Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

Minimalgrad-Spannbaum durch lokale Suche

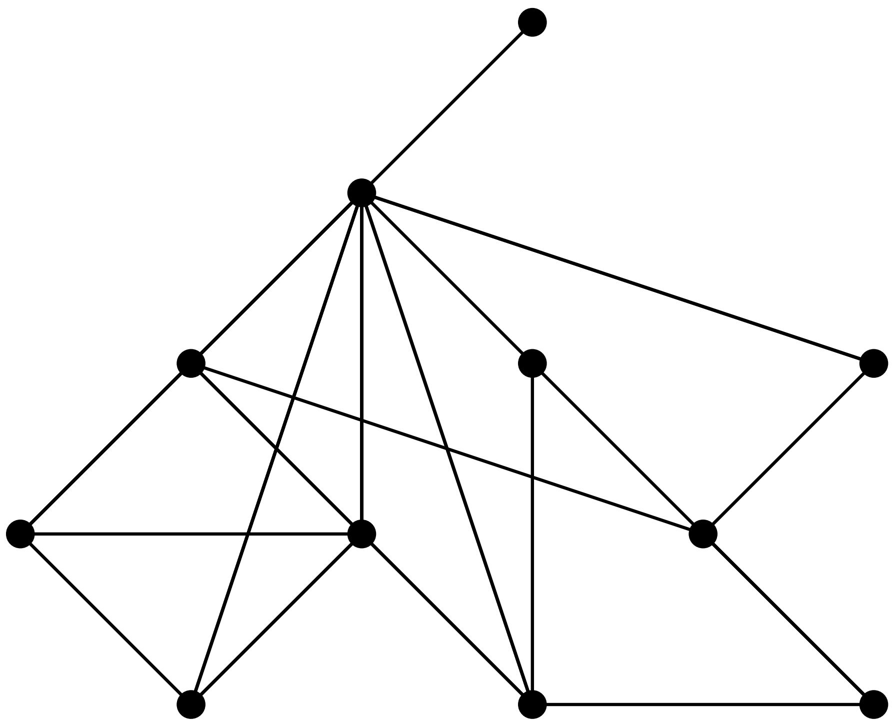
9. Vorlesung

Jonathan Klawitter

Wintersemester 2019/20

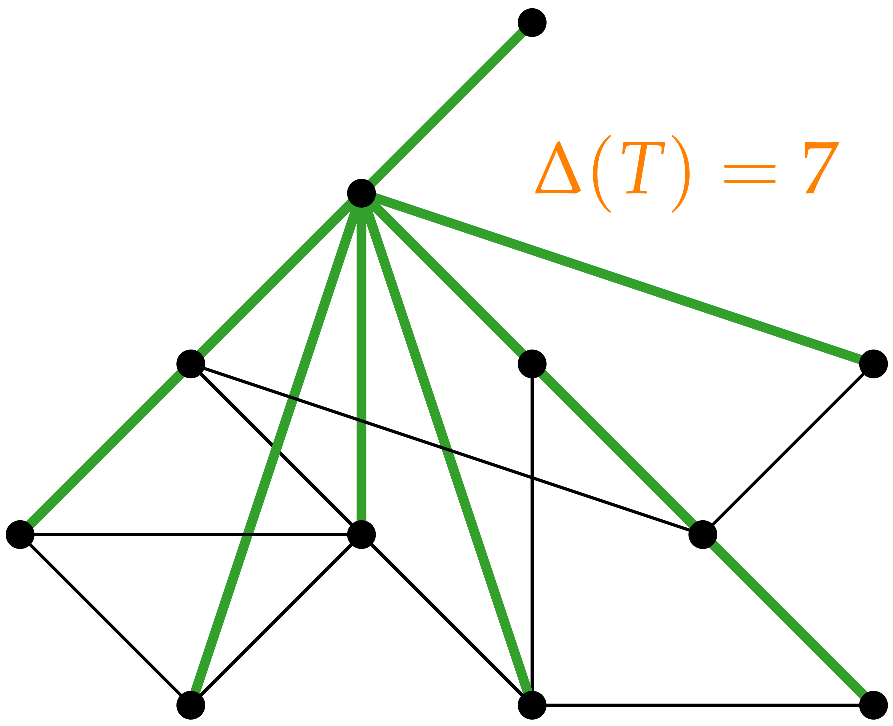
Minimum-Degree Spanning Tree

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.
Gesucht ist ein Spannbaum T, dessen Maximalgrad $\Delta(T)$ minimal unter allen Spannbäumen ist.



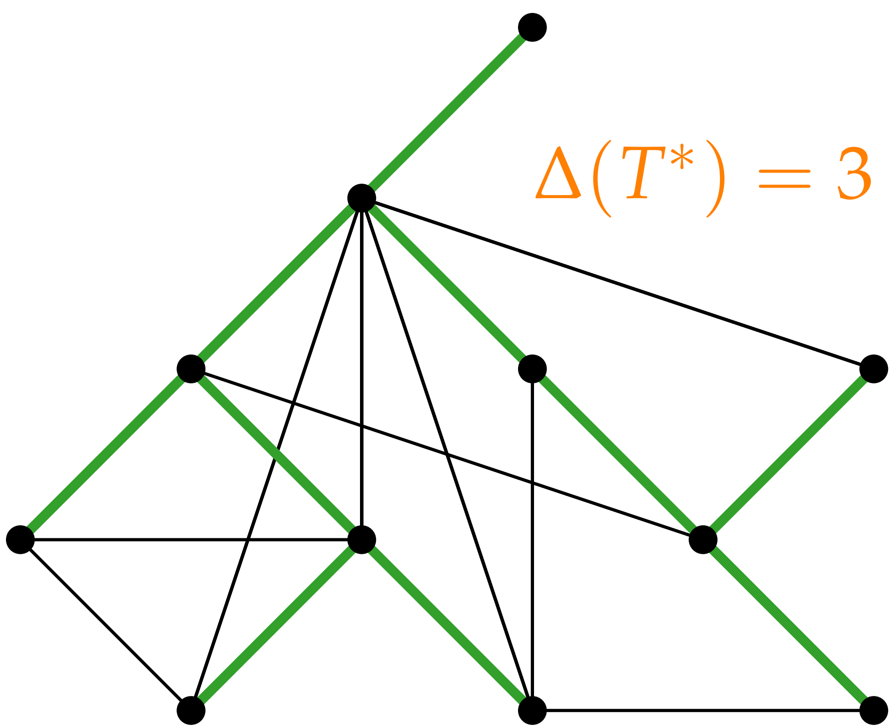
Minimum-Degree Spanning Tree

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.
Gesucht ist ein Spannbaum T, dessen Maximalgrad $\Delta(T)$ minimal unter allen Spannbäumen ist.



Minimum-Degree Spanning Tree

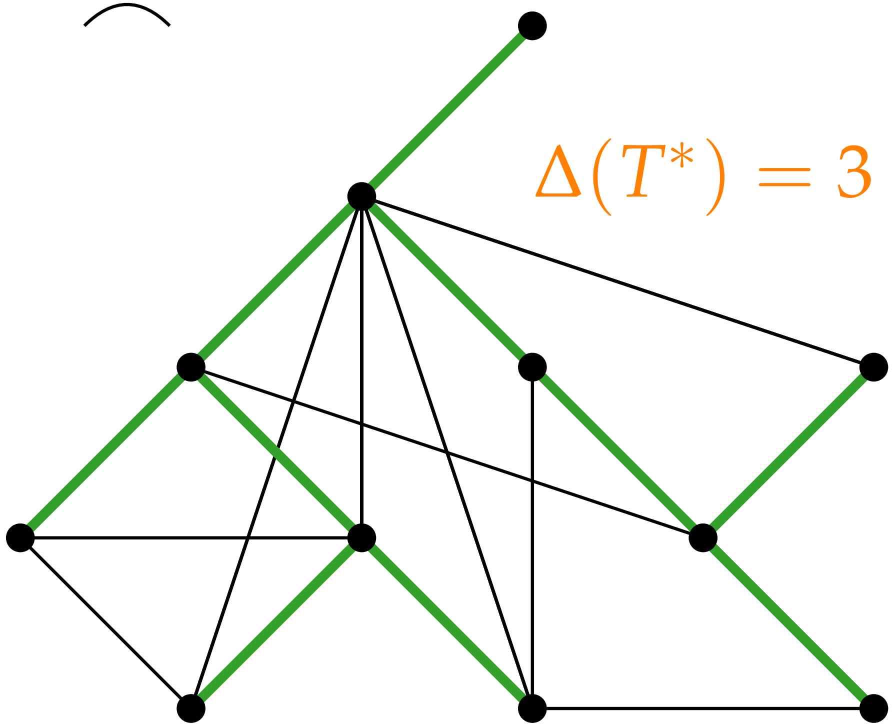
Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$. Gesucht ist ein Spannbaum T, dessen Maximalgrad $\Delta(T)$ minimal unter allen Spannbäumen ist.



Minimum-Degree Spanning Tree

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.
Gesucht ist ein Spannbaum T, dessen Maximalgrad $\Delta(T)$ minimal unter allen Spannbäumen ist.

NP-schwer :(

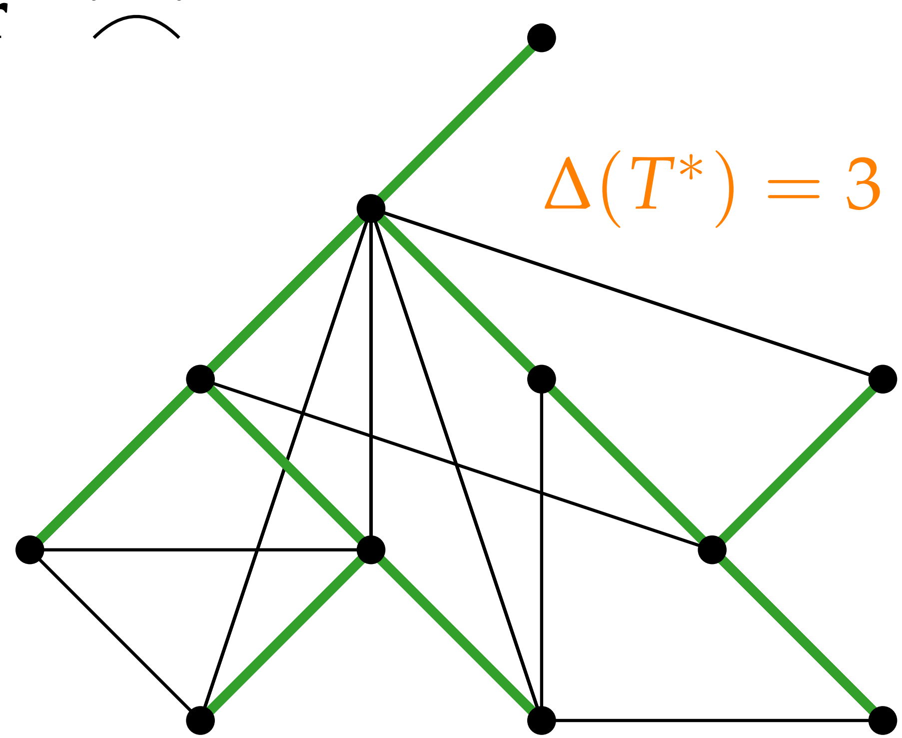


Minimum-Degree Spanning Tree

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.
Gesucht ist ein Spannbaum T, dessen Maximalgrad $\Delta(T)$ minimal unter allen Spannbäumen ist.

NP-schwer :(

Warum?

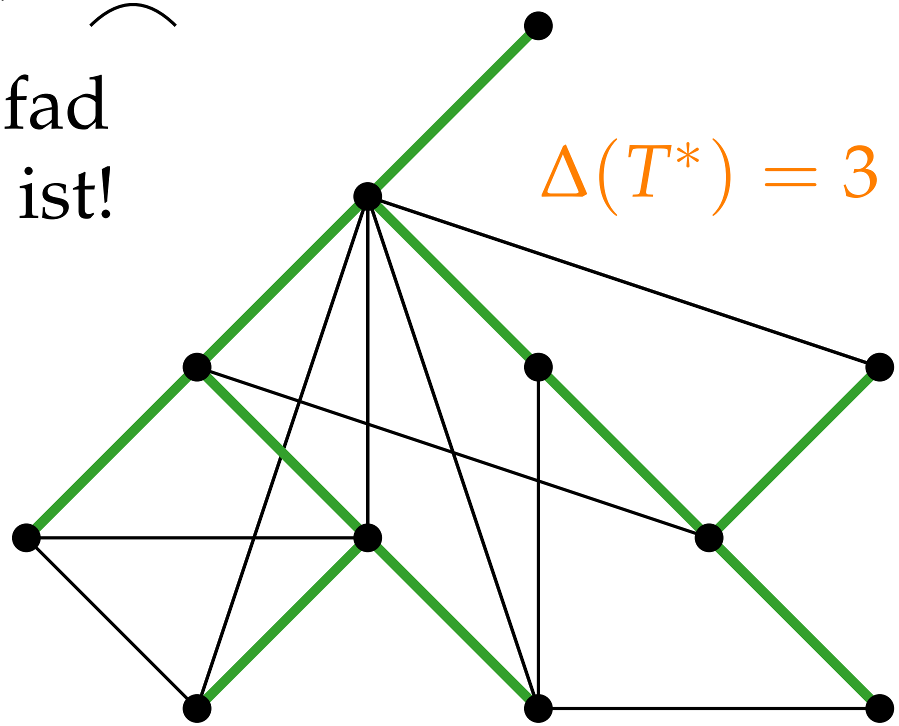


Minimum-Degree Spanning Tree

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.
Gesucht ist ein Spannbaum T, dessen Maximalgrad $\Delta(T)$ minimal unter allen Spannbäumen ist.

NP-schwer

da Hamiltonpfad ein Spezialfall ist!



Aufwärmung

Beob. Ein Spannbaum T hat

- n Knoten und ? Kanten,
- Knotengradsumme $\sum_{v \in V} \deg_T(v) =$?
- durchschnittlichen Knotengrad $<$?

Aufwärmung

Beob. Ein Spannbaum T hat

- n Knoten und $n-1$ Kanten,
- Knotengradsumme $\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2n - 2$,
- durchschnittlichen Knotengrad < 2.

Aufwärmung

Beob. Ein Spannbaum T hat
- n Knoten und $n-1$ Kanten,
- Knotengradsumme $\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2n - 2$,
- durchschnittlichen Knotengrad < 2.

Beob. Sei $V' \subseteq V(G)$.
Dann gilt $\Delta(G) \geq$?

Aufwärmung

Beob. Ein Spannbaum T hat

- n Knoten und $n-1$ Kanten,
- Knotengradsumme $\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2n-2$,
- durchschnittlichen Knotengrad < 2.

Beob. Sei $V' \subseteq V(G)$.
Dann gilt $\Delta(G) \geq \sum_{v \in V'} \deg(v) / |V'|$.

Aufwärmung

Beob. Ein Spannbaum T hat
- n Knoten und $n-1$ Kanten,
- Knotengradsumme $\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2n-2$,
- durchschnittlichen Knotengrad < 2.

Beob. Sei $V' \subseteq V(G)$.
Dann gilt $\Delta(G) \geq \sum_{v \in V'} \deg(v) / |V'|$.

Beob. Sei T ein Spannbaum mit $k = \Delta(T)$.
Dann hat T höchstens ? Knoten mit Grad k.

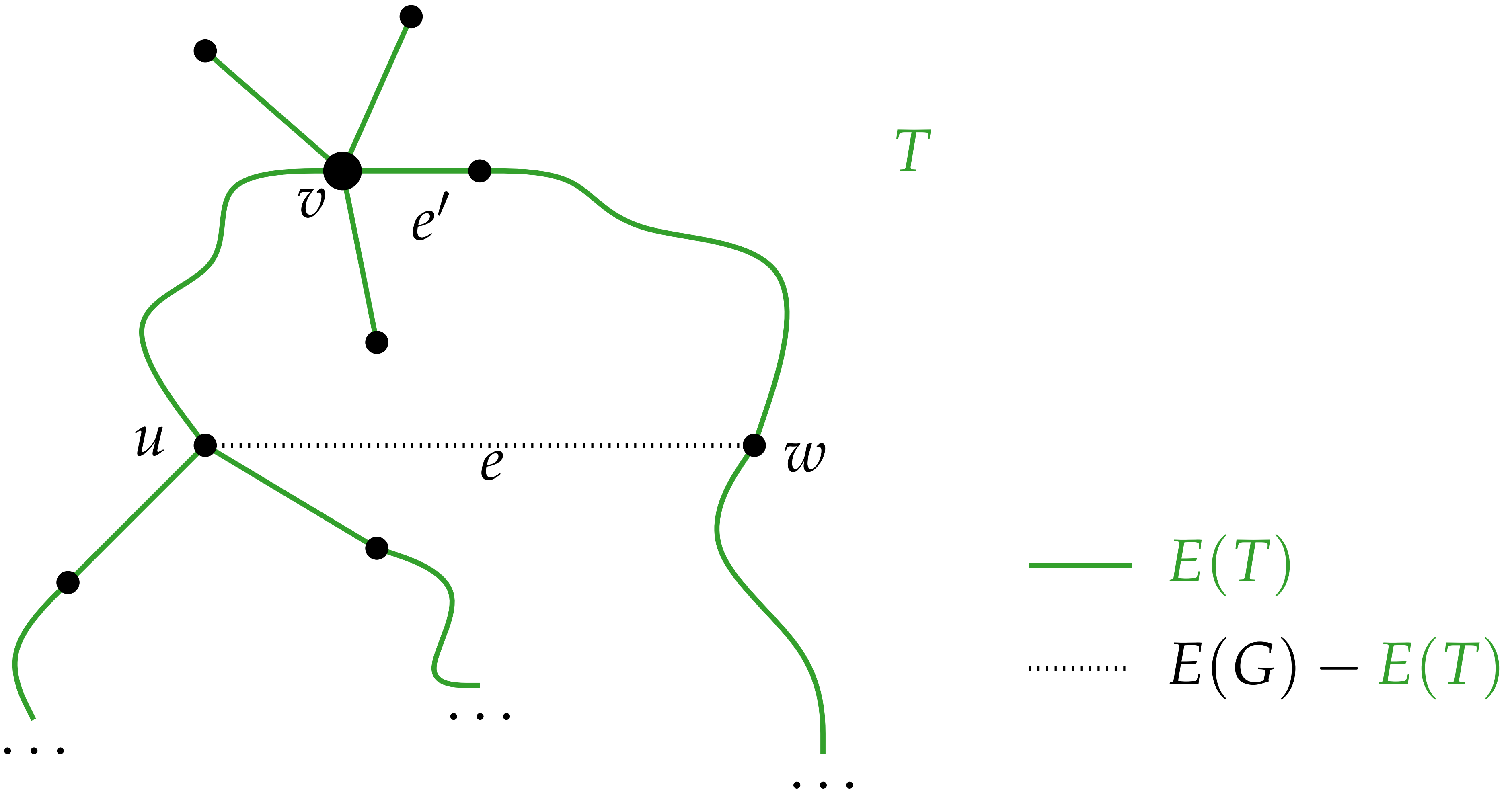
Aufwärmung

Beob. Ein Spannbaum T hat
- n Knoten und $n-1$ Kanten,
- Knotengradsumme $\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2n-2$,
- durchschnittlichen Knotengrad < 2.

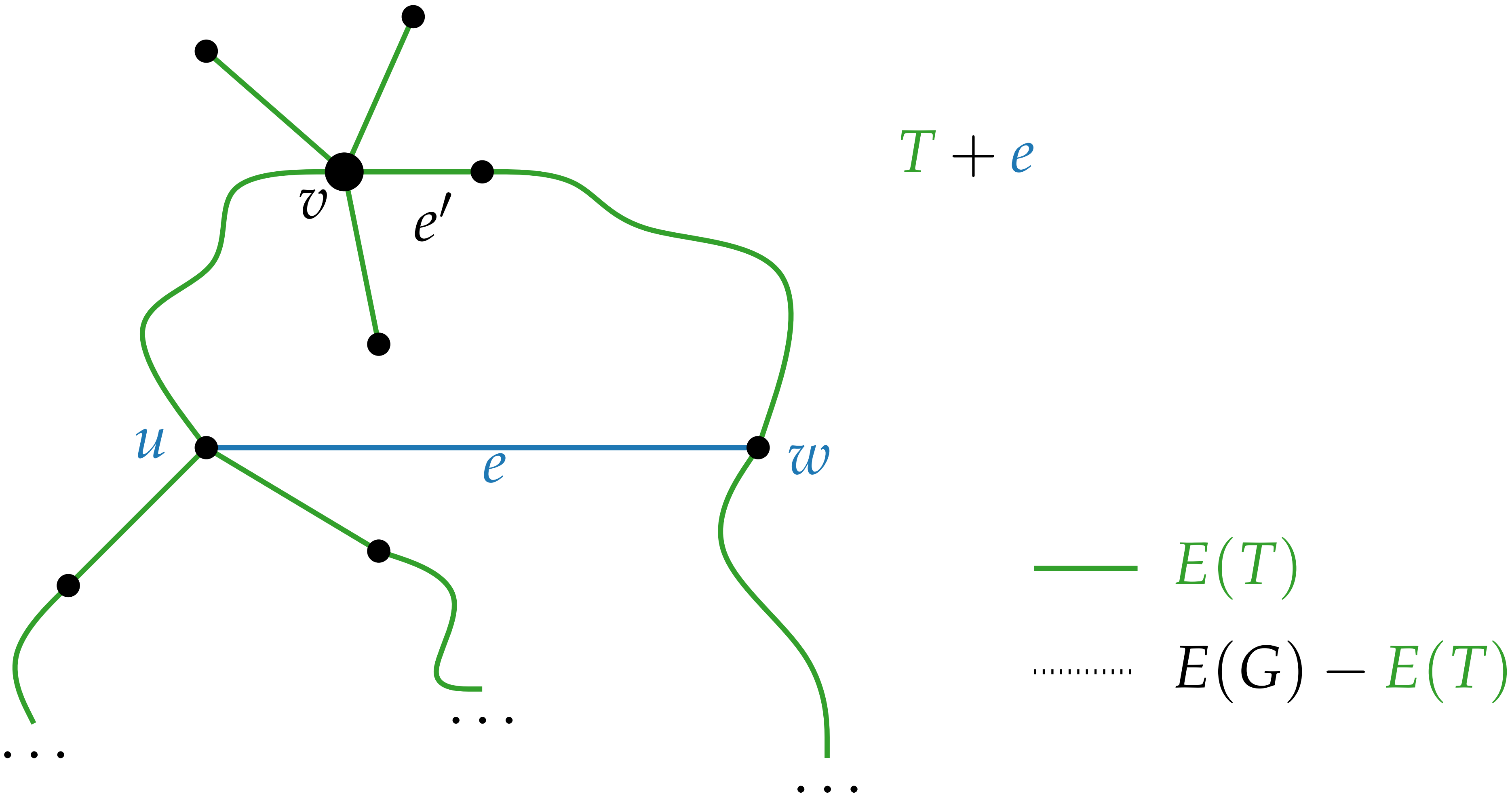
Beob. Sei $V' \subseteq V(G)$.
Dann gilt $\Delta(G) \geq \sum_{v \in V'} \deg(v) / |V'|$.

