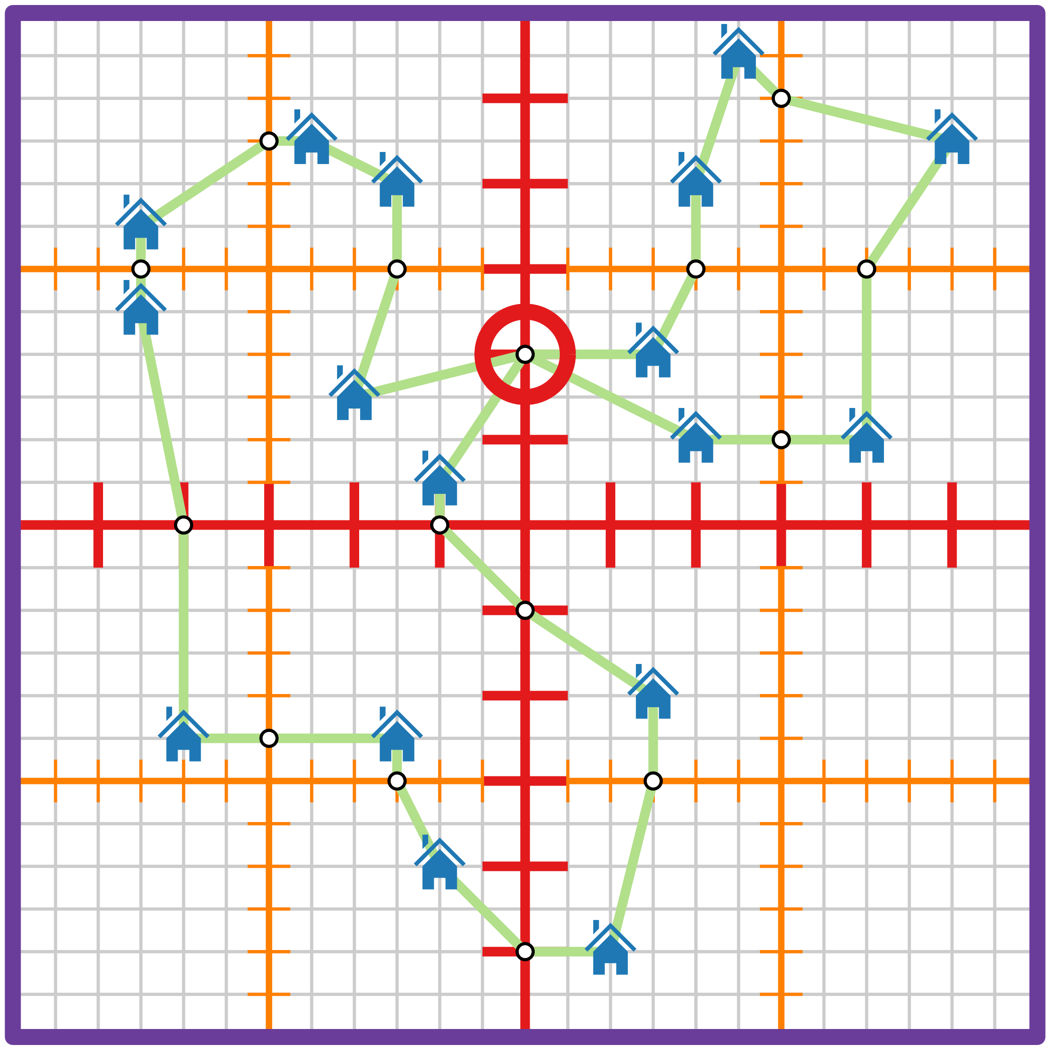
- **Portale** auf Level-i-Gerade mit Abstand $L/(2^i m)$

- Level-i-Quadrat: Größe $L/2^i \times L/2^i$

- Level-i-Quadrat hat höchstens $4m$ Portale auf seinem Rand.