Beob. Sei T ein Spannbaum mit $k = \Delta(T)$.
Dann hat T höchstens $\frac{2n}{k}$ Knoten mit Grad k.

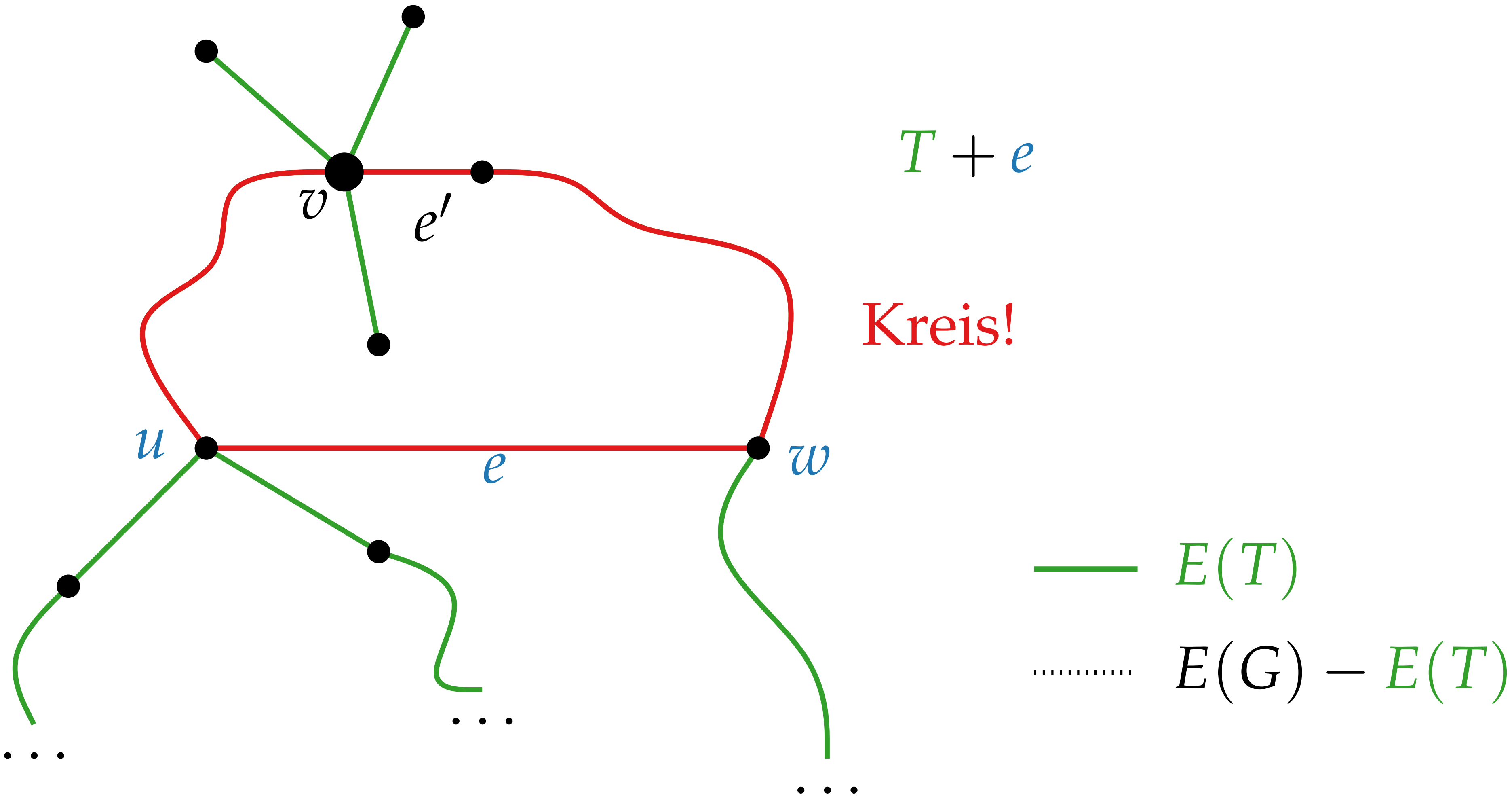
Kantenflip



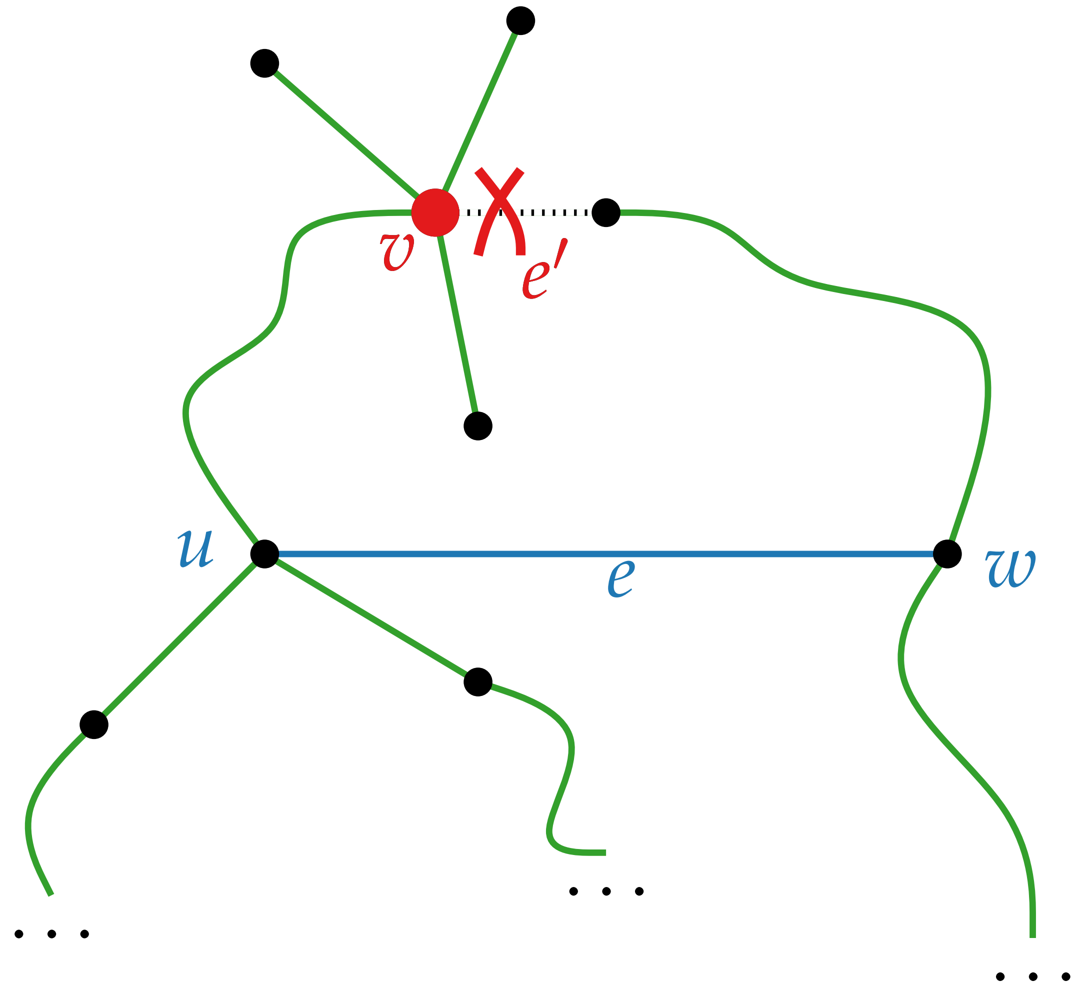
Kantenflip



Kantenflip

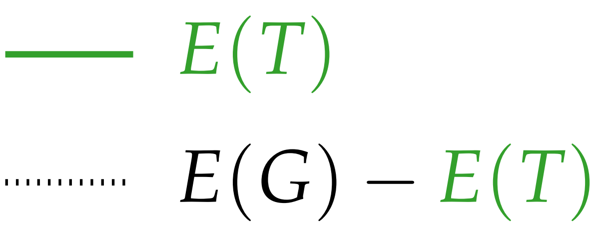


Kantenflip



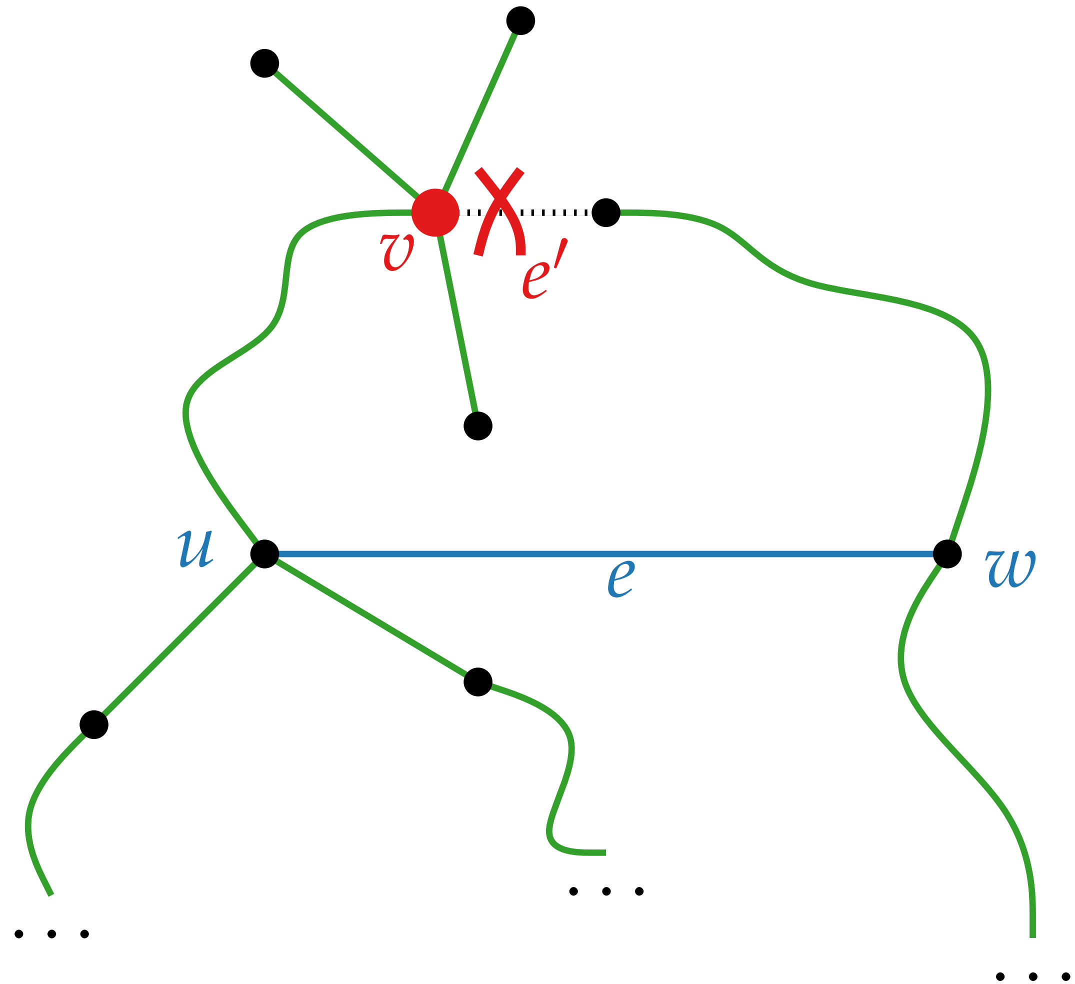
$T + e - e'$

ist ein neuer Spannbaum

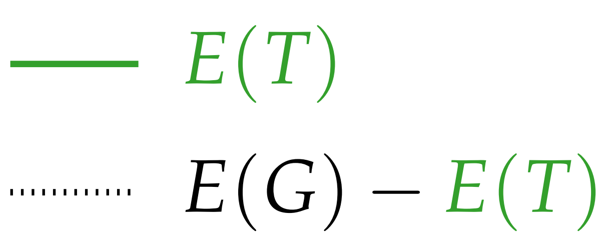


Kantenflip

Defi. Ein **verbessernder Flip** in T für einen Knoten v und eine Kante $uw \in E(G) \setminus E(T)$ ist ein Flip bei dem $\deg_T(v) >$

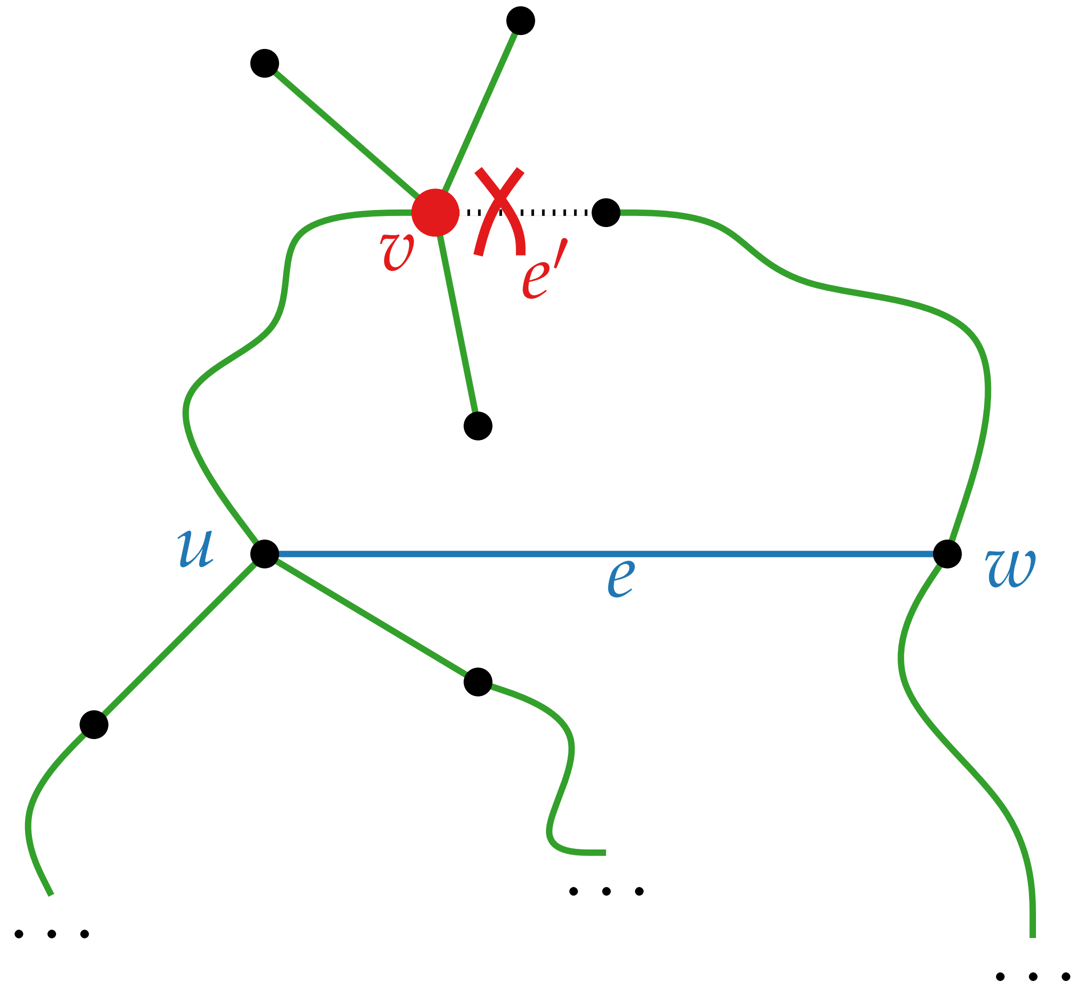


$T + e - e'$
ist ein neuer Spannbaum



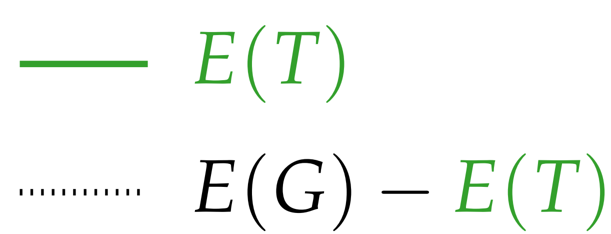
Kantenflip

Defi. Ein **verbessernder Flip** in T für einen Knoten v und eine Kante $uw \in E(G) \setminus E(T)$ ist ein Flip bei dem $\deg_T(v) > \max\{\deg_T(v), \deg_T(w)\} + 1$.



$T + e - e'$

ist ein neuer Spannbaum



Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ “verbessernder Flip” in T für einen Knoten v
mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch

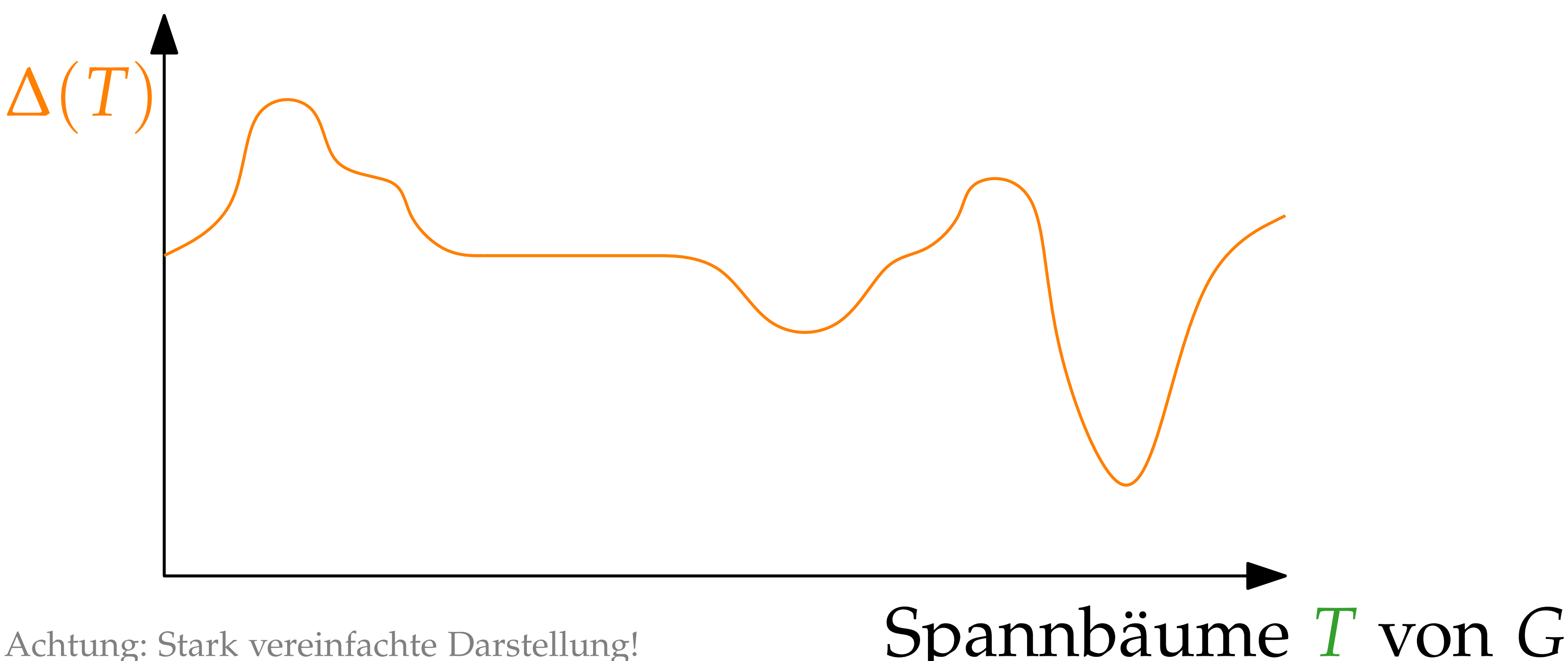
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

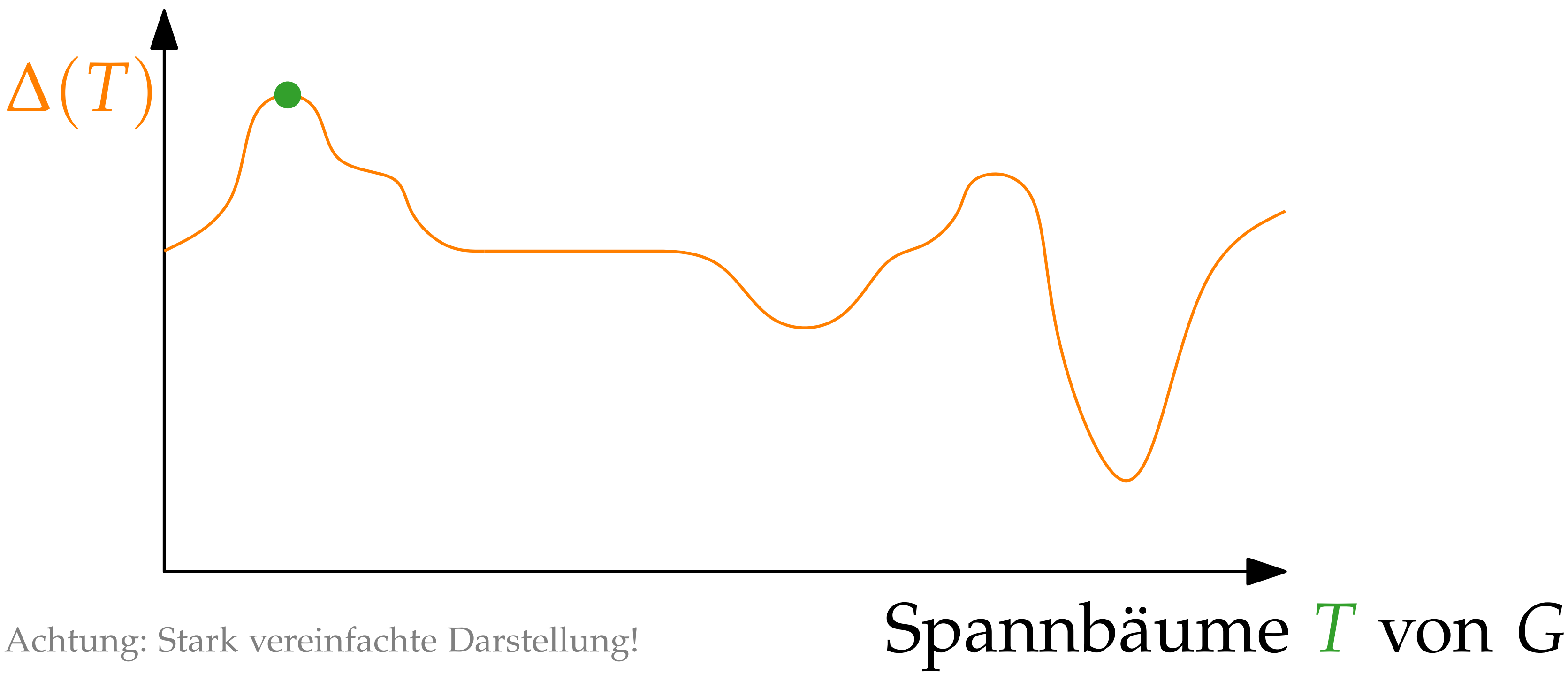
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ “verbessernder Flip” in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

  führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

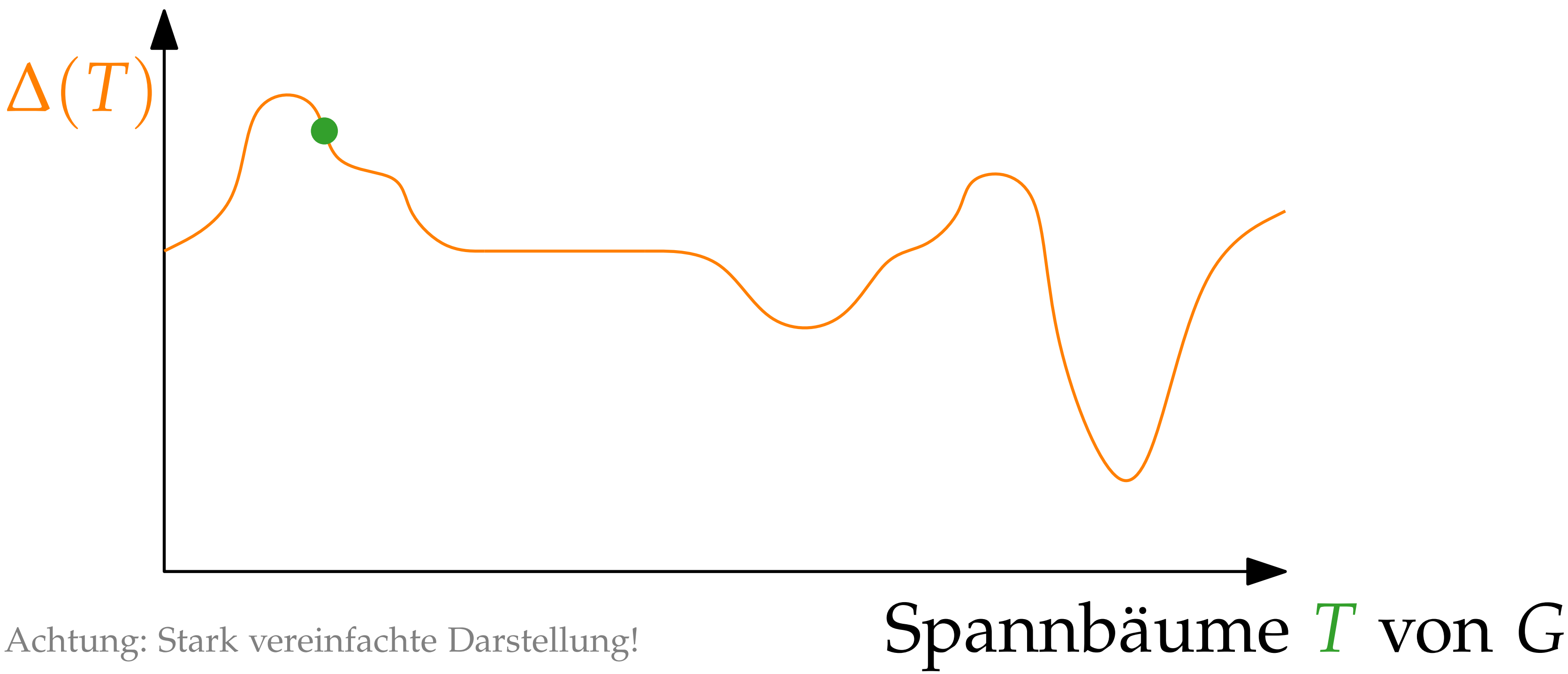
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v
mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

føhre den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

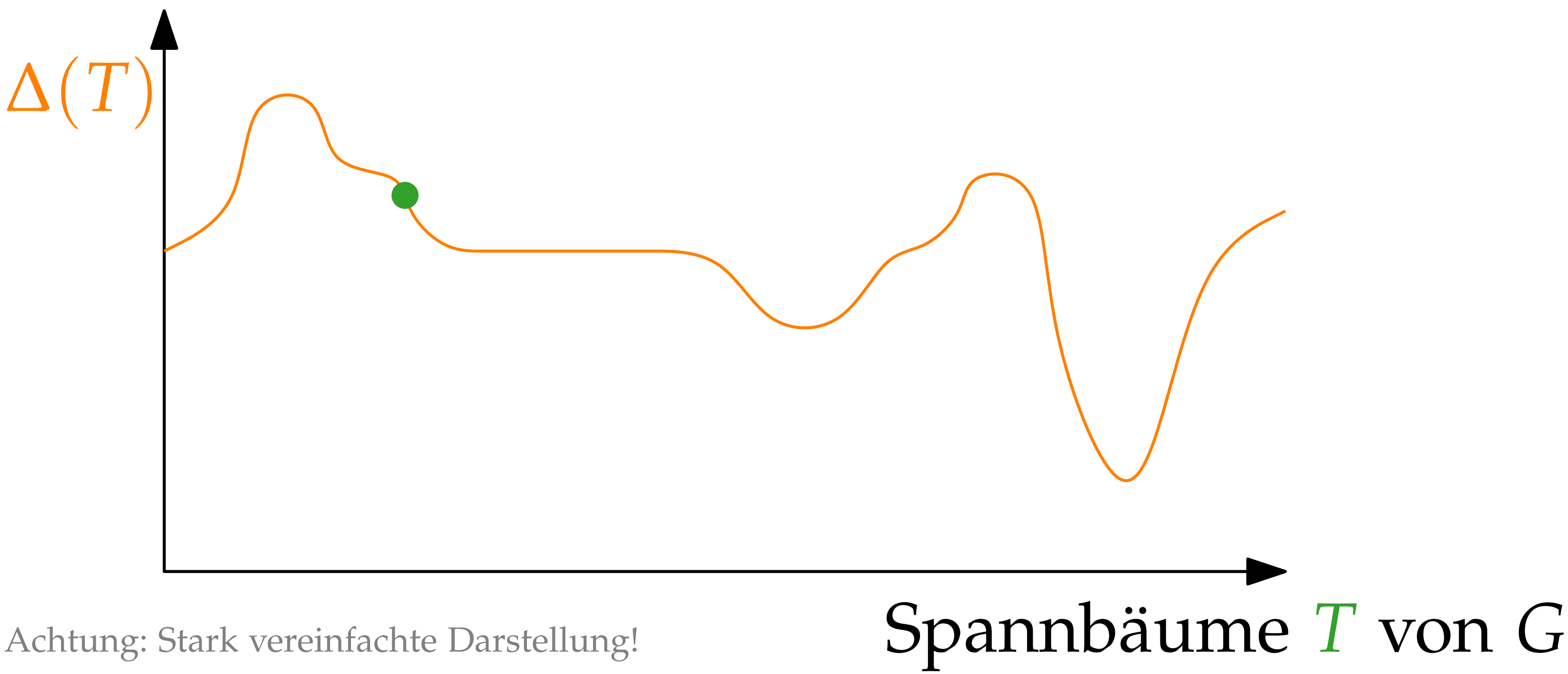
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

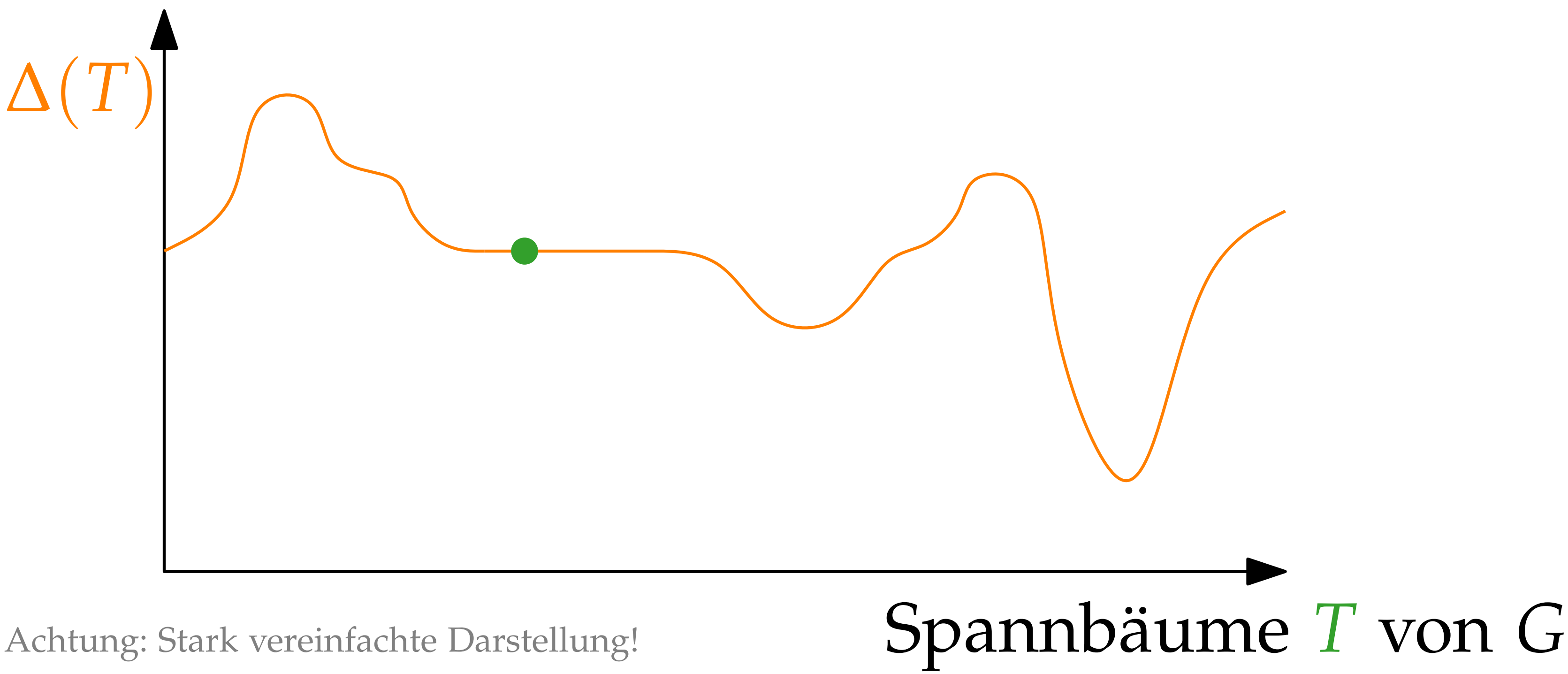
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

  führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

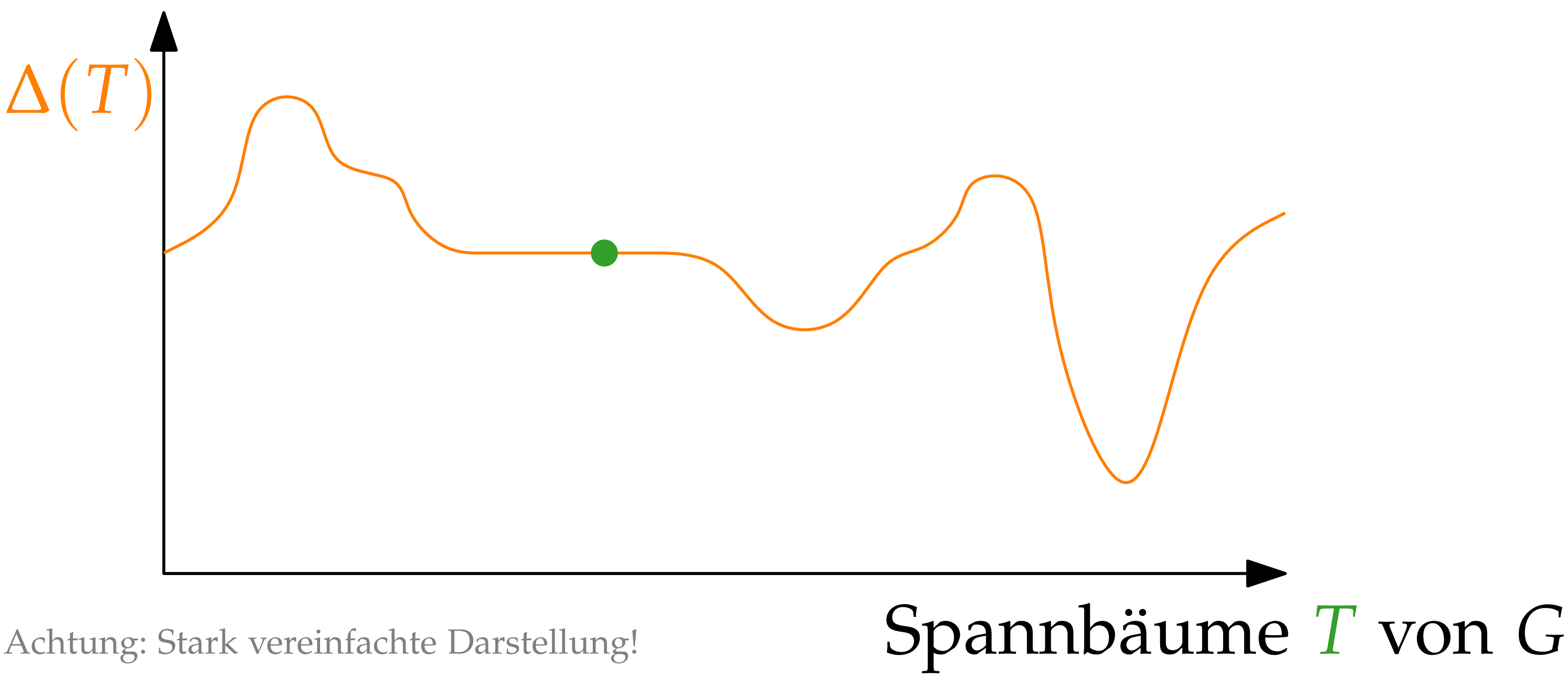
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

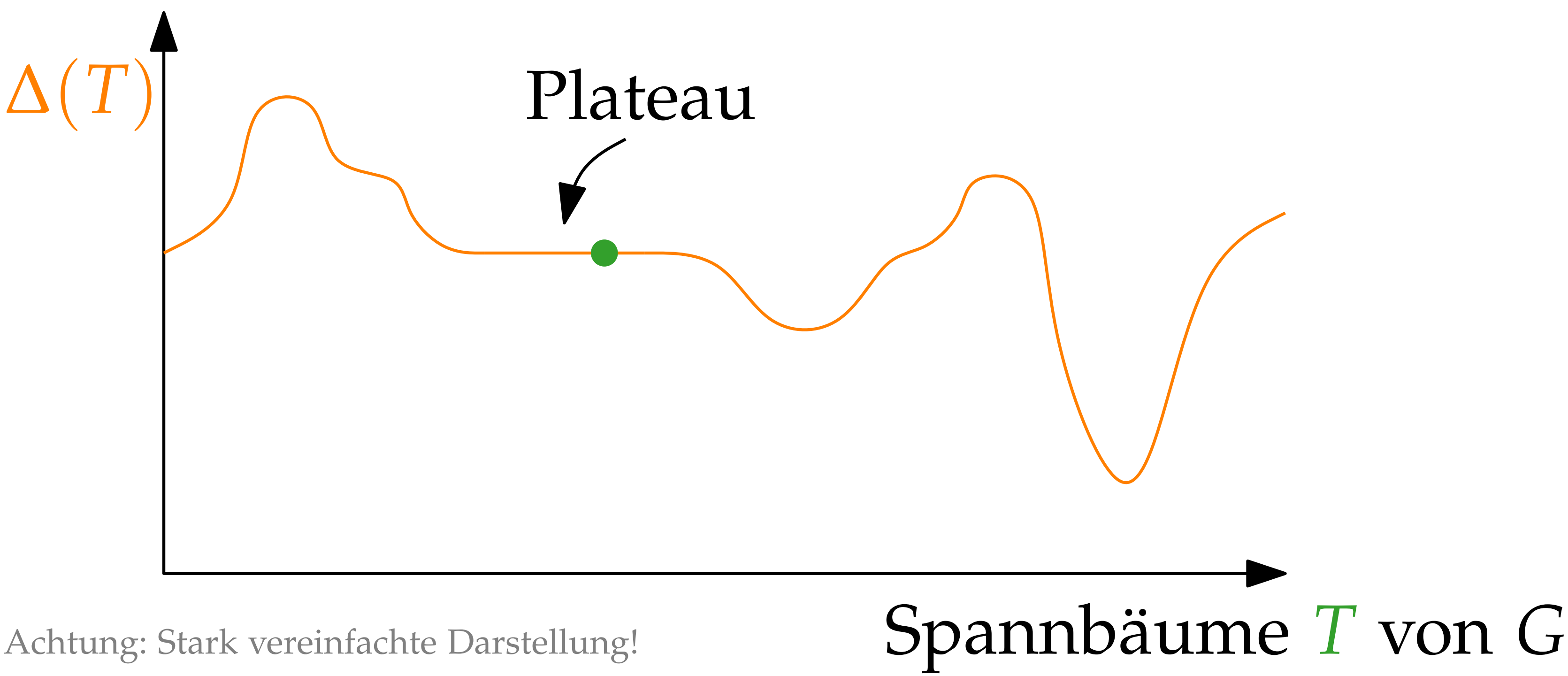
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

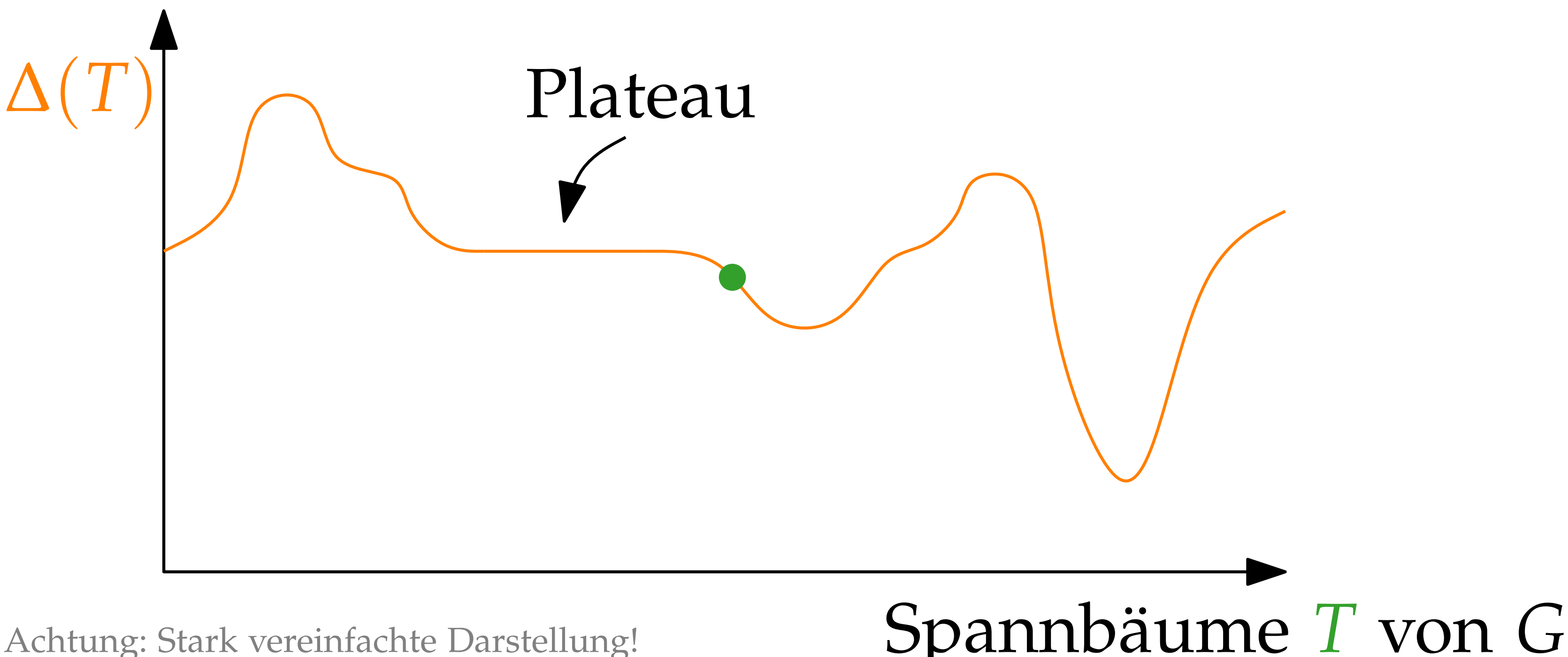
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

 führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

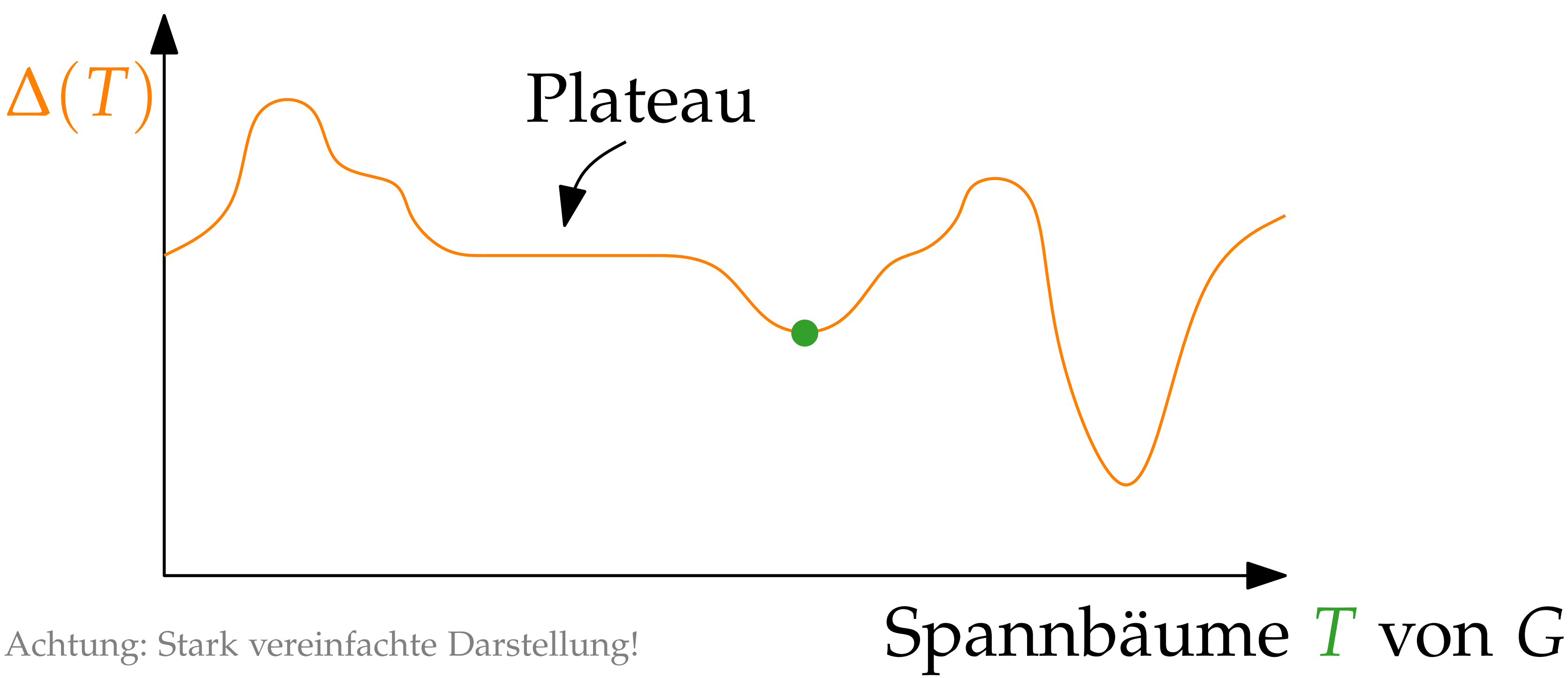
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