Weihnachtliche Touren



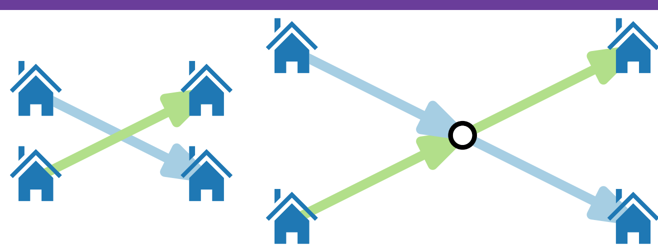


Eine Tour heißt *weihnachtlich*, wenn

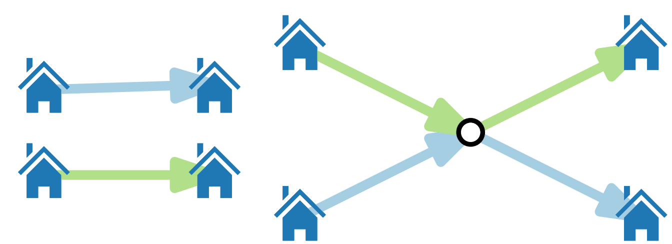
- sie eine Tour über allen Häusern und einer Teilmenge der Portale ist,
- keine Kante der Tour eine Trenngerade der Basis-zerlegung außerhalb von Portalen überquert,
- sie kreuzungsfrei ist.

Ohne Einschränkung (ÜA): Kein Portal wird mehr als zweimal besucht

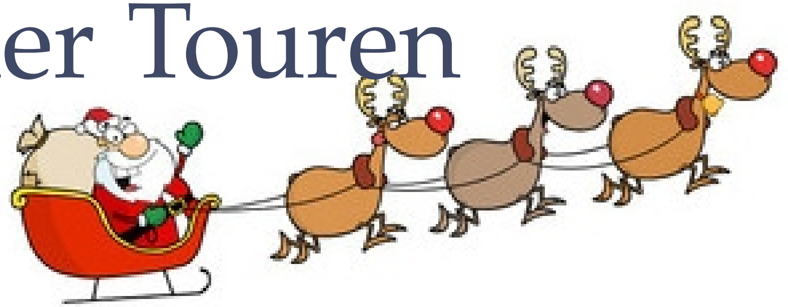
Kreuzung



Keine Kreuzung



Berechnung weihnachtlicher Touren

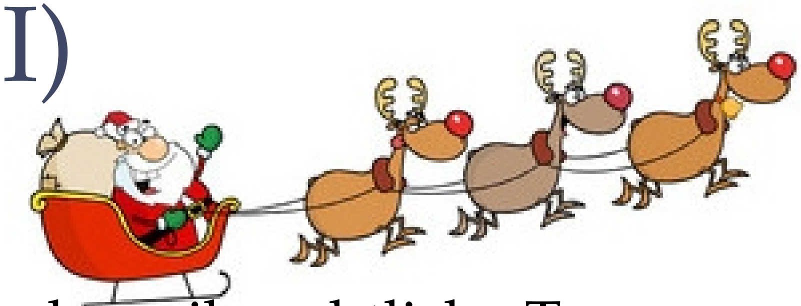


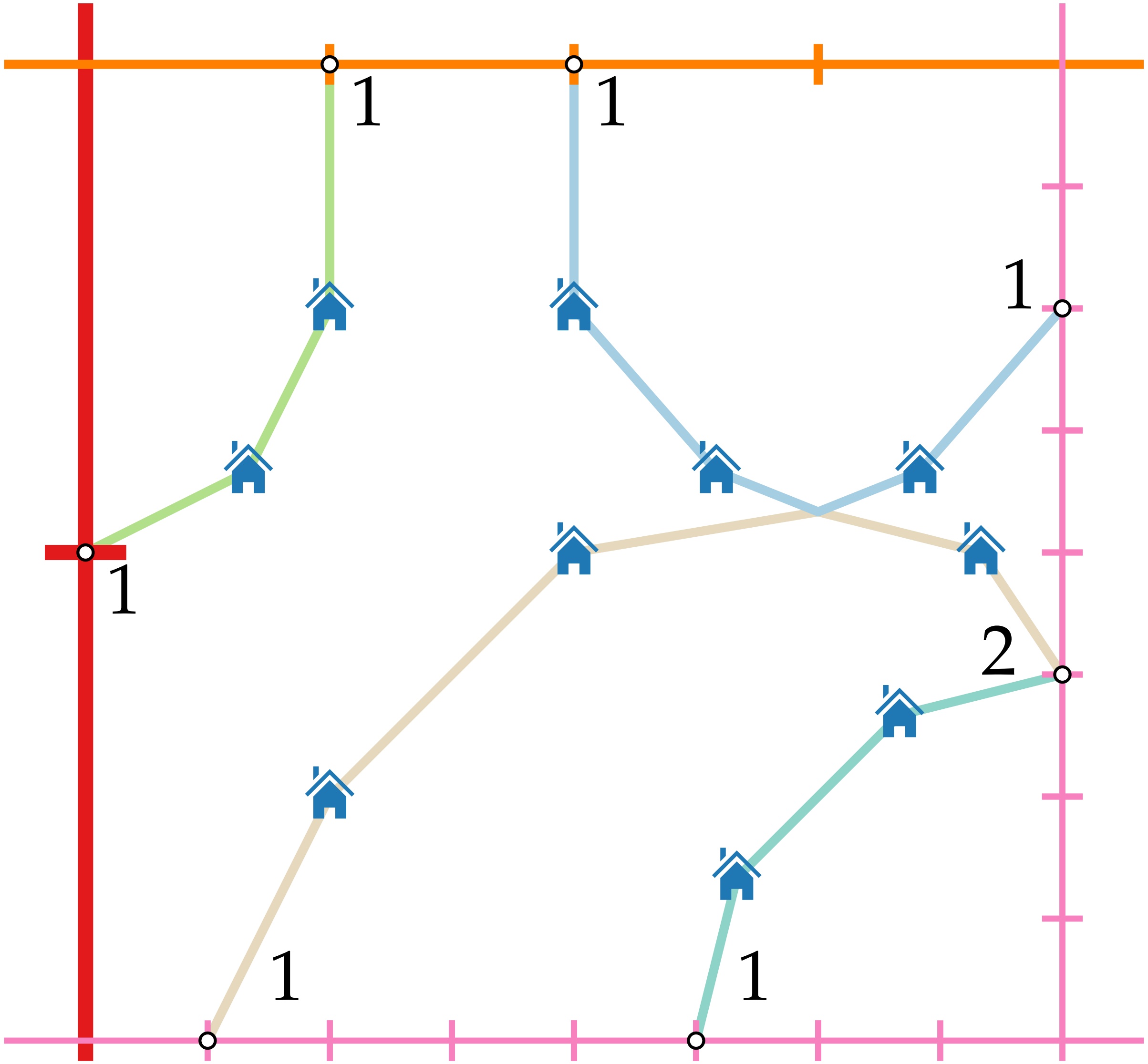
Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Beweisidee.

- Dynamische Programmierung!
- Berechne Daten über beste weihnachtliche Tour für jedes Quadrat im Zerlegungsbaum.
- Diese Daten können im Zerlegungsbaum effizient Bottom-Up propagiert werden.

Dynamisches Programm (I)