føhre den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

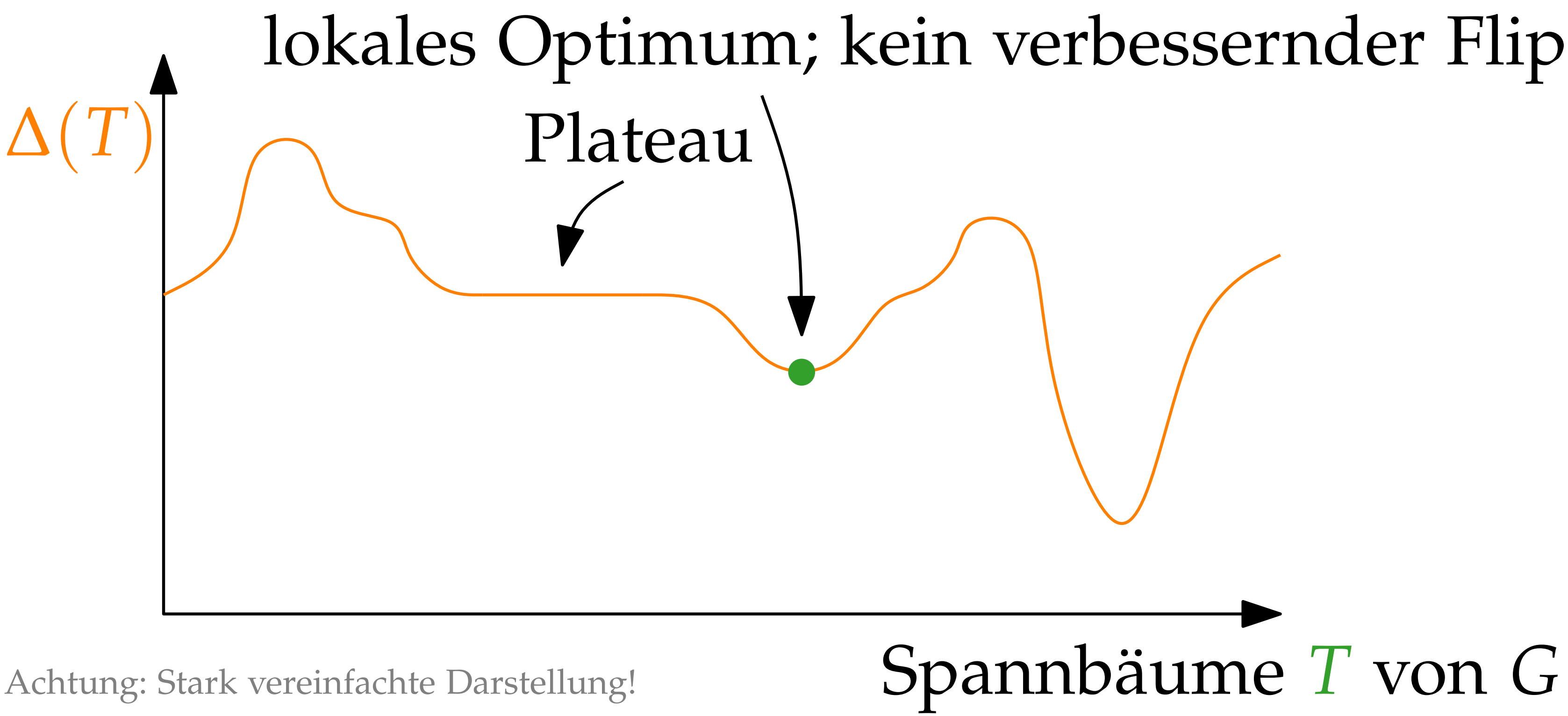
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ “verbessernder Flip” in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

  führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

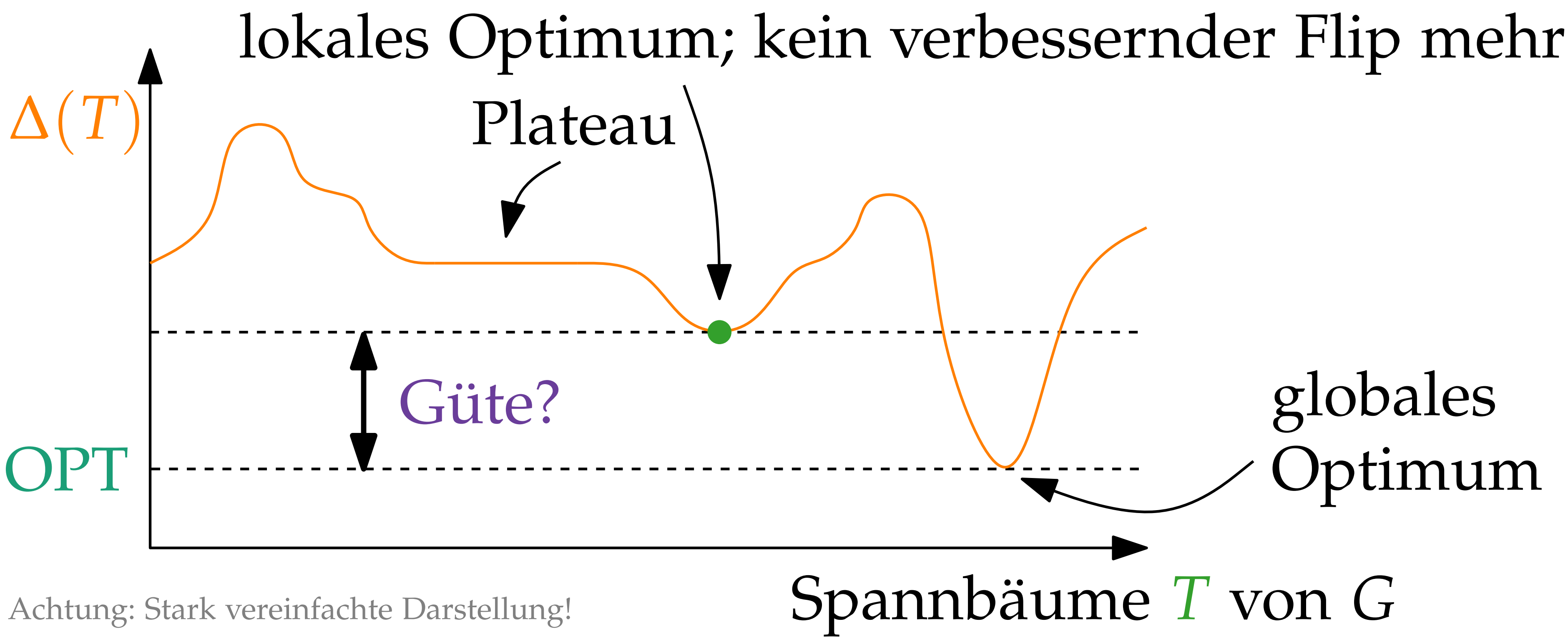
Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v
mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

Lokale Suche

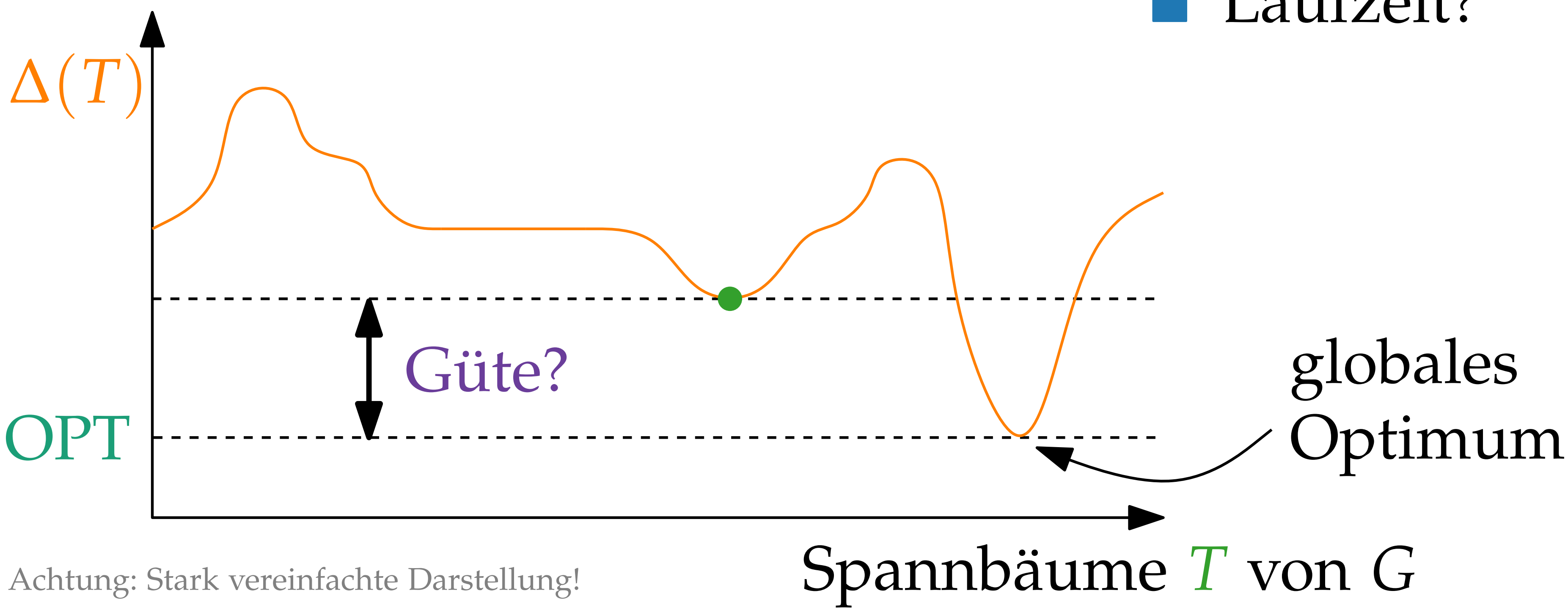
MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v
mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch

- Terminierung?
- Laufzeit?



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

Lokale Suche

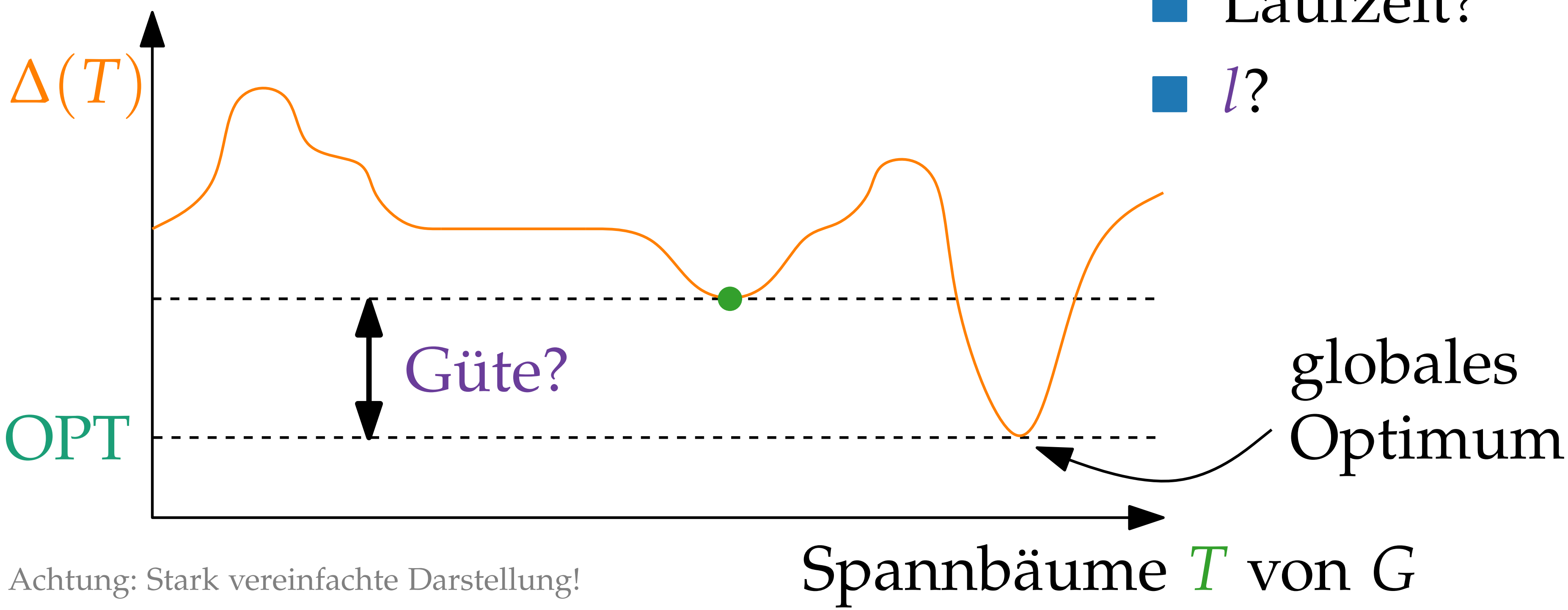
MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch

- Terminierung?
- Laufzeit?
- l?



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

Lokale Suche

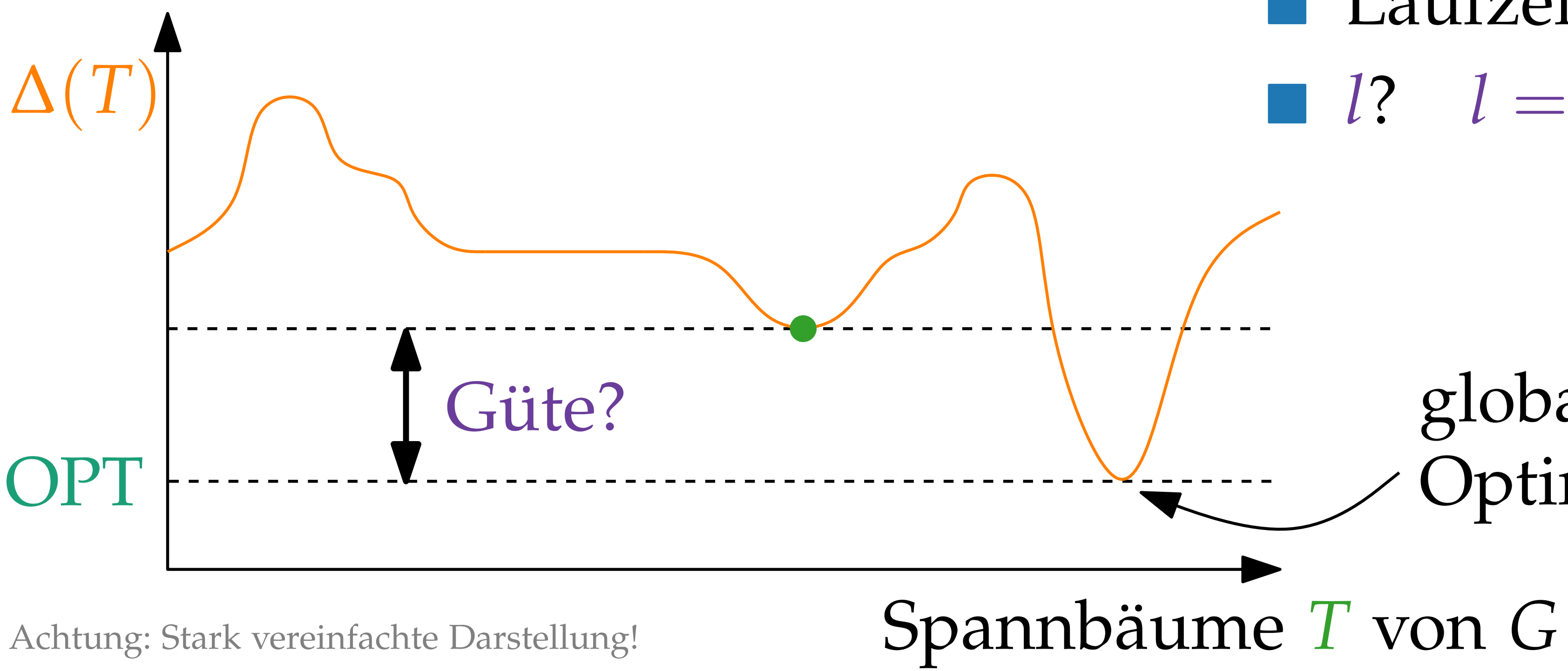
MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ “verbessernder Flip” in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

führe den Flip durch

- Terminierung?
- Laufzeit?
- l? $l = \lceil \log n \rceil$



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

Lokale Suche

MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

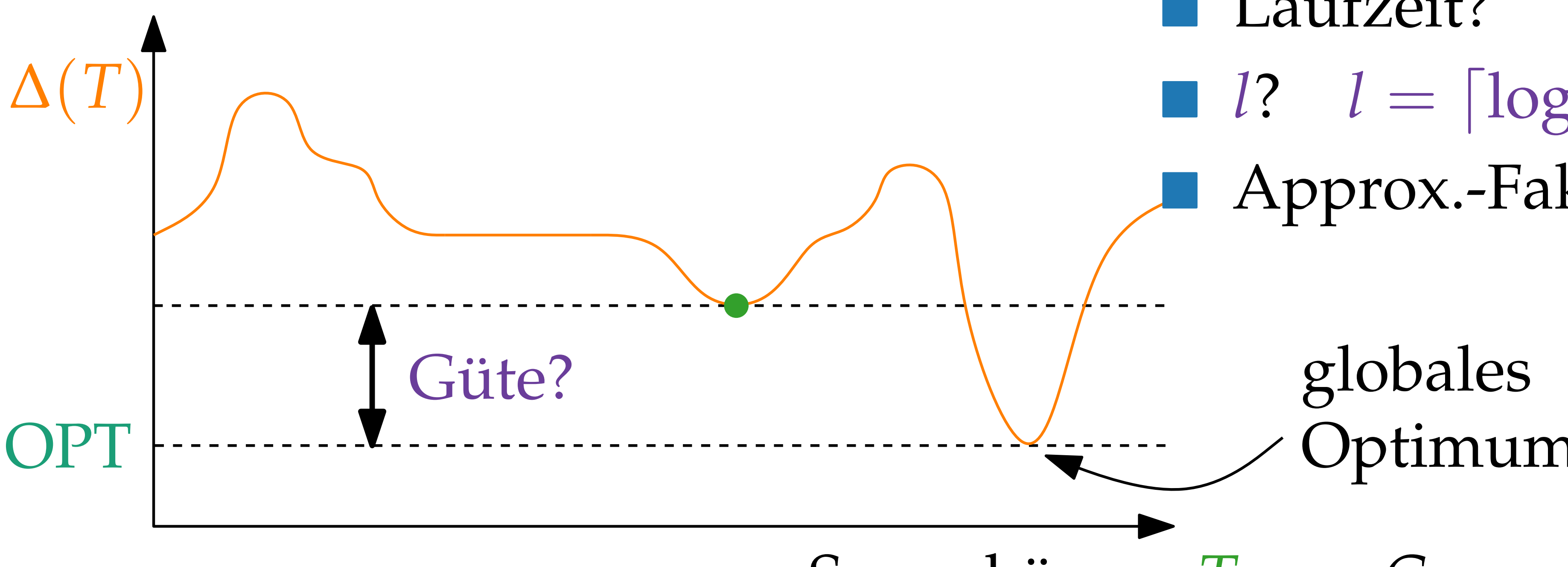
$\quad T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

$\quad$ **while** $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v

$\quad\quad$ mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

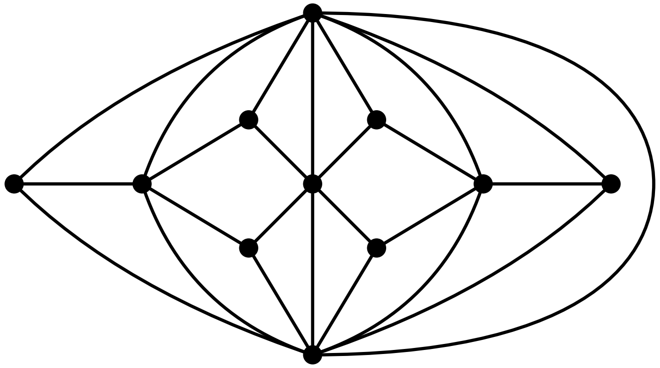
$\quad\quad$ führe den Flip durch

- Terminierung?
- Laufzeit?
- l? $\quad l = \lceil \log n \rceil$
- Approx.-Faktor?