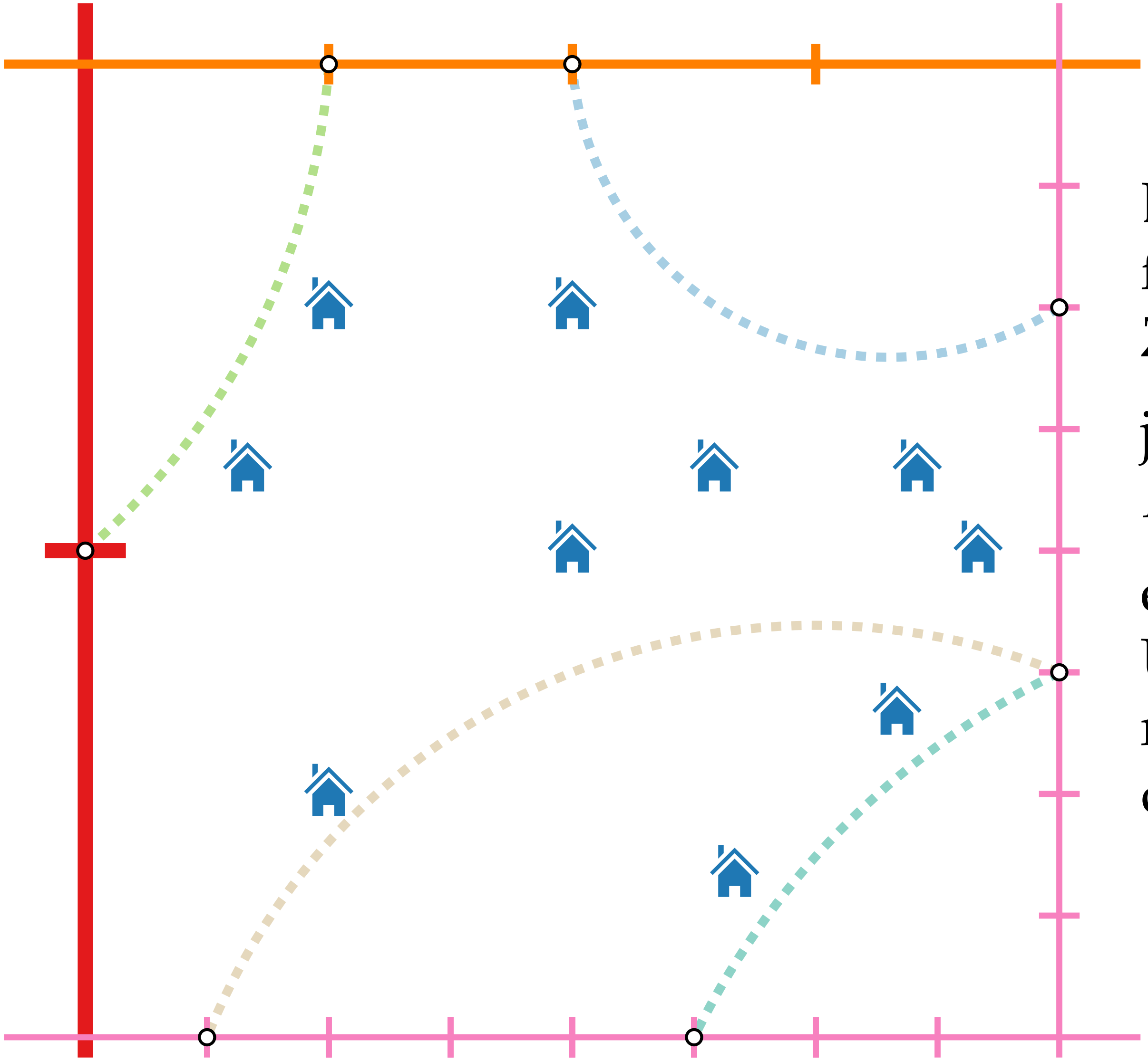
Jede weihnachtliche Tour induziert auf jedem Quadrat Q im Zerlegungsbaum:

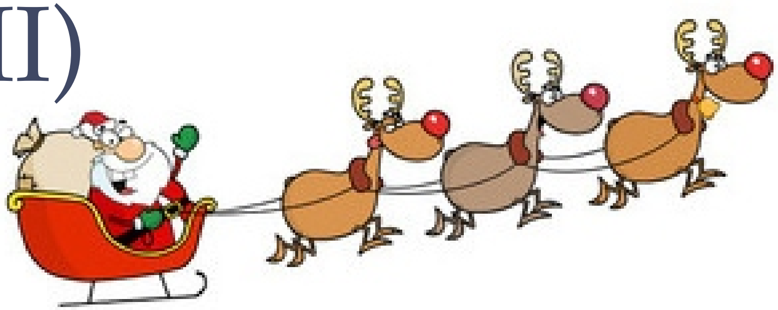
- Überdeckung der Häuser in Q mit Pfaden
- Jedes Portal von Q wird 0-, 1- oder 2-mal von diesen Pfaden besucht

$\Rightarrow$ max. $3^{4m} = 3^{O((\log n)/\varepsilon)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Möglichkeiten

$m = O((\log n)/\varepsilon)$

Dynamisches Programm (II)



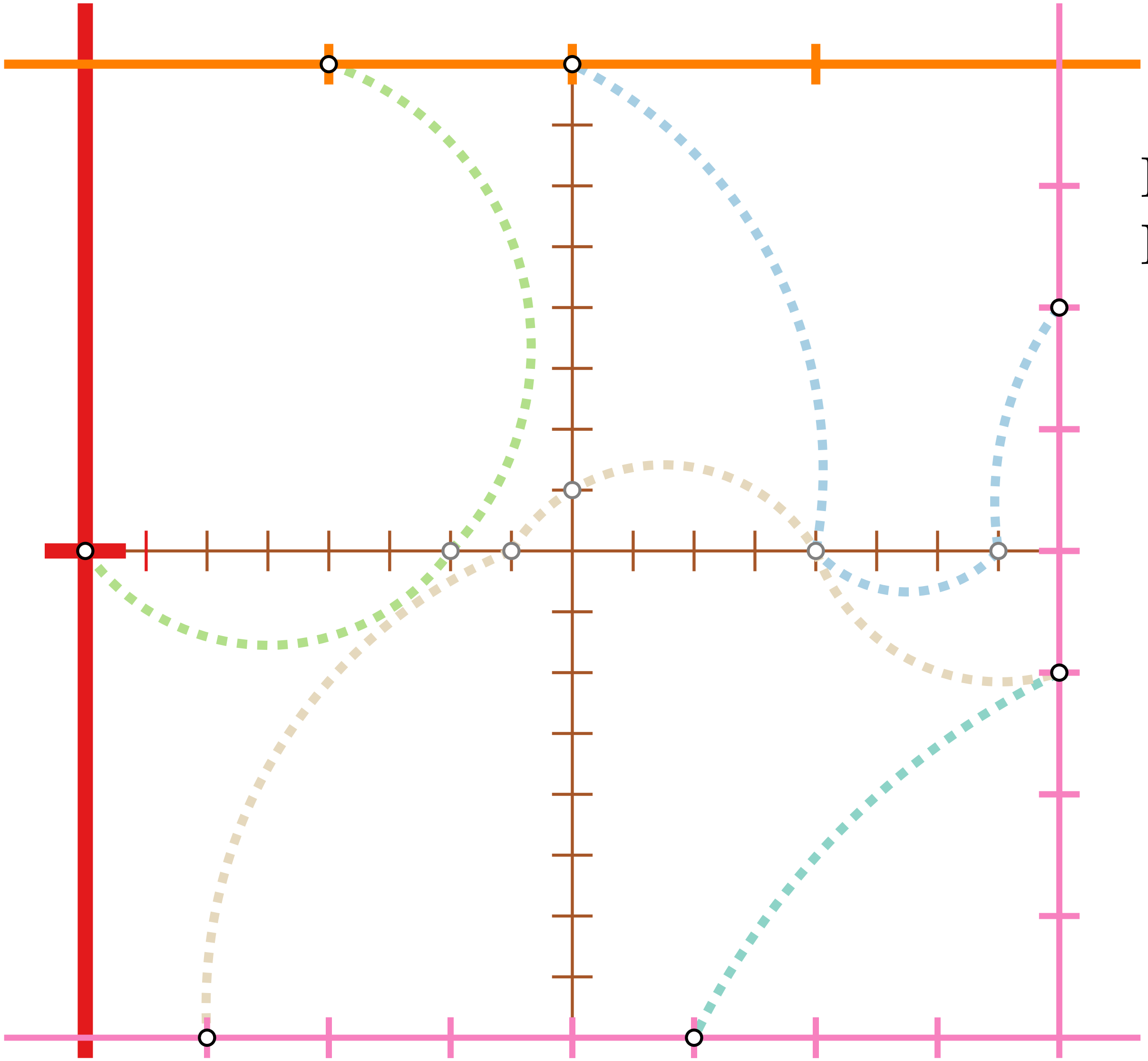


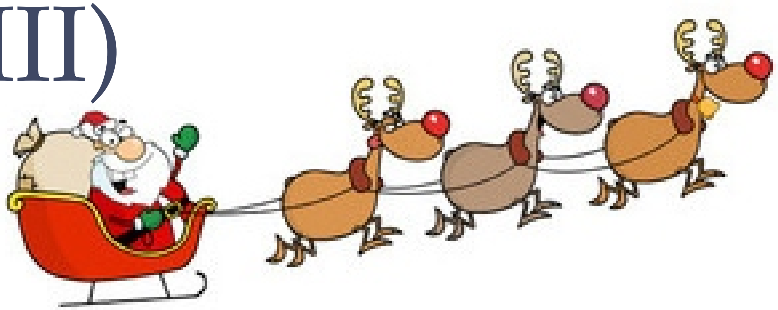
Berechne:
für jedes Quadrat Q im Zerlegungsbaum und

jede kreuzungsfreie Paarung P für Q

eine günstigste Überdeckung der Häuser mit weihnachtlichen Pfaden, die P respektiert.