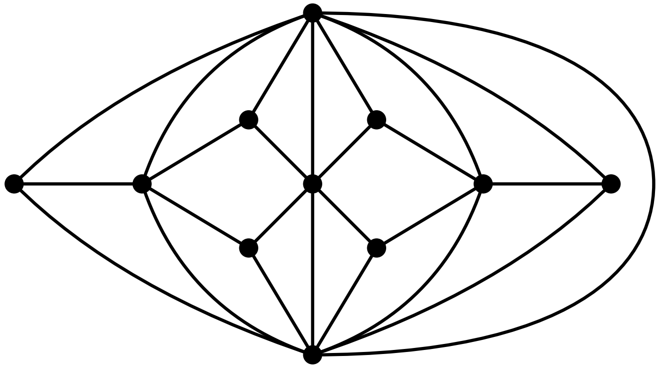


Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

Beispiel

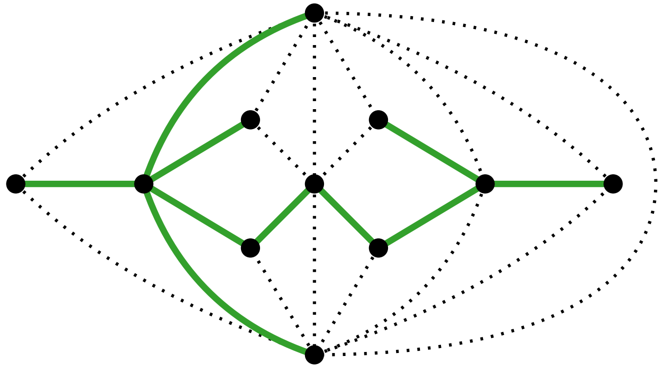


Beispiel

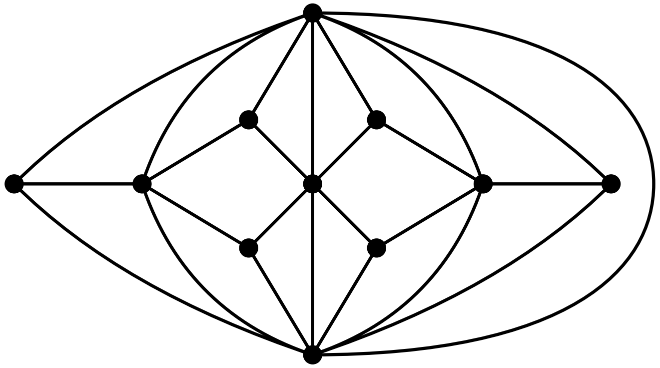


wähle
beliebigen
Spannbaum

$\Delta(T) = 5$

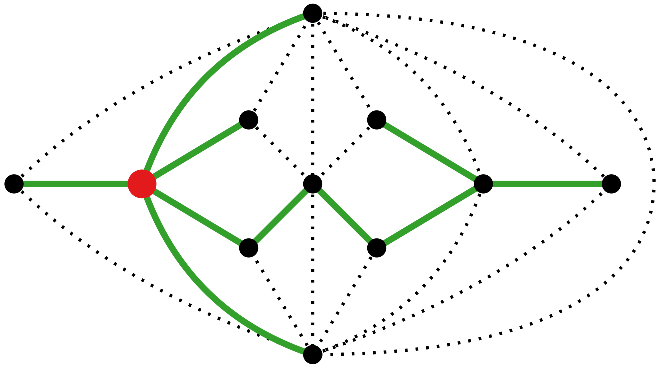


Beispiel

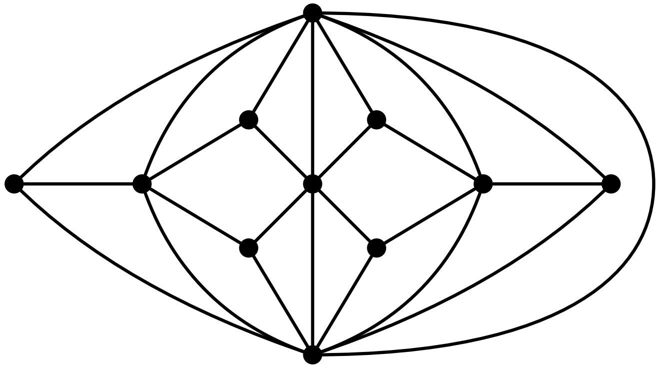


wähle
beliebigen
Spannbaum

$\Delta(T) = 5$

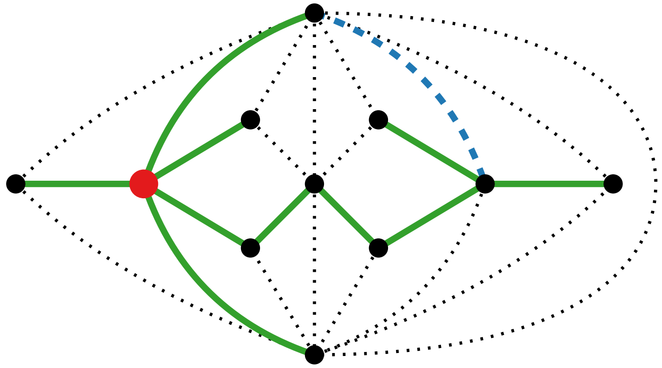


Beispiel

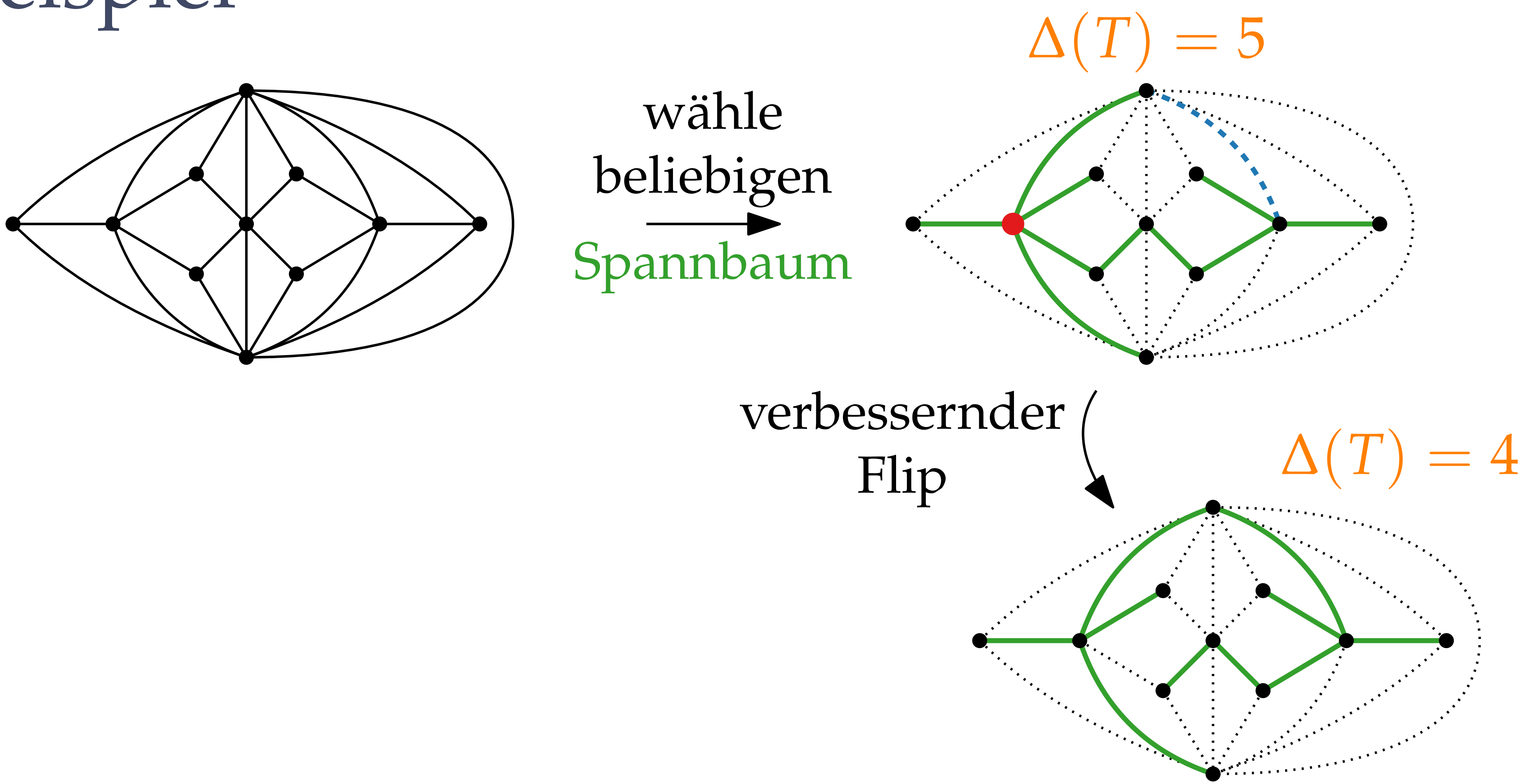


wähle beliebigen $\longrightarrow$ Spannbaum

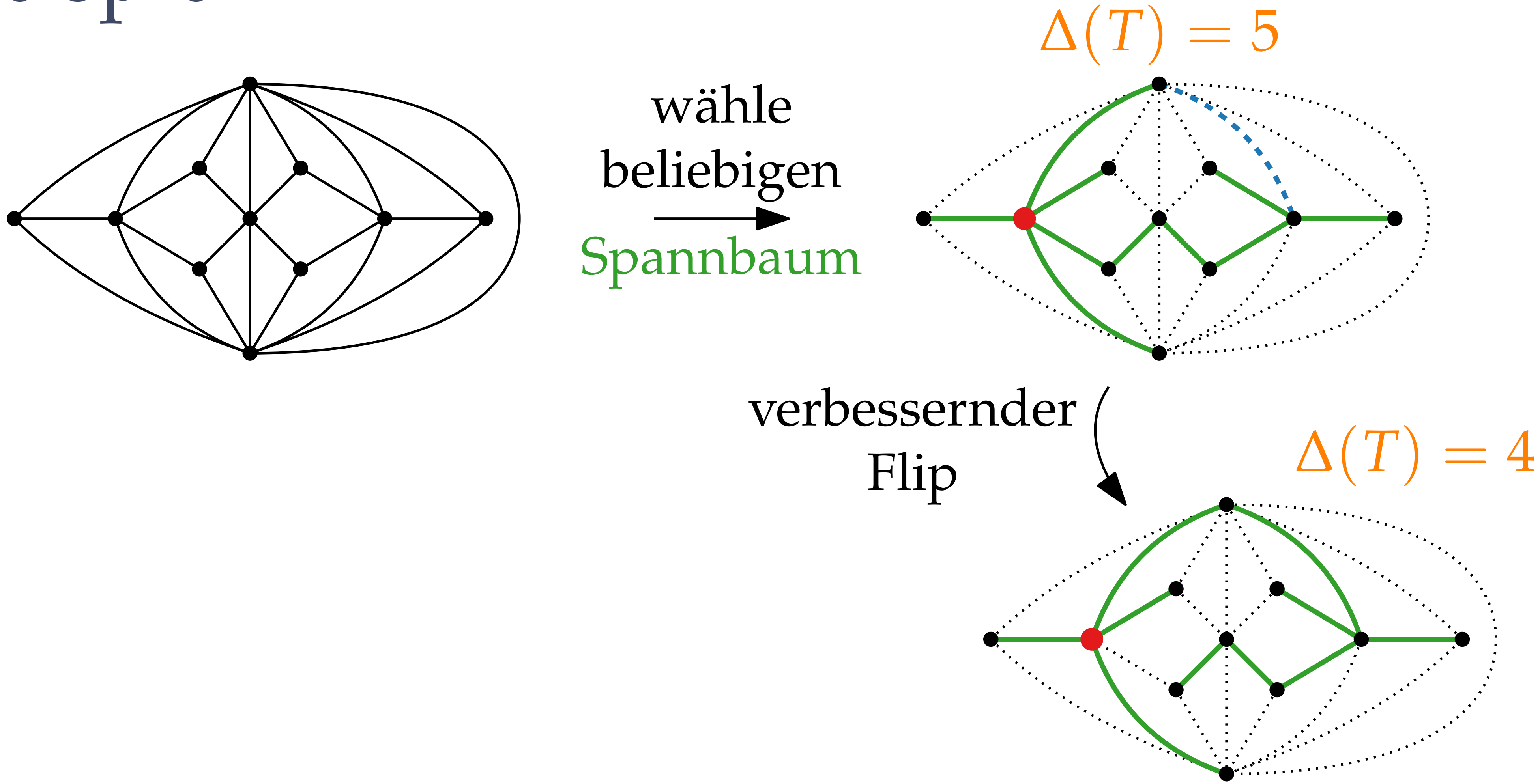
$\Delta(T) = 5$



Beispiel

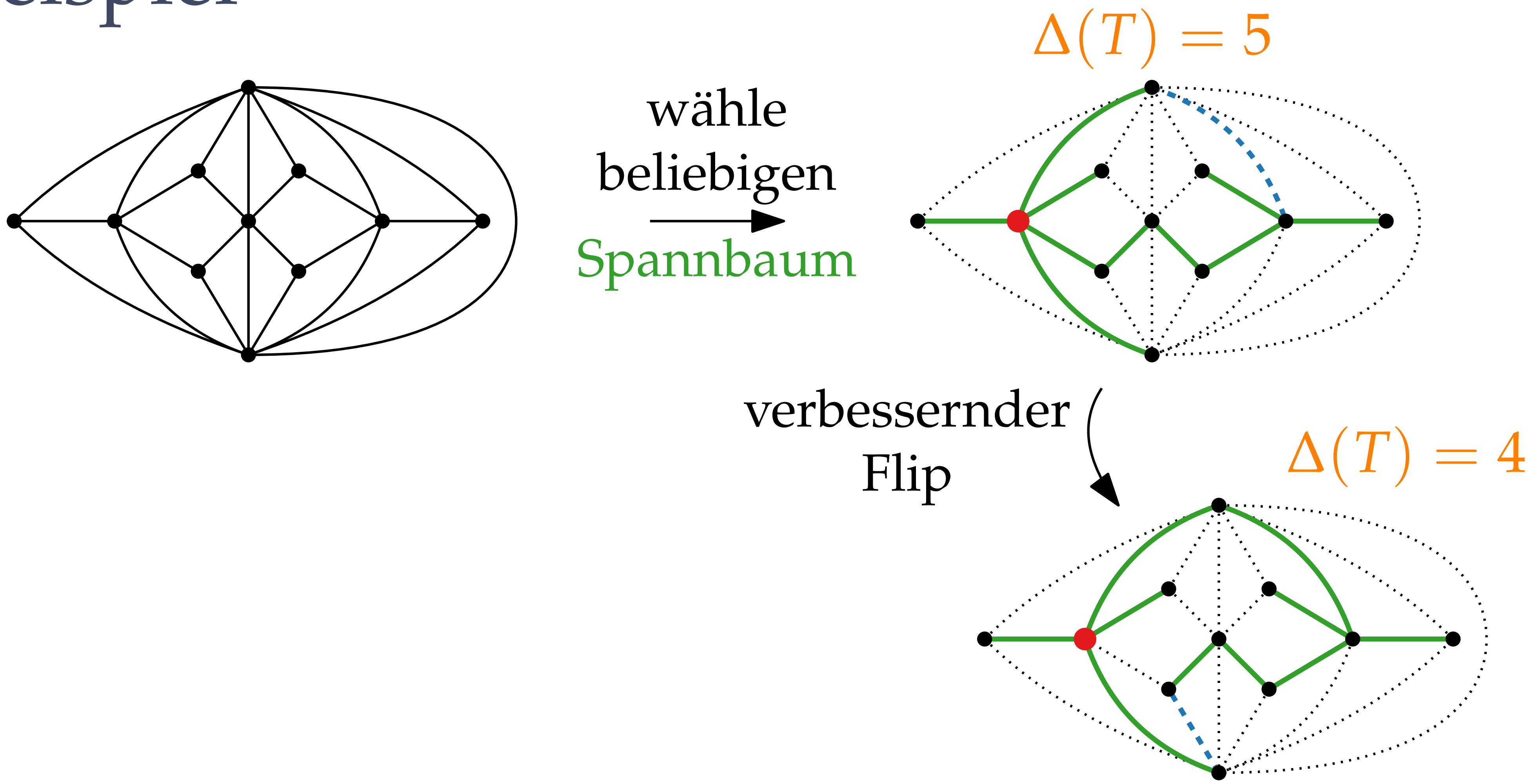

wähle
beliebigen
Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$

Beispiel

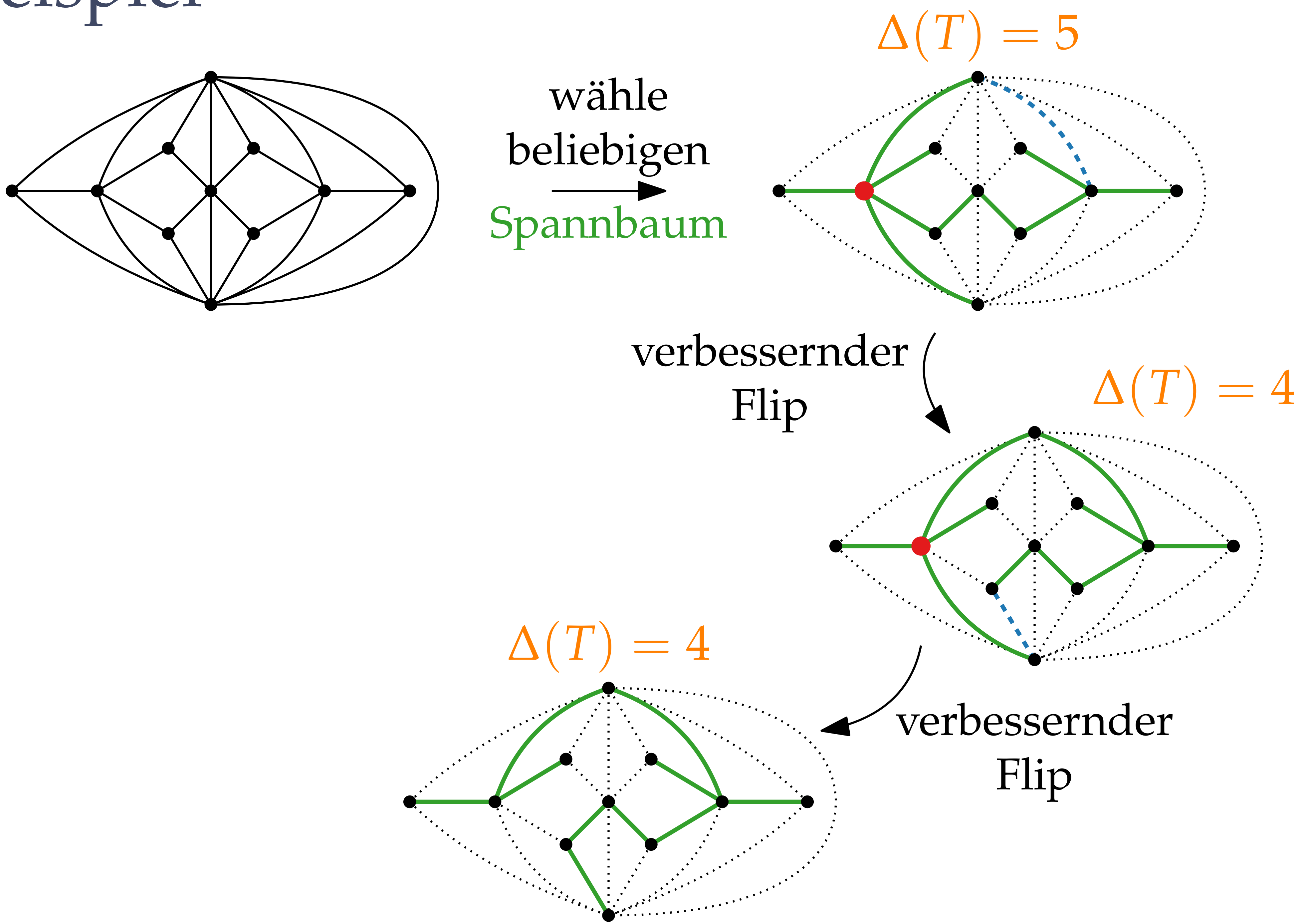


wähle
beliebigen
Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$

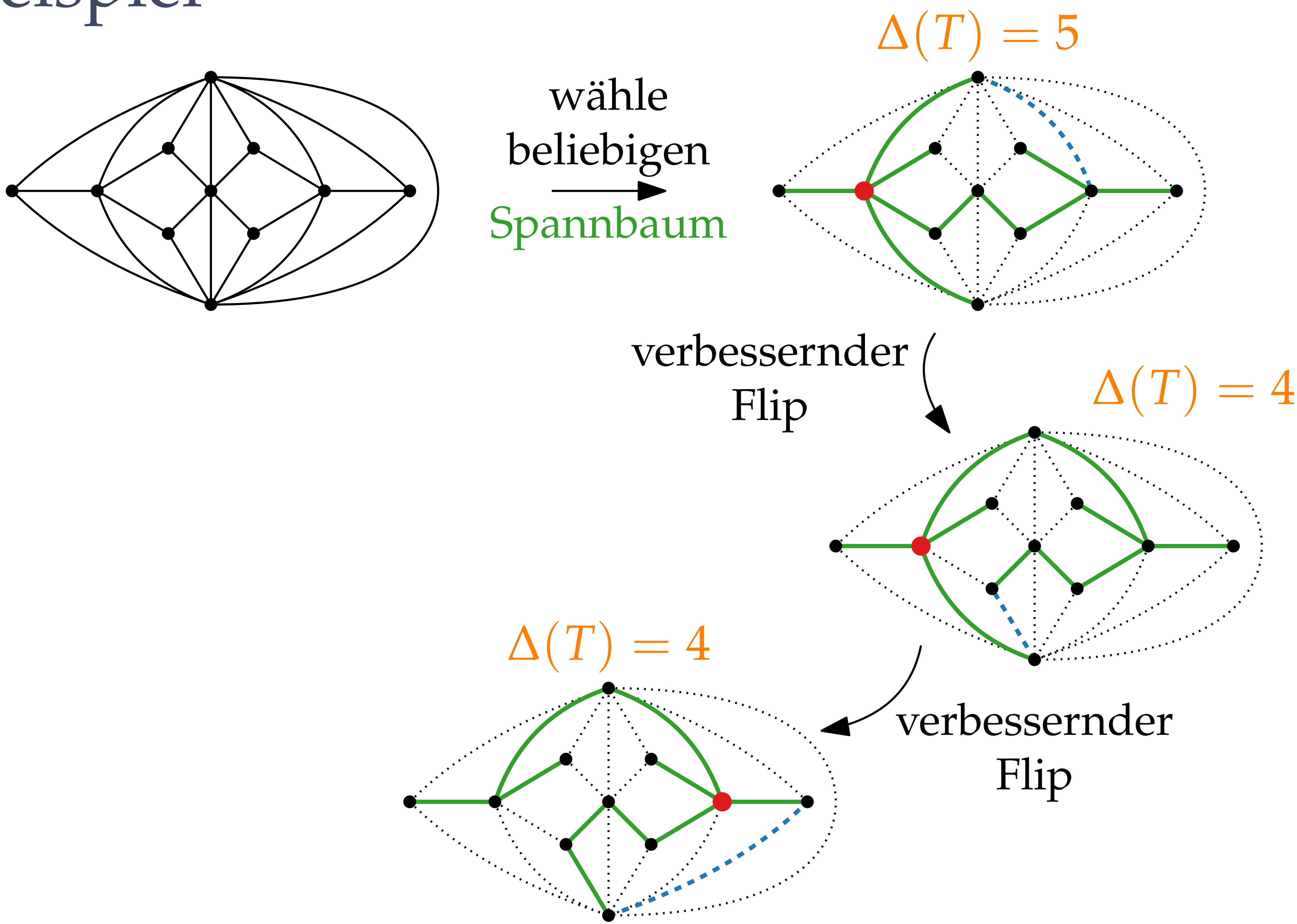
Beispiel


wähle
beliebigen
Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$

Beispiel