Dynamisches Programm (III)



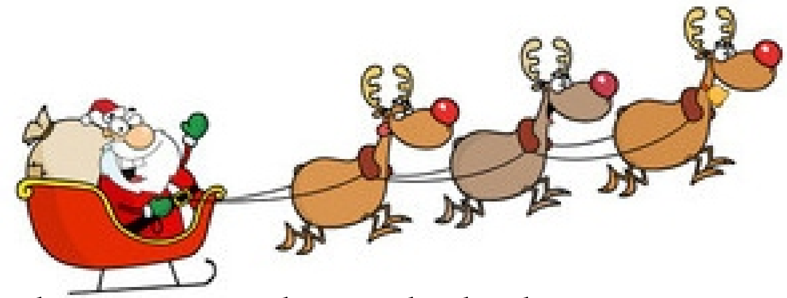


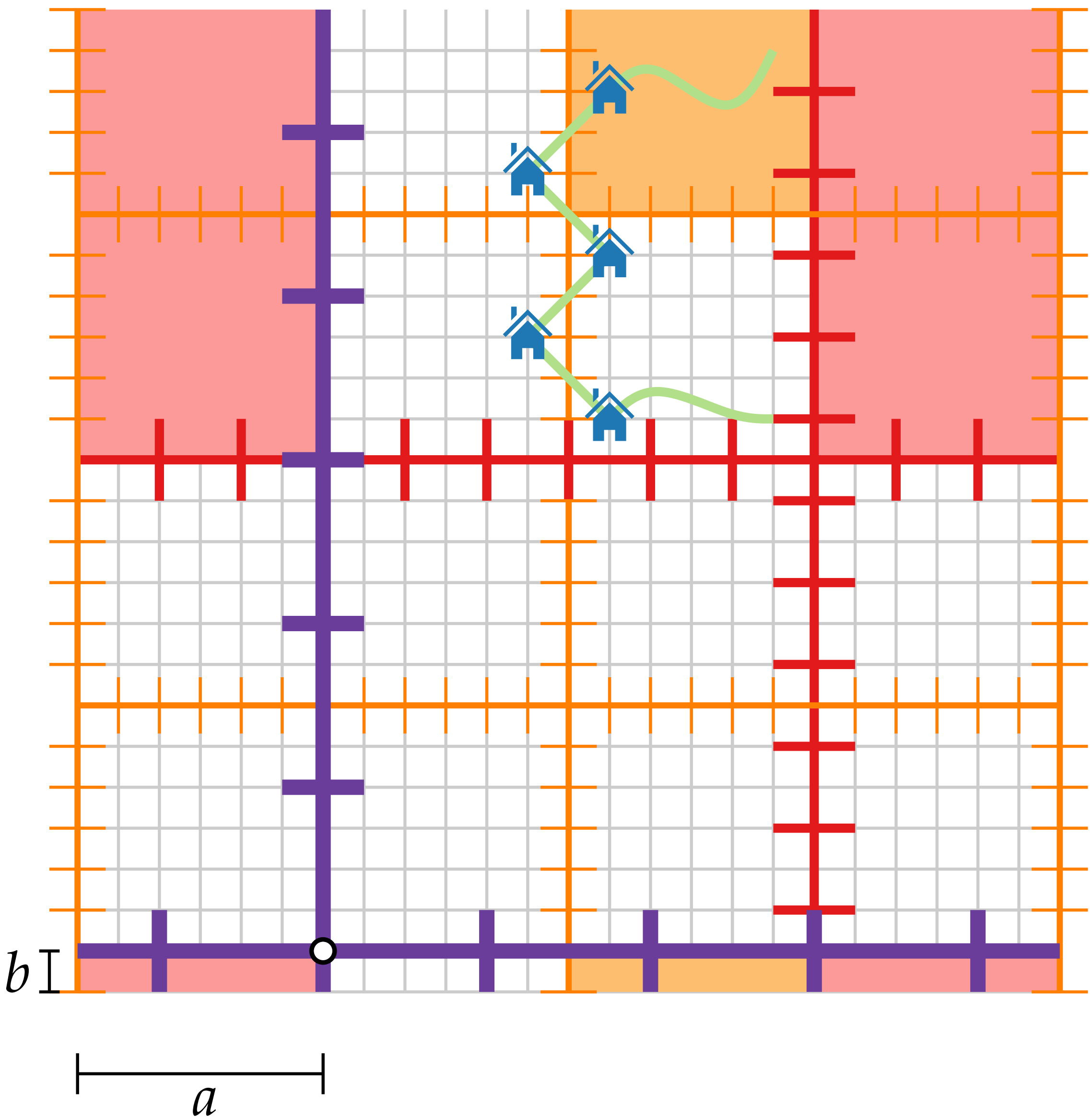
Für geg. Quadrat Q und Paarung P:

- Iteriere über alle $(n^{O(1/\varepsilon)})^4 = n^{O(1/\varepsilon)}$ kreuzungsfreie Paarungen der Kind-Quadrate
- Minimiere über alle solche Paarungen, die P respektieren
- Korrektheit per Induktion

Lemma 1. Eine günstigste weihnachtliche Tour kann in $2^{O(m)} = n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit berechnet werden.