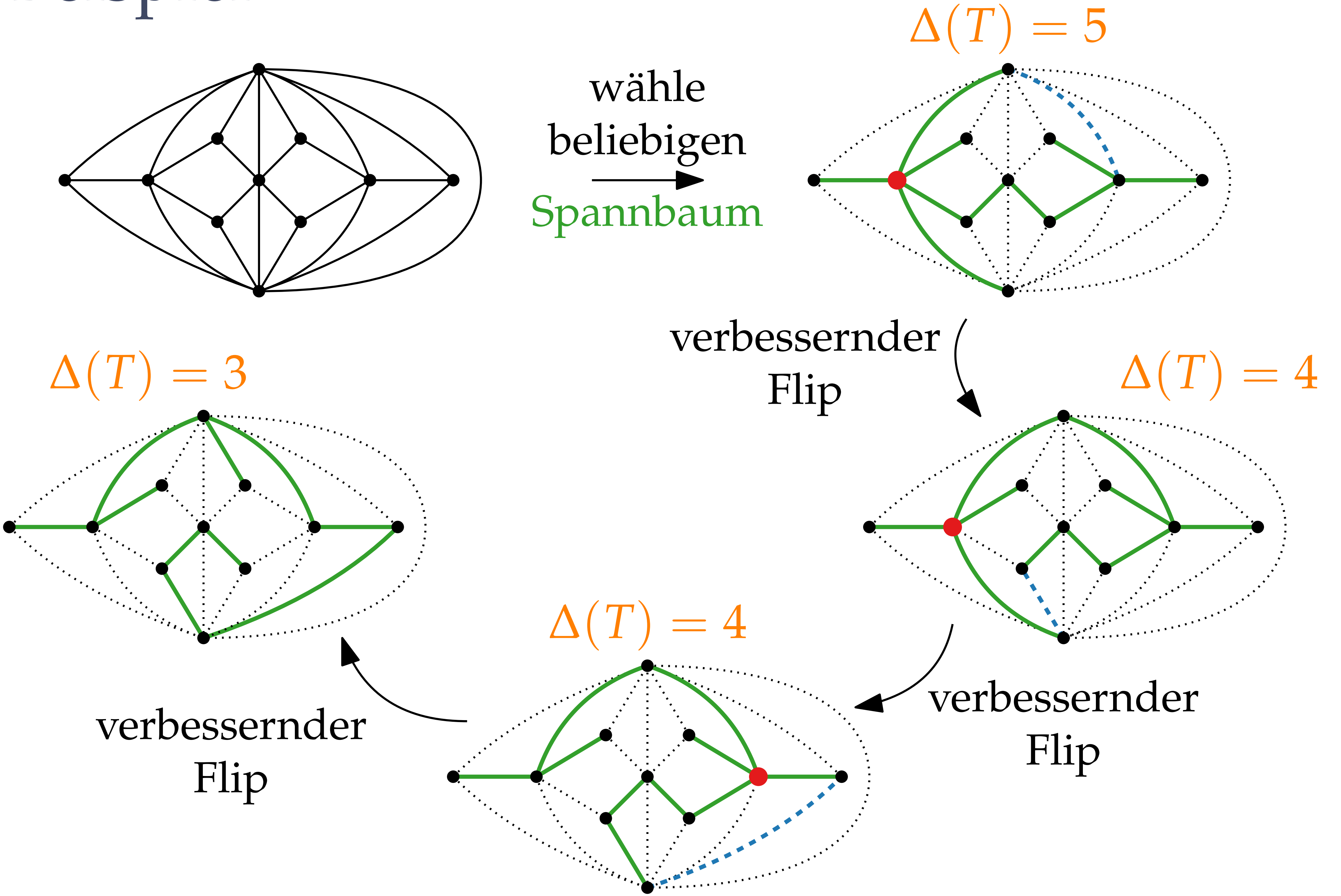

wähle
beliebigen
Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$

Beispiel

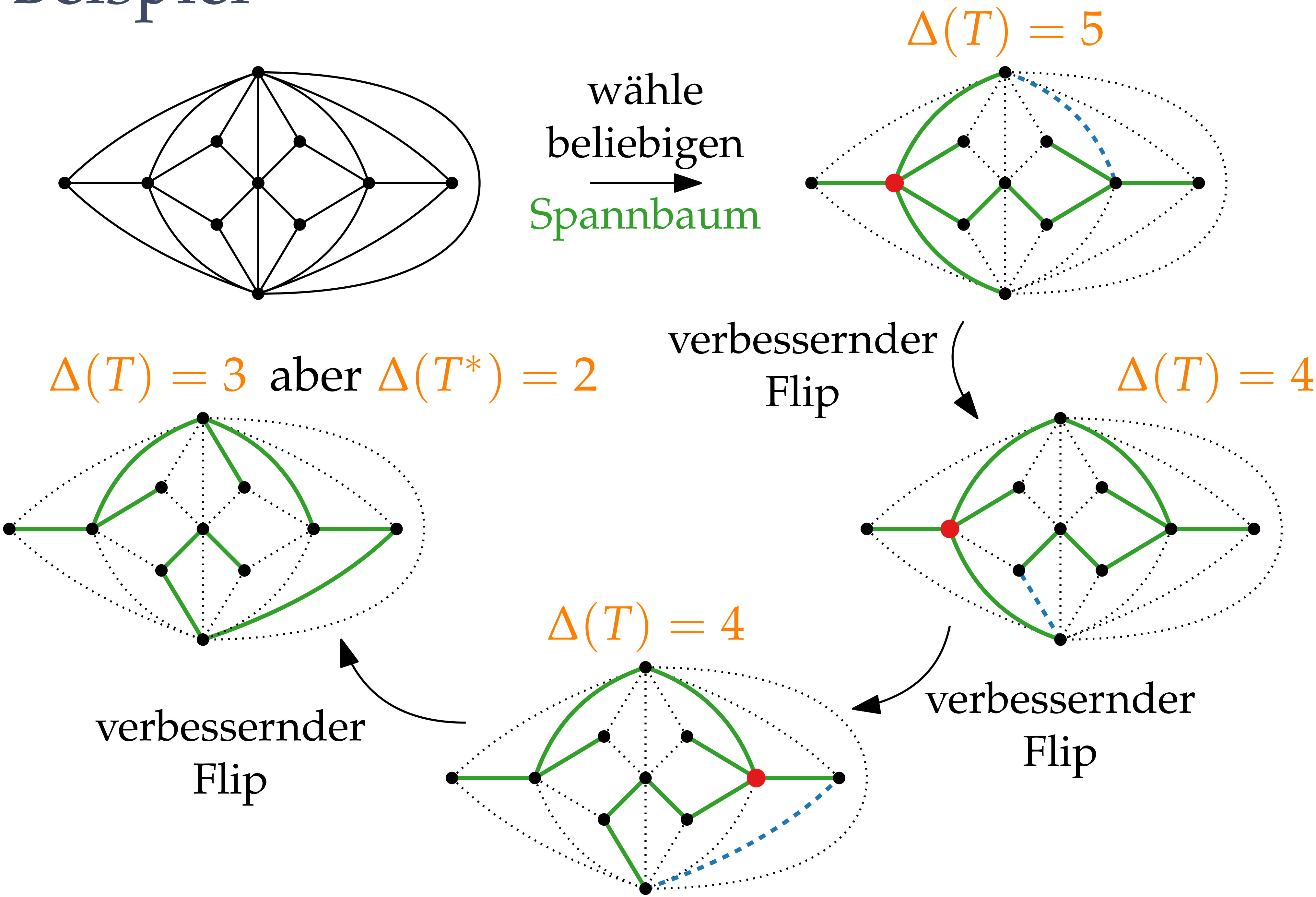


wähle
beliebigen
Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$

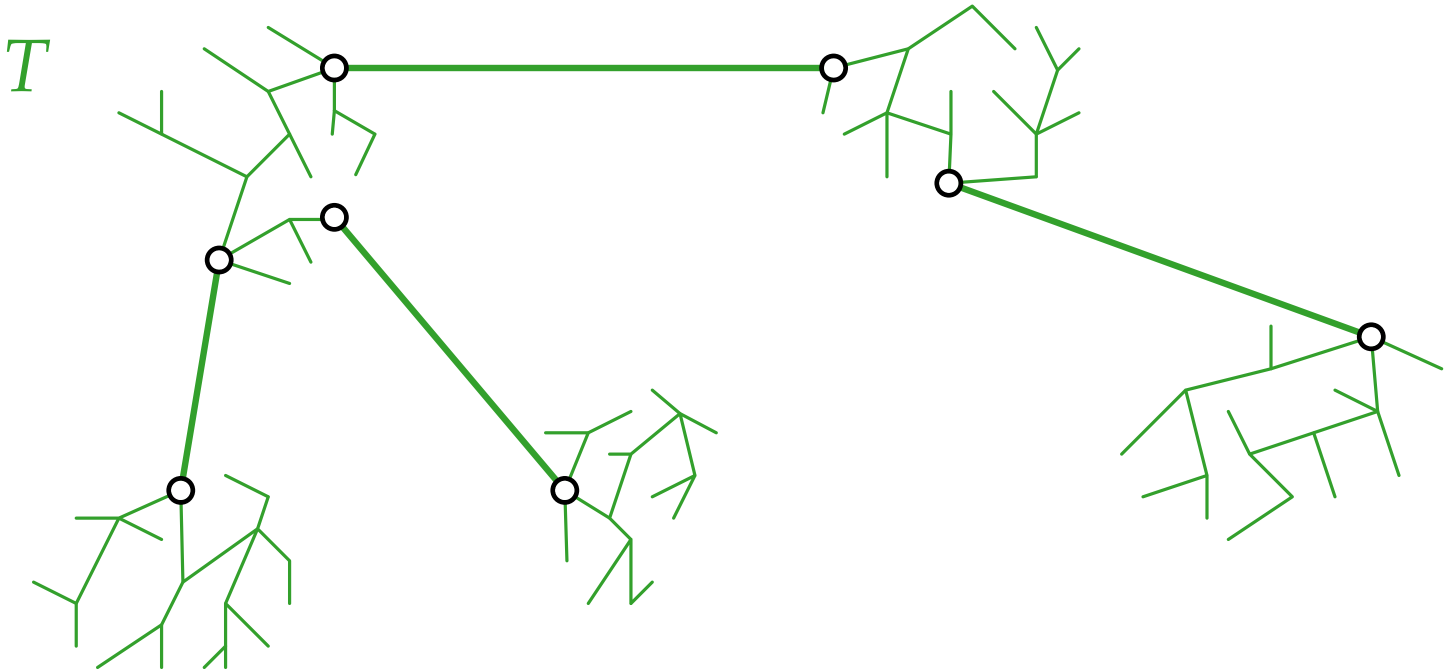
Beispiel


wähle
beliebigen
Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder
Flip
$\Delta(T) = 3$

Beispiel

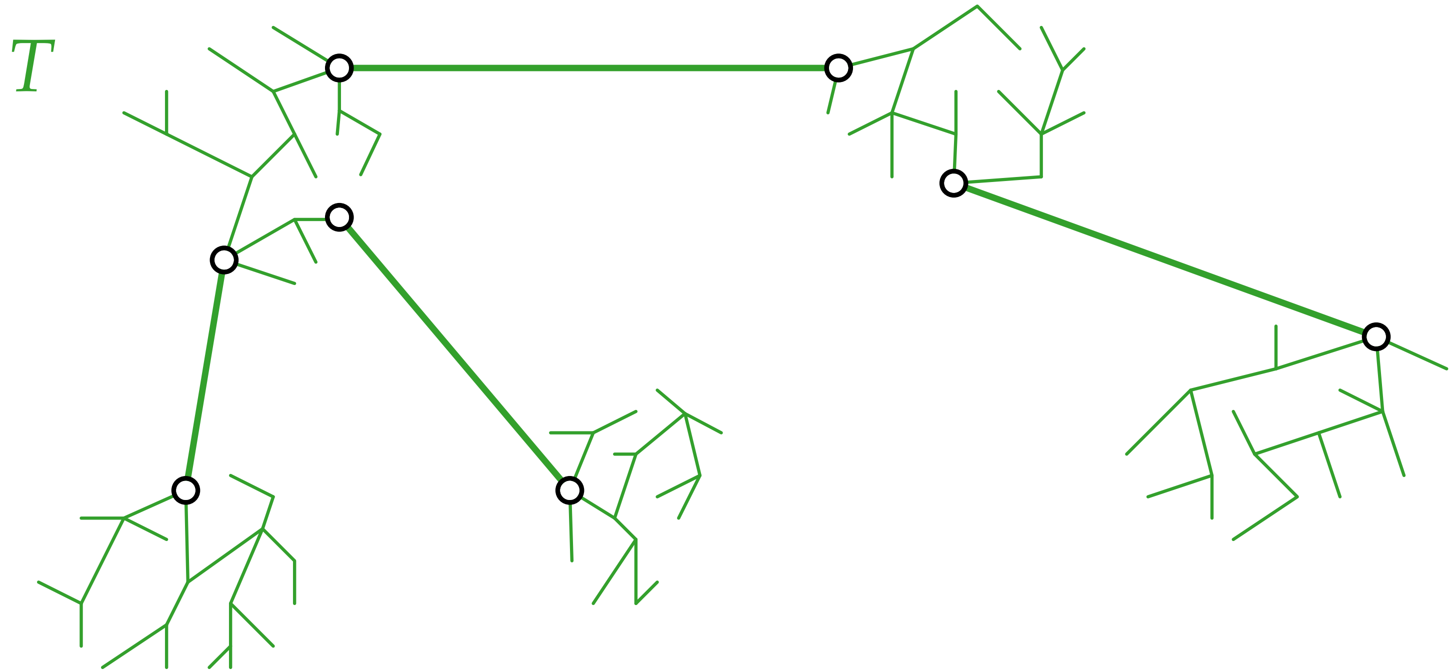

wähle beliebigen Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder Flip
$\Delta(T) = 3$ aber $\Delta(T^*) = 2$

Zerlegung



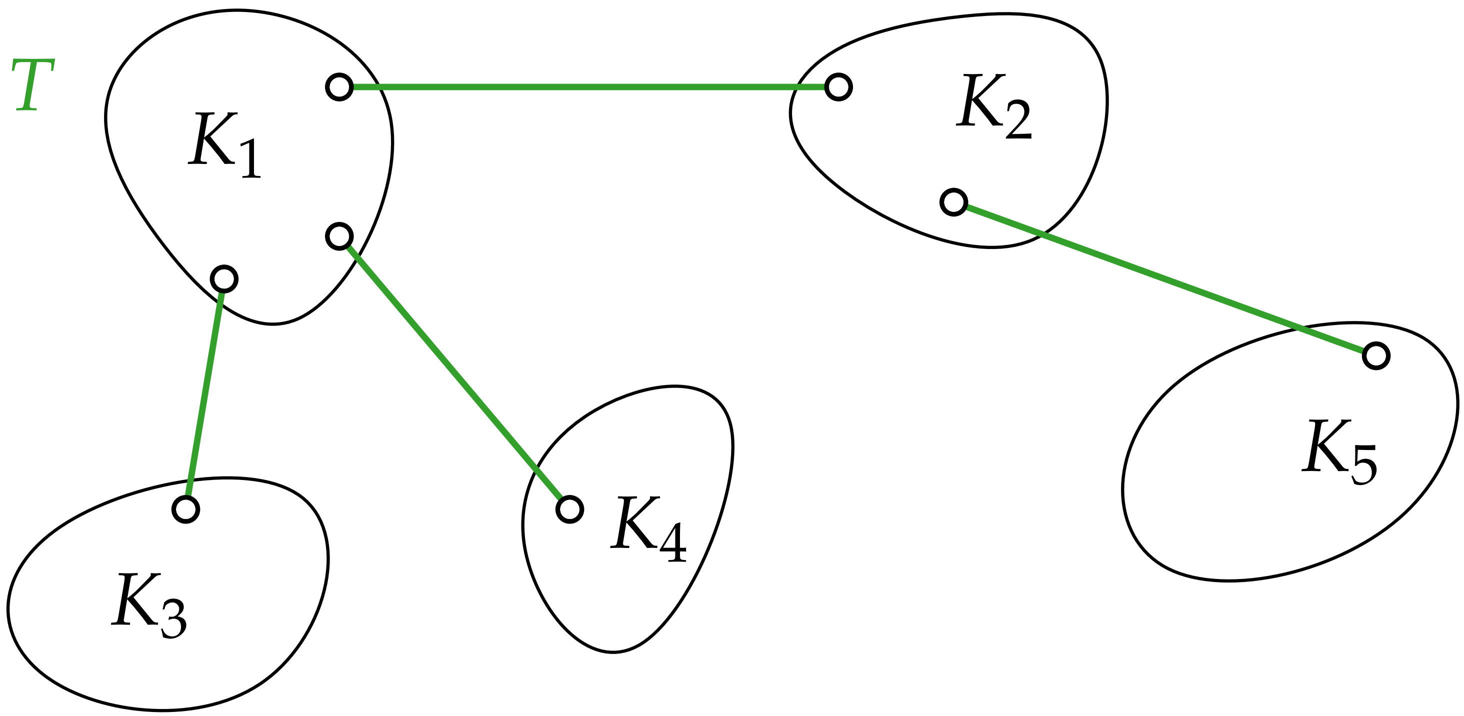
Zerlegung

- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k + 1$ ZK.



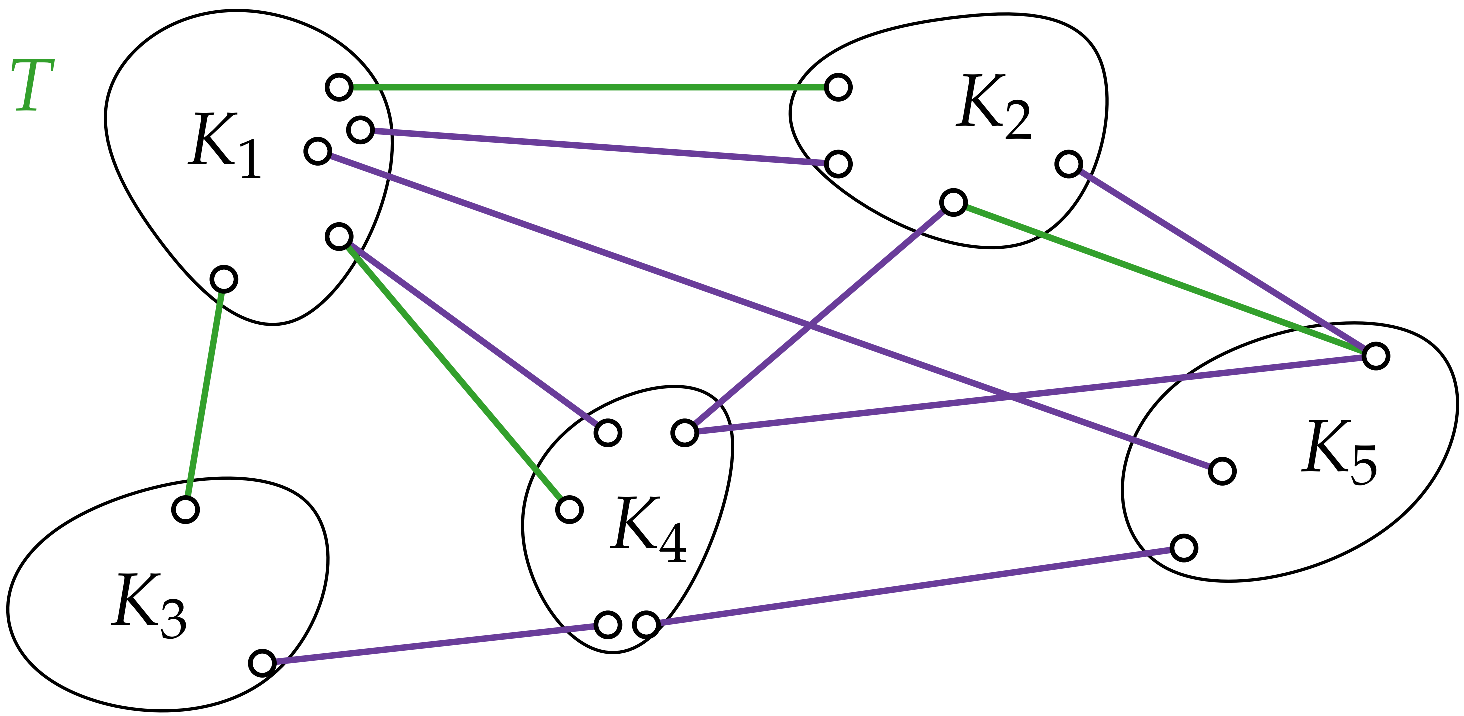
Zerlegung

- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k+1$ ZK.



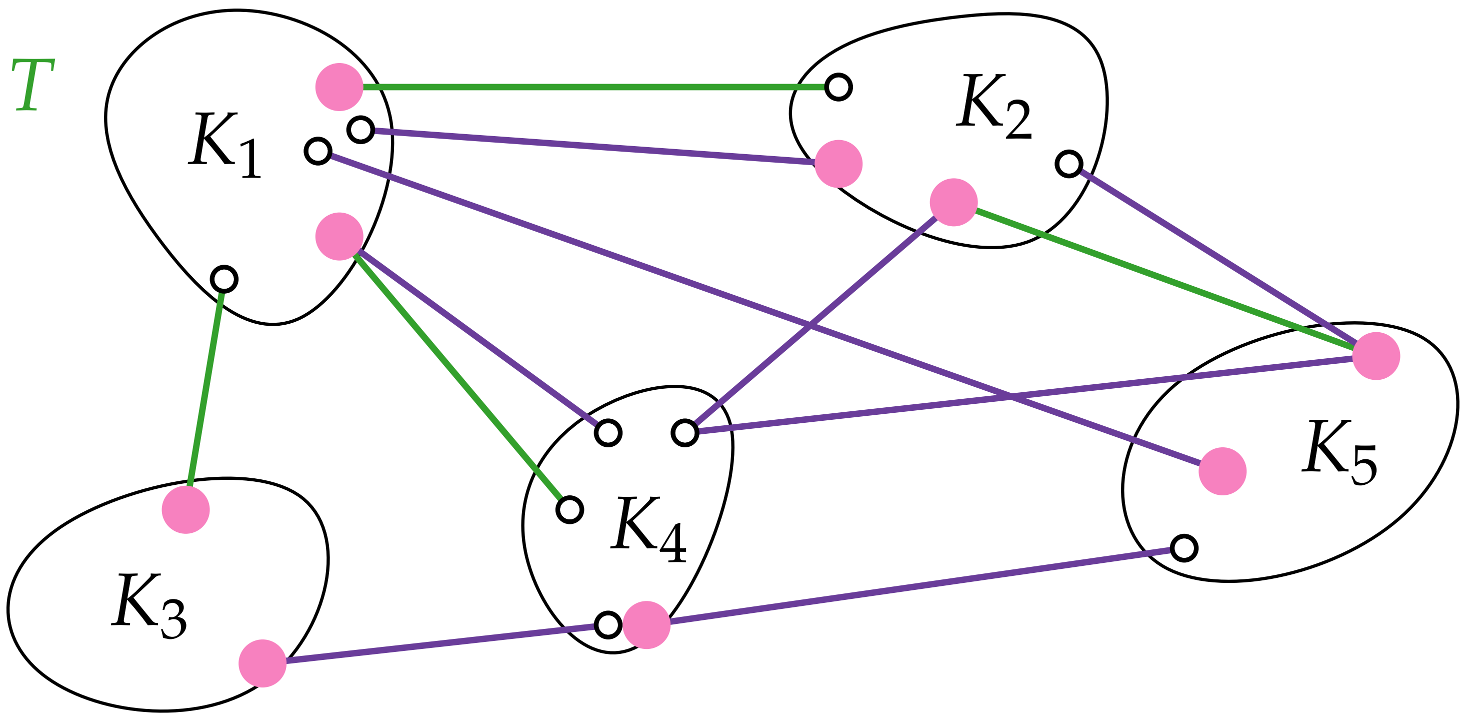
Zerlegung

- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k + 1$ ZK.
- $E' := \{$Kanten in G zw. verschiedenen ZK $K_i \neq K_j\}$.