Verschobene Zerlegung



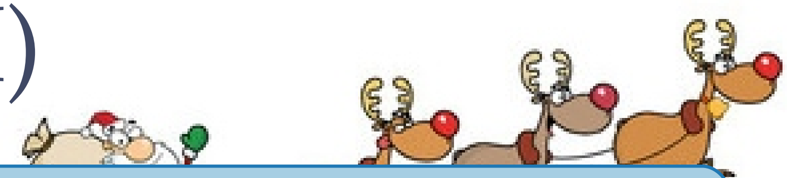


- Die beste weihnachtliche Tour kann eine schlechte Approximation liefern.
- Betrachte (a, b)-verschobene Zerlegung:

$$x \mapsto (x + a) \bmod L$$
$$y \mapsto (y + b) \bmod L$$

- Quadrate im Zerlegungsbaum werden „umgeschlagen".
- Dynamisches Programm muss entsprechend modifiziert werden.

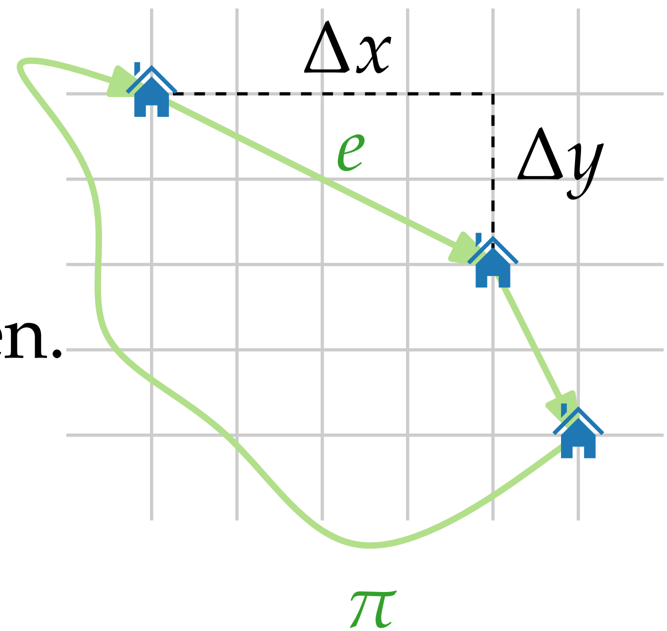
Verschobene Zerlegung (II)



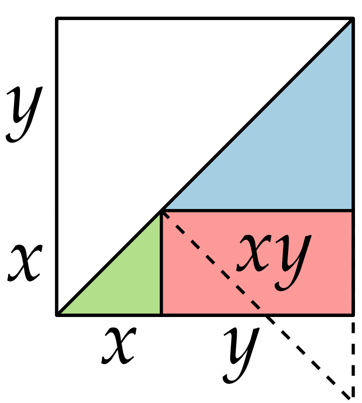
Lemma 2. Sei π eine optimale Tour und $N(\pi)$ die Anzahl der Kreuzungen von π mit Geraden des $(L \times L)$-Gitters. Dann gilt $N(\pi) \le \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$.

Beweis.

- Betrachte Tour als Folge gerichteter Kanten.

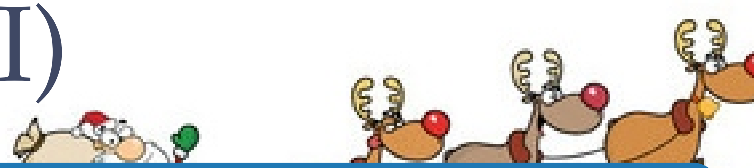


- Jede Kante e generiert $N_e \le \Delta x + \Delta y$ Kreuzungen.
- Kreuzungen des Endpunktes einer Kante werden der Folgekante zugerechnet.



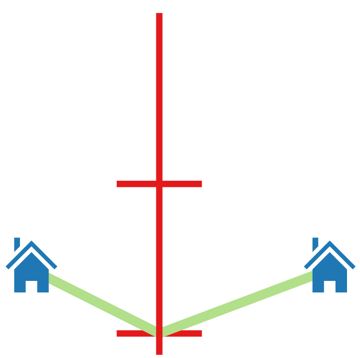
- $N_e{}^2 \le (\Delta x + \Delta y)^2 \overset{\text{(AM–GM)}}{\le} 2(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 2|e|^2.$
- $N(\pi) = \sum_{e \in \pi} N_e \le \sum_{e \in \pi} \sqrt{2|e|^2} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}.$ $\square$

Verschobene Zerlegung (III)



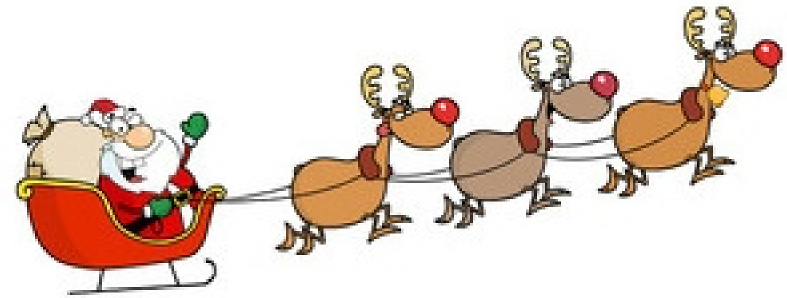
Satz 3. Seien $a, b \in [0, L-1]$ zufällig gleichverteilt und unabhängig gewählt. Dann sind die erwarteten Kosten einer günstigsten weihnachtlichen Tour bezüglich der (a, b)-verschobenen Zerlegung höchstens $(1 + \sqrt{2}\varepsilon)\mathrm{OPT}$.

Beweis. Betrachte optimale Tour π. Machen π weihnachtlich, indem wir alle Schnittpunkte mit dem $(L \times L)$-Gitter zum nächstgelegenen Portal bewegen.



Verlängerung pro Schnittpunkt $\leq$ Interportaldistanz

Verschobene Zerlegung (II

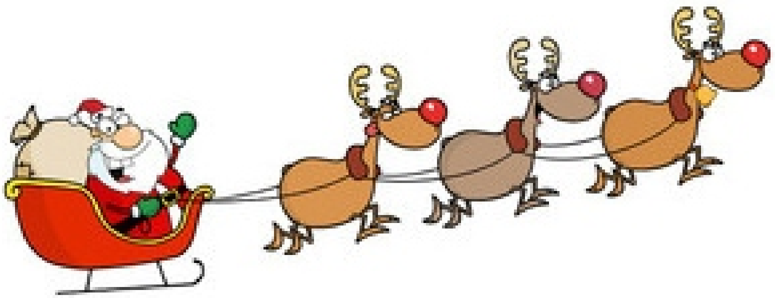


- Betrachte einen Schnittpunkt von π mit einer Gerade l des $(L \times L)$-Gitters.
- Mit Wahrscheinlichkeit *höchstens* $2^i/L$ ist l eine Level-i-Gerade, was zu einer Erhöhung der Tourlänge um höchstens $L/(2^i m)$ führt (Interportal-Distanz).
- Die erwartete Erhöhung der Tourlänge aufgrund dieses Schnittpunkts ist somit höchstens

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{L}{2^i m} \cdot \frac{2^i}{L} \leq \frac{k+1}{m} \leq \varepsilon.$$

- Summierung über alle $N(\pi) \leq \sqrt{2} \cdot \mathrm{OPT}$ vielen Schnittpunkte zusammen mit der Linearität des Erwartungswertes liefert die Behauptung.

Approximationsschema



Satz 4. Es gibt einen *deterministischen* Algorithmus (PTAS) für WEIHNACHTSMANNPROBLEM, der für jedes $\varepsilon > 0$ eine $(1 + \varepsilon)$-Approximation in $n^{O(1/\varepsilon)}$ Zeit liefert.

Beweis. Probiere alle L^2 vielen (a, b)-verschobenen Zerlegungen aus. Eine davon muss nach **Satz 3** die gewünschte Güte haben. $\square$