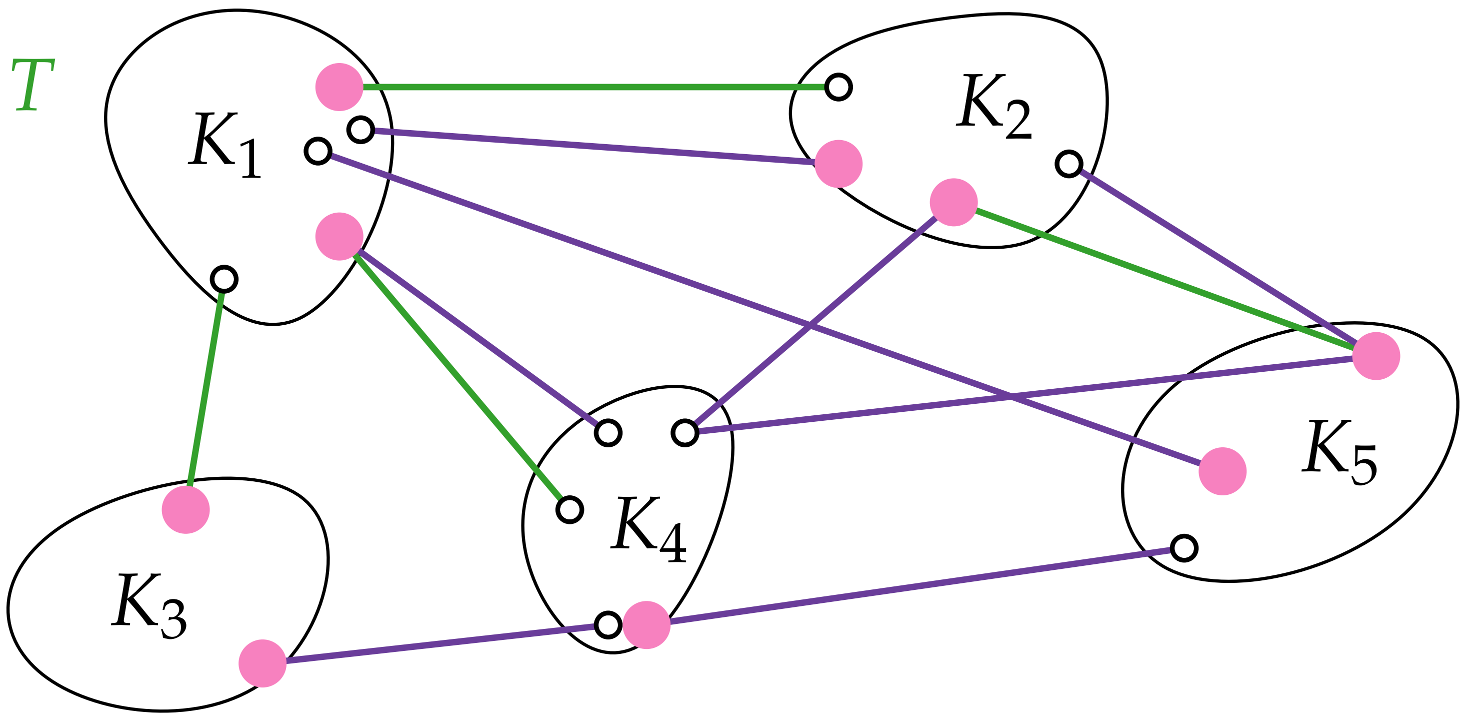
Zerlegung

- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k+1$ ZK.
- $E' :=$ {Kanten in G zw. verschiedenen ZK $K_i \neq K_j$}.
- $S :=$ Knotenüberdeckung für E'.



Zerlegung

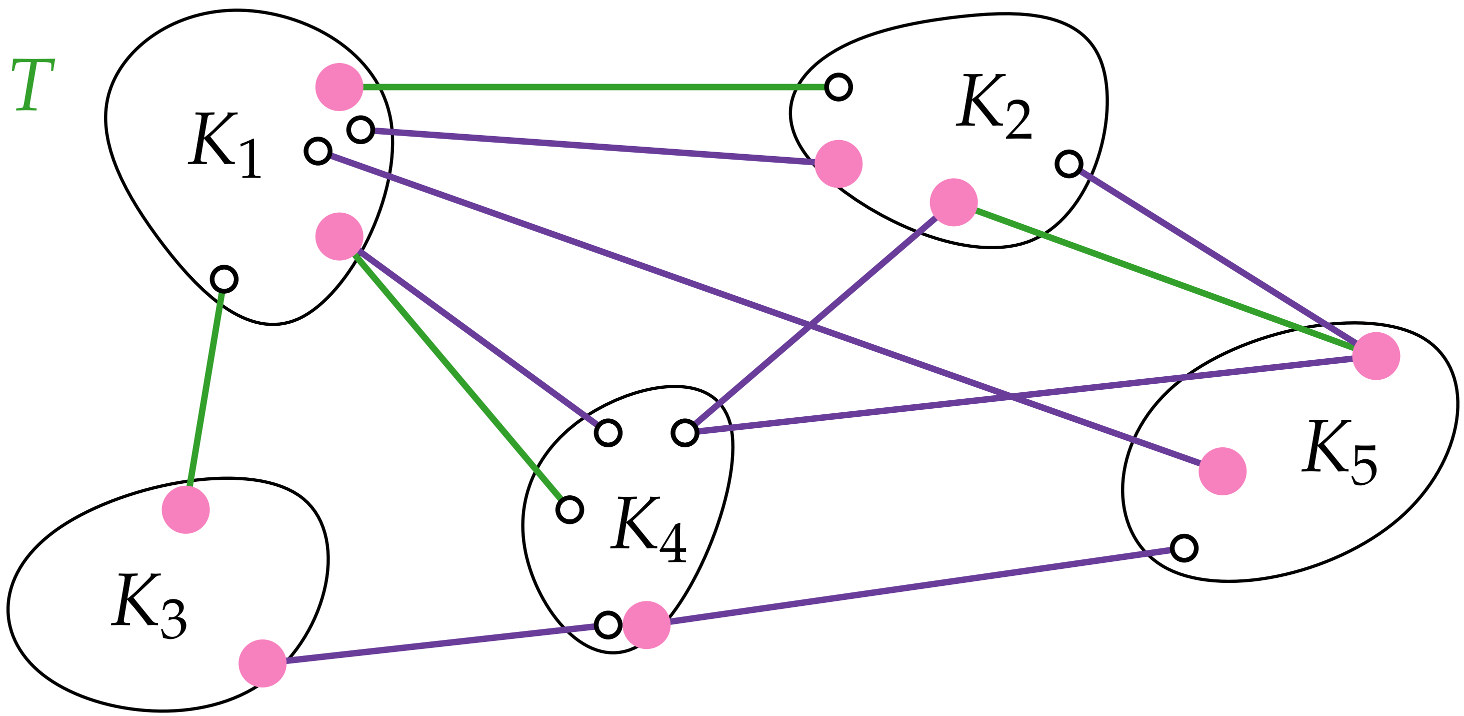
- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k+1$ ZK.
- $E' := \{\text{Kanten in } G \text{ zw. verschiedenen ZK } K_i \neq K_j\}$.
- $S :=$ Knotenüberdeckung für E'.



- $E(T^*) \cap E' \geq k$ für optimalen SB T^*

Zerlegung

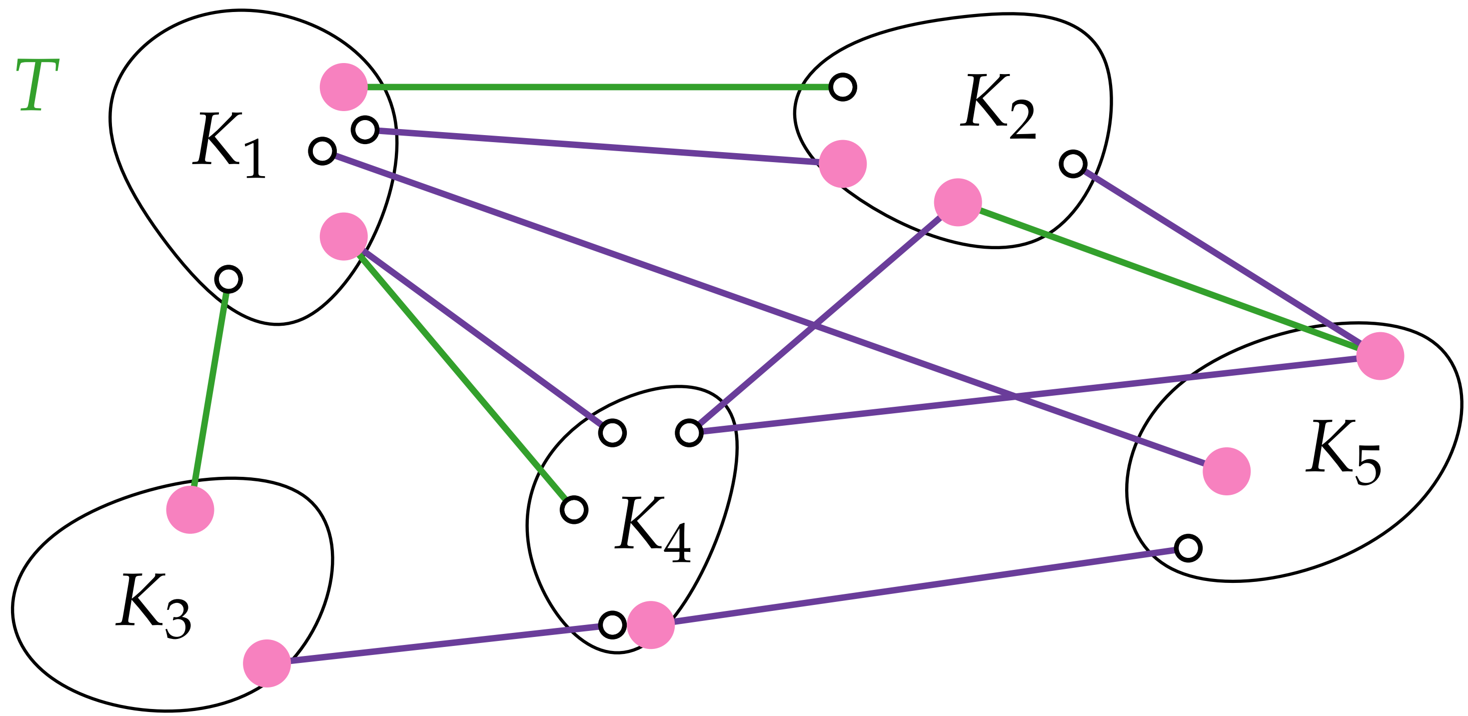
- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k + 1$ ZK.
- $E' := \{$Kanten in G zw. verschiedenen ZK $K_i \neq K_j\}$.
- $S :=$ Knotenüberdeckung für E'.



- $E(T^*) \cap E' \geq k$ für optimalen SB T^*
- $\sum_{v \in S} \deg_{T^*}(v) \geq k$

Zerlegung $\Rightarrow$ Untere Schranke für OPT

- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k+1$ ZK.
- $E' := \{$Kanten in G zw. verschiedenen ZK $K_i \neq K_j\}$.
- $S :=$ Knotenüberdeckung für E'.

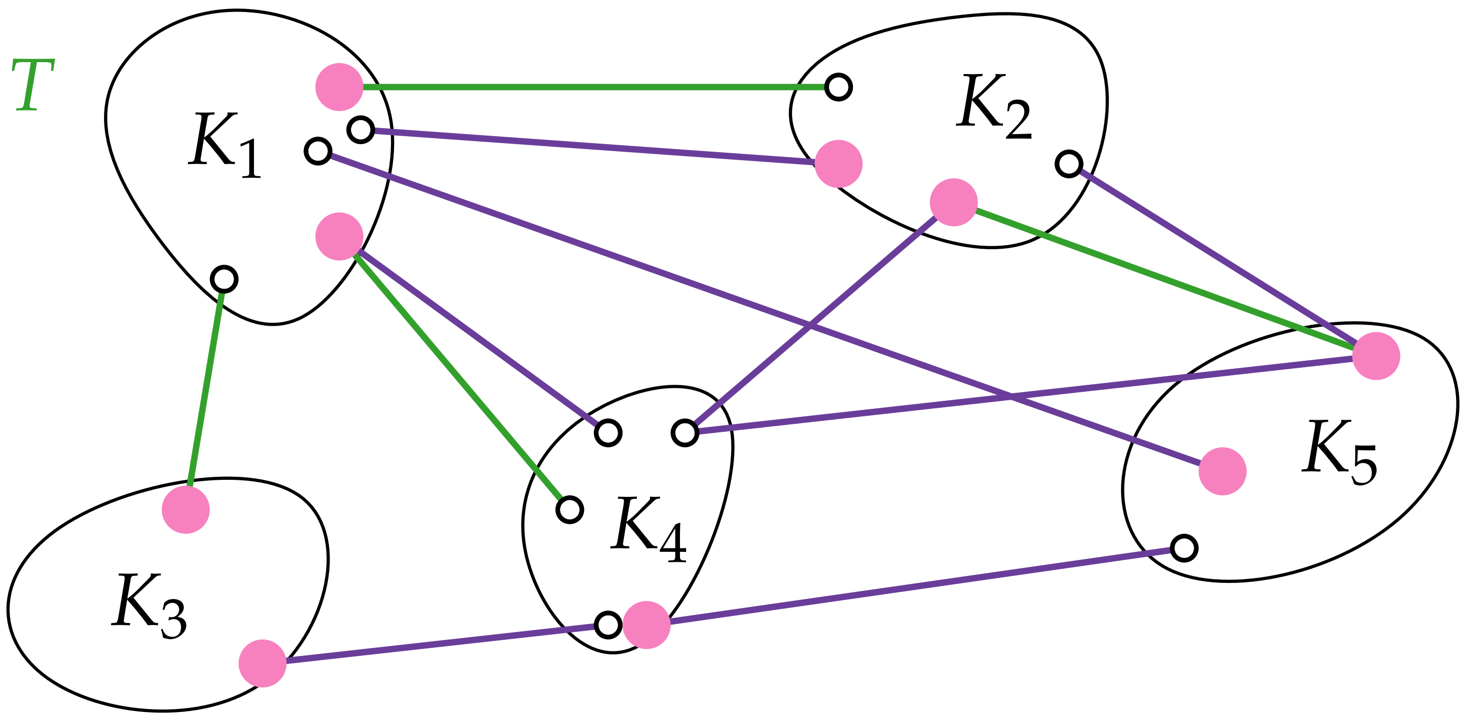


- $E(T^*) \cap E' \geq k$ für optimalen SB T^*
- $\sum_{v \in S} \deg_{T^*}(v) \geq k$

Lemma 1.
$\Rightarrow$ OPT $\geq$

Zerlegung $\Rightarrow$ Untere Schranke für OPT

- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k+1$ ZK.
- $E' :=$ {Kanten in G zw. verschiedenen ZK $K_i \neq K_j$}.
- $S :=$ Knotenüberdeckung für E'.



- $E(T^*) \cap E' \geq k$ für optimalen SB T^*
- $\sum_{v \in S} \deg_{T^*}(v) \geq k$

Lemma 1.
$\Rightarrow \text{OPT} \geq k/|S|$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}|$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}| = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} |S_{\Delta(T)}| \geq n |S_{\Delta(T)}|$

$l = \lceil \log_2 n \rceil$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}| = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} |S_{\Delta(T)}| \geq n |S_{\Delta(T)}|$ $\lightning$

$l = \lceil \log_2 n \rceil$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}| = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} |S_{\Delta(T)}| \geq n |S_{\Delta(T)}|$ ↯

$l = \lceil \log_2 n \rceil$

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}| = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} |S_{\Delta(T)}| \geq n |S_{\Delta(T)}|$ ↯

$l = \lceil \log_2 n \rceil$

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

Beweis. (i) $|E_i| \geq$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}| = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} |S_{\Delta(T)}| \geq n|S_{\Delta(T)}|$ ↯

$l = \lceil \log_2 n \rceil$

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

Beweis. (i) $|E_i| \geq \underbrace{i|S_i|}_{\text{Knotengrad}} - \underbrace{(|S_i| - 1)}_{\text{doppelt gezählt?}} = (i-1)|S_i| + 1$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}| \underset{l = \lceil \log_2 n \rceil}{=} 2^{\lceil \log_2 n \rceil} |S_{\Delta(T)}| \geq n|S_{\Delta(T)}|$ ↯

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

Beweis. (i) $|E_i| \underset{\text{Knotengrad}}{\geq} i|S_i| - \underset{\text{doppelt gezählt?}}{(|S_i| - 1)} = (i-1)|S_i| + 1$

(ii) Sonst existiert ein verbessernder Flip für $v \in S_i$.

Approximationsfaktor

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum. Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|}$$

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|} \underset{\text{Lemma 3}}{\geq}$$

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|} \underset{\text{Lemma 3}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{|S_{i-1}|}$$

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|} \underset{\text{Lemma 3}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{|S_{i-1}|} \underset{\text{Lemma 2}}{\geq}$$

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|} \underset{\text{Lemma 3}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{|S_{i-1}|} \underset{\text{Lemma 2}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{2|S_i|} >$$

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|} \underset{\text{Lemma 3}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{|S_{i-1}|} \underset{\text{Lemma 2}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{2|S_i|} > \frac{(i-1)}{2} \geq$$

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum.
Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|} \underset{\text{Lemma 3}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{|S_{i-1}|} \underset{\text{Lemma 2}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{2|S_i|} > \frac{(i-1)}{2} \geq \frac{(\Delta(T)-\ell)}{2} \qquad \square$$

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis.

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich)

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich)

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert
- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich)

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert
- die Funktion von unten und oben beschränkt ist
- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert
- die Funktion von unten und oben beschränkt ist
- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Wie verändert sich $\Phi(T)$?

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Wie verändert sich $\Phi(T)$?

verringert sich um: $(1 - \frac{2}{27n^3})^{f(n)}$

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Wie verändert sich $\Phi(T)$?

verringert sich um: $(1 - \frac{2}{27n^3})^{f(n)} \leq (e^{-\frac{2}{27n^3}})^{f(n)}$

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Wie verändert sich $\Phi(T)$?

verringert sich um: $(1 - \frac{2}{27n^3})^{f(n)} \leq (e^{-\frac{2}{27n^3}})^{f(n)}$

Ziel: Nach $f(n)$ Iterationen: $\Phi(T) = n < 3n$

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \le (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Sei $f(n) = \frac{27}{2} n^4 \cdot \ln 3$. Wie verändert sich $\Phi(T)$?

verringert sich um: $(1 - \frac{2}{27n^3})^{f(n)} \le (e^{-\frac{2}{27n^3}})^{f(n)}$

Ziel: Nach $f(n)$ Iterationen: $\Phi(T) = n < 3n$

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Sei $f(n) = \frac{27}{2}n^4 \cdot \ln 3$. Wie verändert sich $\Phi(T)$?

verringert sich um: $(1 - \frac{2}{27n^3})^{f(n)} \leq (e^{-\frac{2}{27n^3}})^{f(n)} = e^{-n \ln 3}$

Ziel: Nach $f(n)$ Iterationen: $\Phi(T) = n < 3n$

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Sei $f(n) = \frac{27}{2} n^4 \cdot \ln 3$. Wie verändert sich $\Phi(T)$?

verringert sich um: $(1 - \frac{2}{27n^3})^{f(n)} \leq (e^{-\frac{2}{27n^3}})^{f(n)} = e^{-n \ln 3} = 3^{-n}$

Ziel: Nach $f(n)$ Iterationen: $\Phi(T) = n < 3n$ $\square$

Erweiterungen

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Korollar. Für jede Konstante $b > 1$ und $\ell = \lceil \log_b n \rceil$ läuft die lokale Suche in Polynomialzeit und findet einen Spannbaum T mit
$\Delta(T) \leq b \cdot \mathrm{OPT} + \lceil \log_b n \rceil$.

Erweiterungen

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Korollar. Für jede Konstante $b > 1$ und $\ell = \lceil \log_b n \rceil$ läuft die lokale Suche in Polynomialzeit und findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq b \cdot \mathrm{OPT} + \lceil \log_b n \rceil$.

Beweis. Ähnlich wie vorherige Seiten. Aufgabe $\square$

Erweiterungen

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Korollar. Für jede Konstante $b > 1$ und $\ell = \lceil \log_b n \rceil$ läuft die lokale Suche in Polynomialzeit und findet einen Spannbaum T mit
$\Delta(T) \leq b \cdot \mathrm{OPT} + \lceil \log_b n \rceil$.

Beweis. Ähnlich wie vorherige Seiten. Aufgabe $\square$

- Varianten für gerichtete Graphen und Steinerspannbaum.

Erweiterungen

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Korollar. Für jede Konstante $b > 1$ und $\ell = \lceil \log_b n \rceil$ läuft die lokale Suche in Polynomialzeit und findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq b \cdot \mathrm{OPT} + \lceil \log_b n \rceil$.

Beweis. Ähnlich wie vorherige Seiten. Aufgabe □

- Varianten für gerichtete Graphen und Steinerspannbaum.

Satz. Es gibt einen lokale Suche Algorithmus, der in $O(EV\alpha(E,V)\log V)$ Zeit einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ findet.

Neue Zerlegung

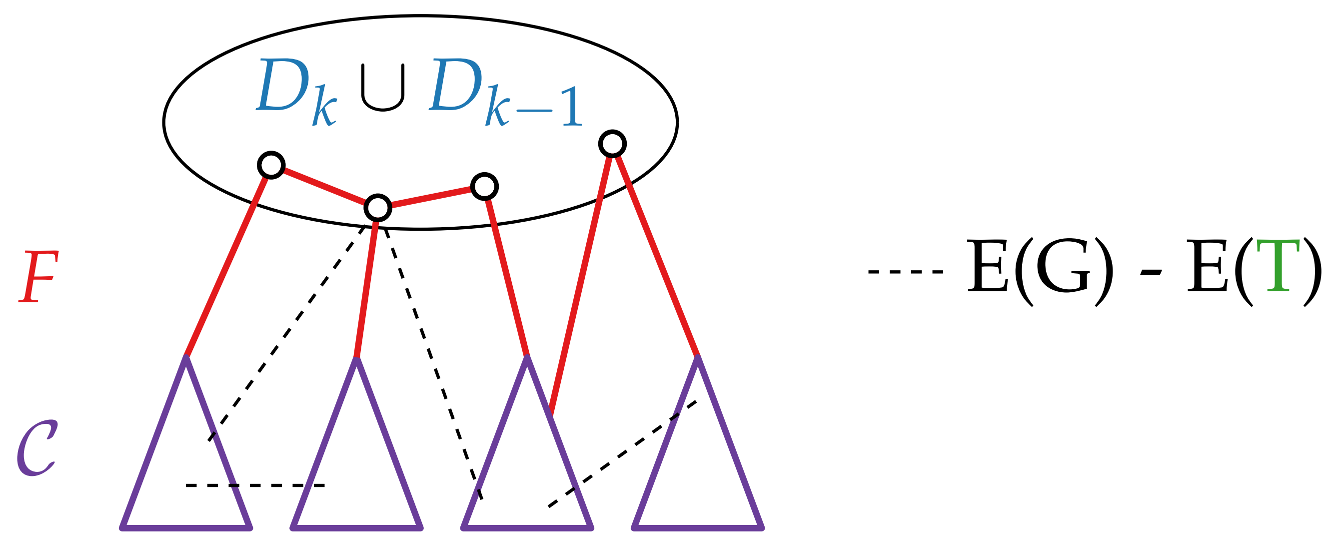
- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.

Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Neue Zerlegung

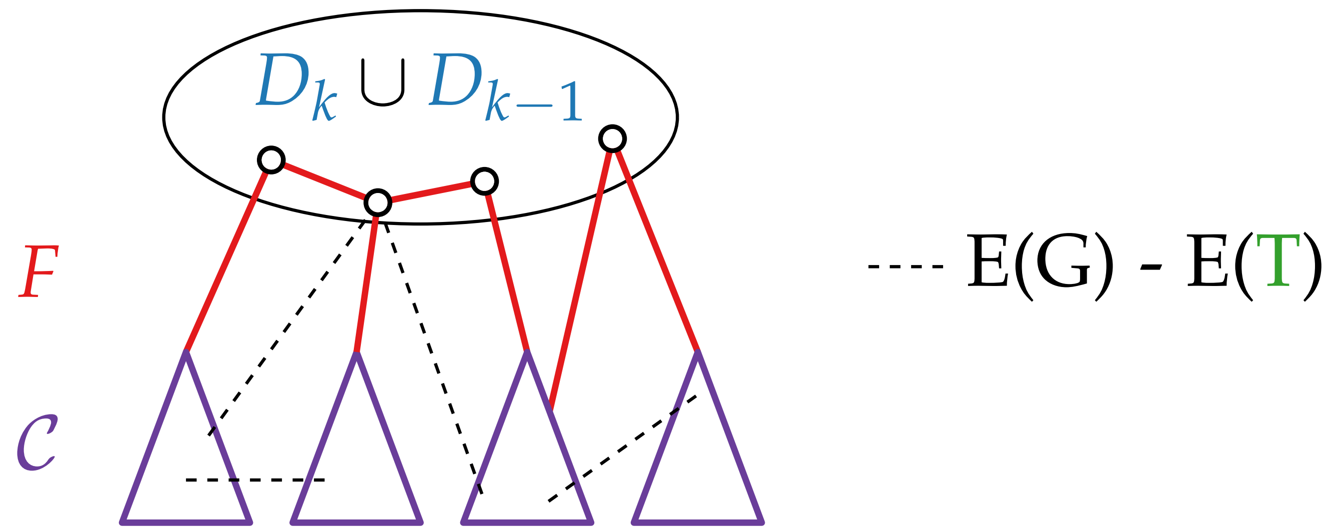
- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.



Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

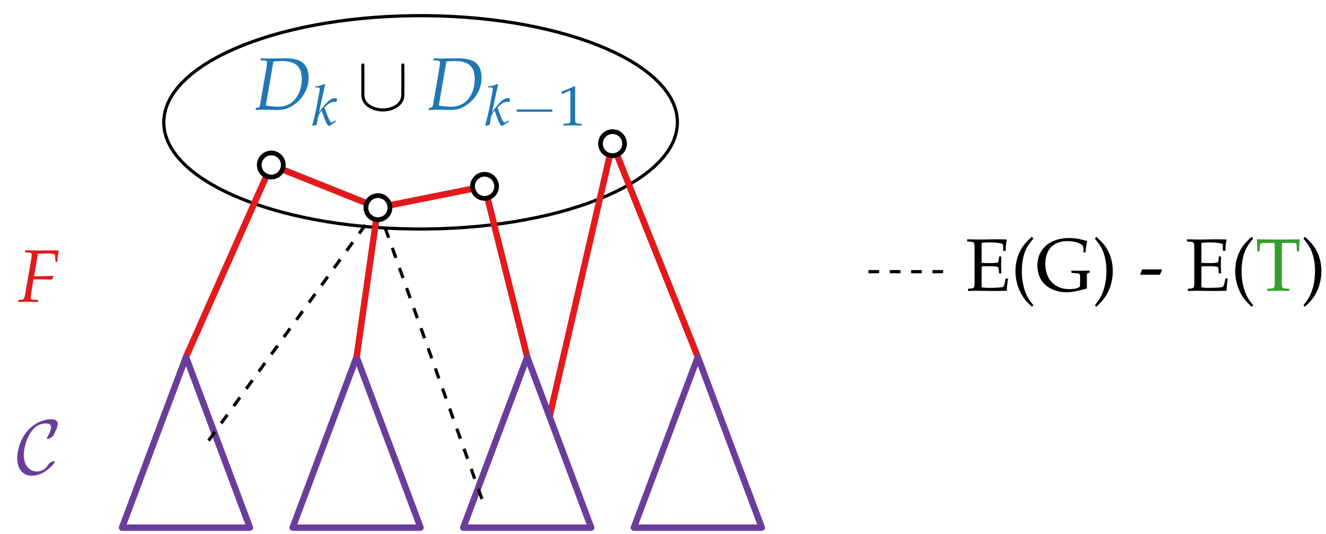
Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.



Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.



Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.

Beweis. $\mathrm{OPT} \overset{\text{Lemma 1}}{\geq}$ ⌉

Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.

Beweis. $\mathrm{OPT} \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} k / |S| =$ $\lceil$

Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.

Beweis. $\mathrm{OPT} \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} k/|S| = \lceil |F|/|D_k \cup D_{k-1}| \rceil$

Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.

Beweis. $\mathrm{OPT} \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} k/|S| = \lceil |F|/|D_k \cup D_{k-1}| \rceil$

$|F| \geq$ 1)

Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k-1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.

Beweis. $\mathrm{OPT} \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} k/|S| = \lceil |F| / |D_k \cup D_{k-1}| \rceil$

$$\underbrace{|F| \geq k|D_k| + (k-1)|D_{k-1}|}_{\text{Knotengrad}} \underbrace{- (|D_k| + |D_{k-1}| - 1)}_{\text{doppelt gezählt?}}$$

Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.

Beweis.
$$\mathrm{OPT} \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} k/|S| = \lceil |F|/|D_k \cup D_{k-1}| \rceil$$
$$\geq \left\lceil \frac{(k-1)(|D_k|+|D_{k-1}|)-|D_{k-1}|-1)}{|D_k \cup D_{k-1}|} \right\rceil \geq k - 1$$

$$|F| \geq k|D_k| + (k-1)|D_{k-1}| - (|D_k| + |D_{k-1}| - 1)$$

Knotengrad

doppelt gezählt?

Neue Zerlegung $\Rightarrow$ Untere Schranke für OPT

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k-1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F|-1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \le \mathrm{OPT} + 1$.

Beweis.
$$\mathrm{OPT} \overset{\text{Lemma 1}}{\geq} k/|S| = \lceil |F| / |D_k \cup D_{k-1}| \rceil$$
$$\geq \left\lceil \frac{(k-1)(|D_k|+|D_{k-1}|)-|D_{k-1}|-1)}{|D_k \cup D_{k-1}|} \right\rceil \geq k-1$$

$$|F| \geq \underbrace{k|D_k| + (k-1)|D_{k-1}|}_{\text{Knotengrad}} - \underbrace{(|D_k| + |D_{k-1}| - 1)}_{\text{doppelt gezählt?}}$$

Lokale Suche*

MinDegSpanningTreeLocalSearch*(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while `true` **do** $k \leftarrow \Delta(T)$

while $\exists\, v$ mit $\deg_T = k$ **do** $D_{k-1} \leftarrow \{v : \deg_T(v) = k-1\}$

if Bedingungen für Lemma erfüllt **then return** T

Lokale Suche*

MinDegSpanningTreeLocalSearch*(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while `true` **do** $k \leftarrow \Delta(T)$

while $\exists\, v$ mit $\deg_T = k$ **do** $D_{k-1} \leftarrow \{v : \deg_T(v) = k-1\}$

if Bedingungen für Lemma erfüllt **then return** T

for $vw \in E$ zwischen ZK in $\mathcal{C}$: $v, w \notin D_k \cup D_{k-1}$ **do**

$K \leftarrow$ Kreis erzeugt durch T und vw

Lokale Suche*

MinDegSpanningTreeLocalSearch*(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while `true` **do** $k \leftarrow \Delta(T)$

while $\exists\, v$ mit $\deg_T = k$ **do** $D_{k-1} \leftarrow \{v : \deg_T(v) = k-1\}$

if Bedingungen für Lemma erfüllt **then return** T

for $vw \in E$ zwischen ZK in $\mathcal{C}$: $v, w \notin D_k \cup D_{k-1}$ **do**

$K \leftarrow$ Kreis erzeugt durch T und vw

if $K \cap D_k = \emptyset$ **then**

markiere alle $u \in C \cap D_{k-1}$ reduzierbar durch vw

entferne $C \cap D_{k-1}$ aus D_{k-1}, update F und $\mathcal{C}$

Lokale Suche*

MinDegSpanningTreeLocalSearch*(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while `true` **do** $k \leftarrow \Delta(T)$

while $\exists\, v$ mit $\deg_T = k$ **do** $D_{k-1} \leftarrow \{v : \deg_T(v) = k-1\}$

if Bedingungen für Lemma erfüllt **then return** T

for $vw \in E$ zwischen ZK in $\mathcal{C}$: $v, w \notin D_k \cup D_{k-1}$ **do**

$K \leftarrow$ Kreis erzeugt durch T und vw

if $K \cap D_k = \emptyset$ **then**

markiere alle $u \in C \cap D_{k-1}$ reduzierbar durch vw

entferne $C \cap D_{k-1}$ aus D_{k-1}, update F und $\mathcal{C}$

else if $u \in K \cap D_k$ **then**

if v oder w reduzierbar **then**

reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …

reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Analyse

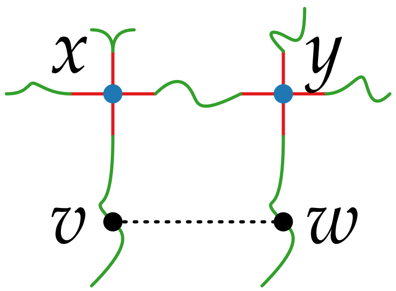
Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze.

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$

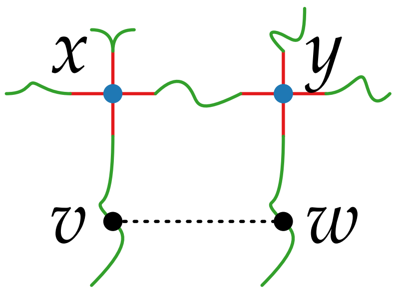


$x, y \in D_{k-1}$

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



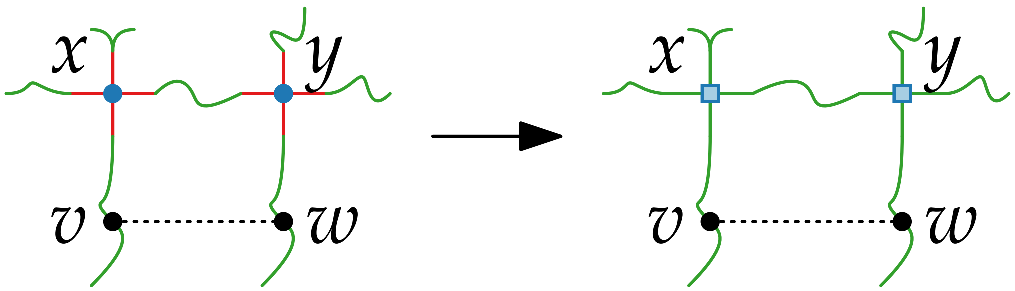
$x, y \in D_{k-1}$

if $K \cap D_k = \emptyset$ **then**
markiere alle $u \in C \cap D_{k-1}$ reduzierbar durch vw
entferne $C \cap D_{k-1}$ aus D_{k-1}, update F und $\mathcal{C}$

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

if $K \cap D_k = \emptyset$ **then**

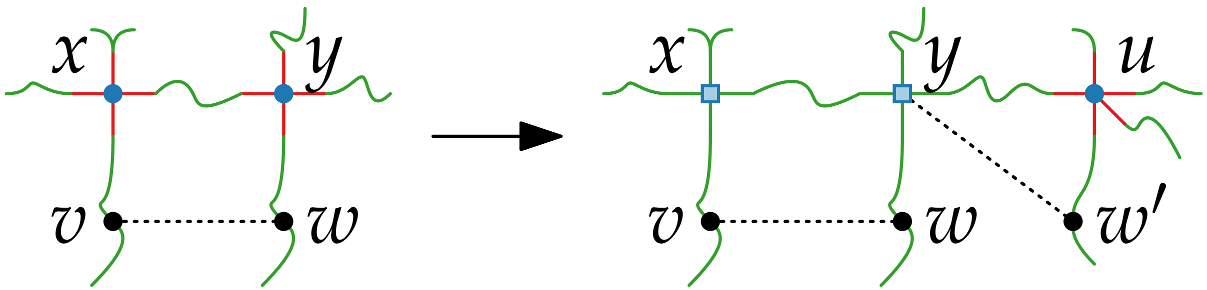
markiere alle $u \in C \cap D_{k-1}$ reduzierbar durch vw

entferne $C \cap D_{k-1}$ aus D_{k-1}, update F und $\mathcal{C}$

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$

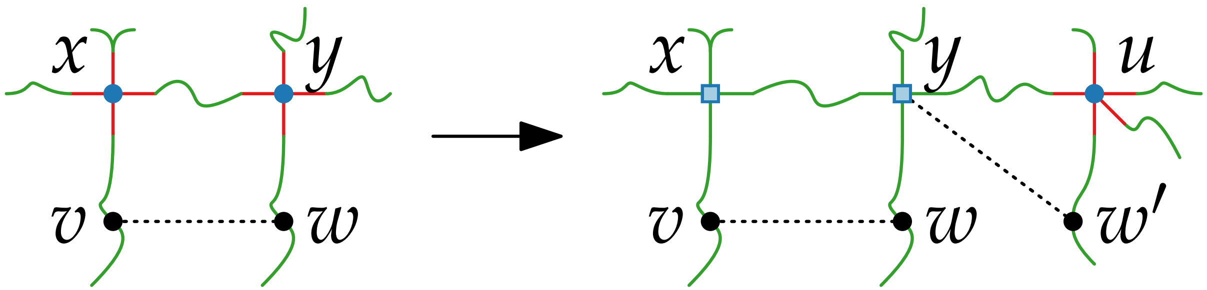


$x, y \in D_{k-1}$ $\qquad u \in D_k$

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



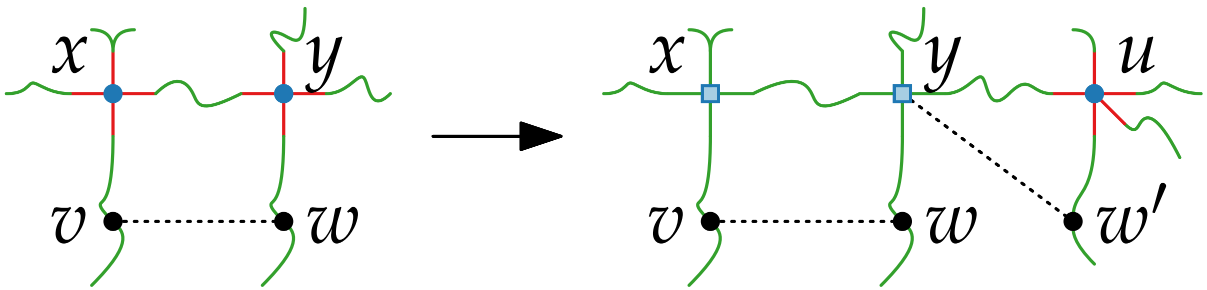
$x, y \in D_{k-1}$ $u \in D_k$

else if $u \in K \cap D_k$ **then**
if v oder w reduzierbar **then**
reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …
reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

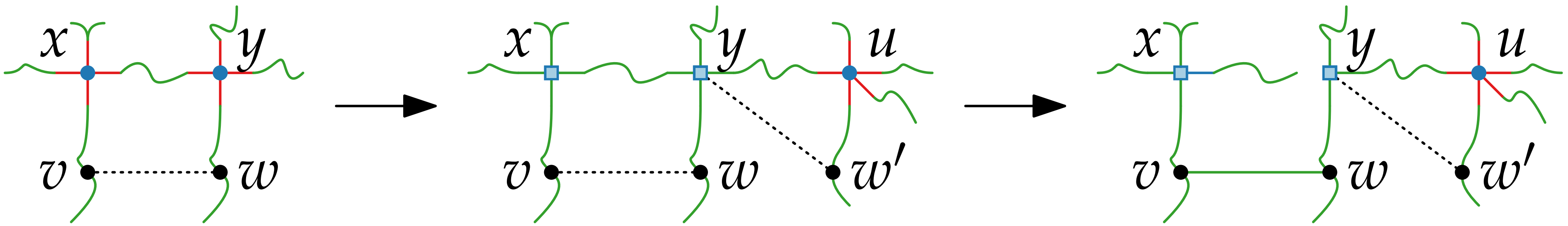
$u \in D_k$
y reduzierbar

else if $u \in K \cap D_k$ **then**
  if v oder w reduzierbar **then**
    reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …
  reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

$u \in D_k$
y reduzierbar

else if $u \in K \cap D_k$ **then**

if v oder w reduzierbar **then**

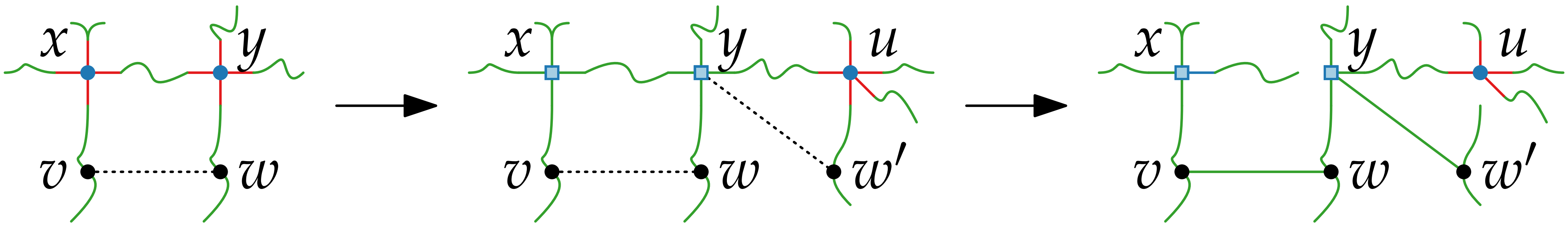
reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …

reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

$u \in D_k$

y reduzierbar

else if $u \in K \cap D_k$ **then**

if v oder w reduzierbar **then**

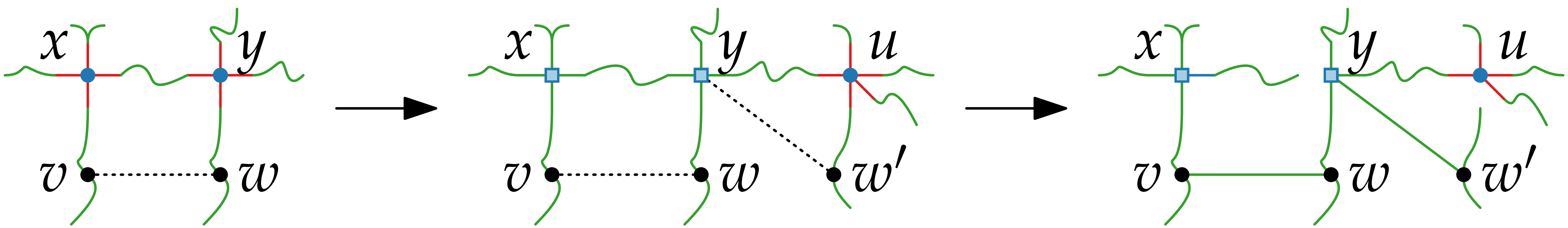
reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …

reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \text{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

$u \in D_k$
y reduzierbar

else if $u \in K \cap D_k$ **then**
  if v oder w reduzierbar **then**
    reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …
  reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

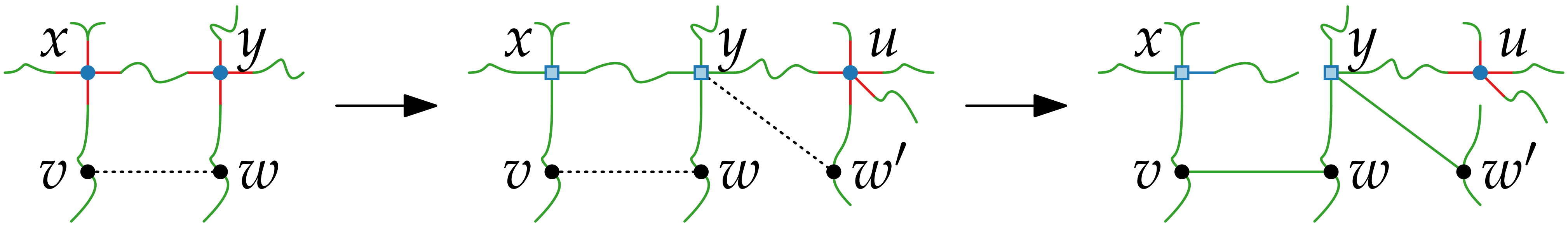
Induktion

- Wir erzeugen keinen Kreise beim Propagieren von Flips.

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

$u \in D_k$
y reduzierbar

else if $u \in K \cap D_k$ **then**
 if v oder w reduzierbar **then** Induktion
  reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …
 reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

- Wir erzeugen keinen Kreise beim Propagieren von Flips.
- Wir erzeugen keinen neuen Knoten mit Grad $\Delta(T)$.

Schlussbemerkungen

- Lokale Suche ist eine beliebte Heuristik für diskrete Optimierungsprobleme
- Lokale Suche kann jederzeit eine gültige Lösung ausgeben – ab-/unterbrechbar
  - Unterschied zu Greedy-Algorithmus
- Weitere lokale Suche Approximationen existieren für
  - Job Scheduling auf identischen, parallelen Maschinen
  - k-Means Clustering
  - Metric Traveling Salesman Problem
  - Simplex-Methode für LPs
  - …