Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

Minimalgrad-Spannbaum durch lokale Suche

9. Vorlesung

Jonathan Klawitter

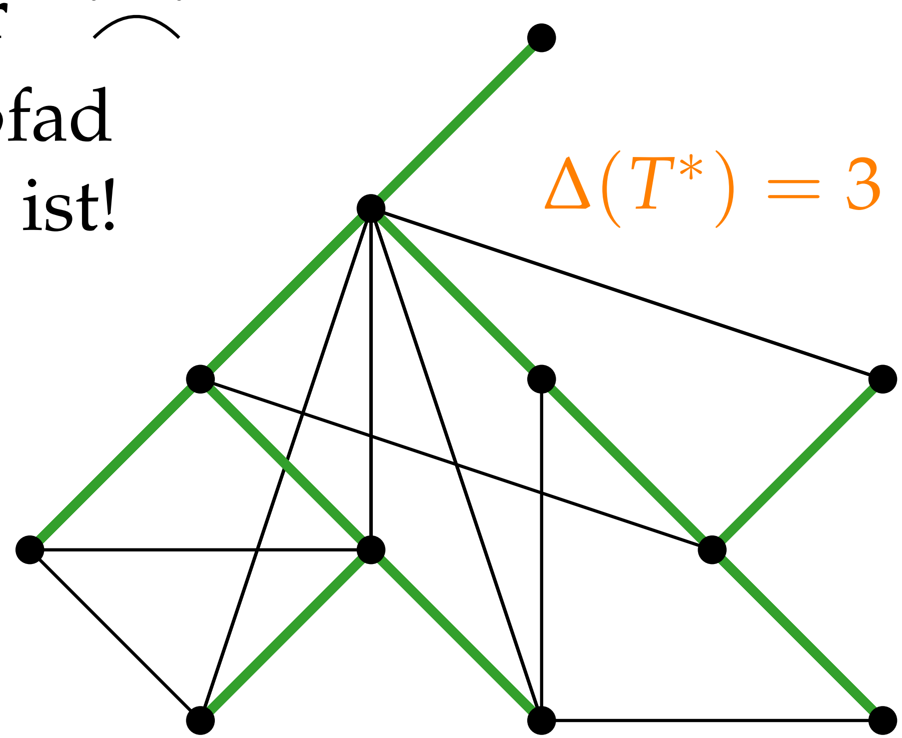
Wintersemester 2019/20

Minimum-Degree Spanning Tree

Gegeben sei ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$.
Gesucht ist ein Spannbaum T, dessen Maximalgrad $\Delta(T)$ minimal unter allen Spannbäumen ist.

NP-schwer

da Hamiltonpfad ein Spezialfall ist!



$\Delta(T^*) = 3$

Aufwärmung

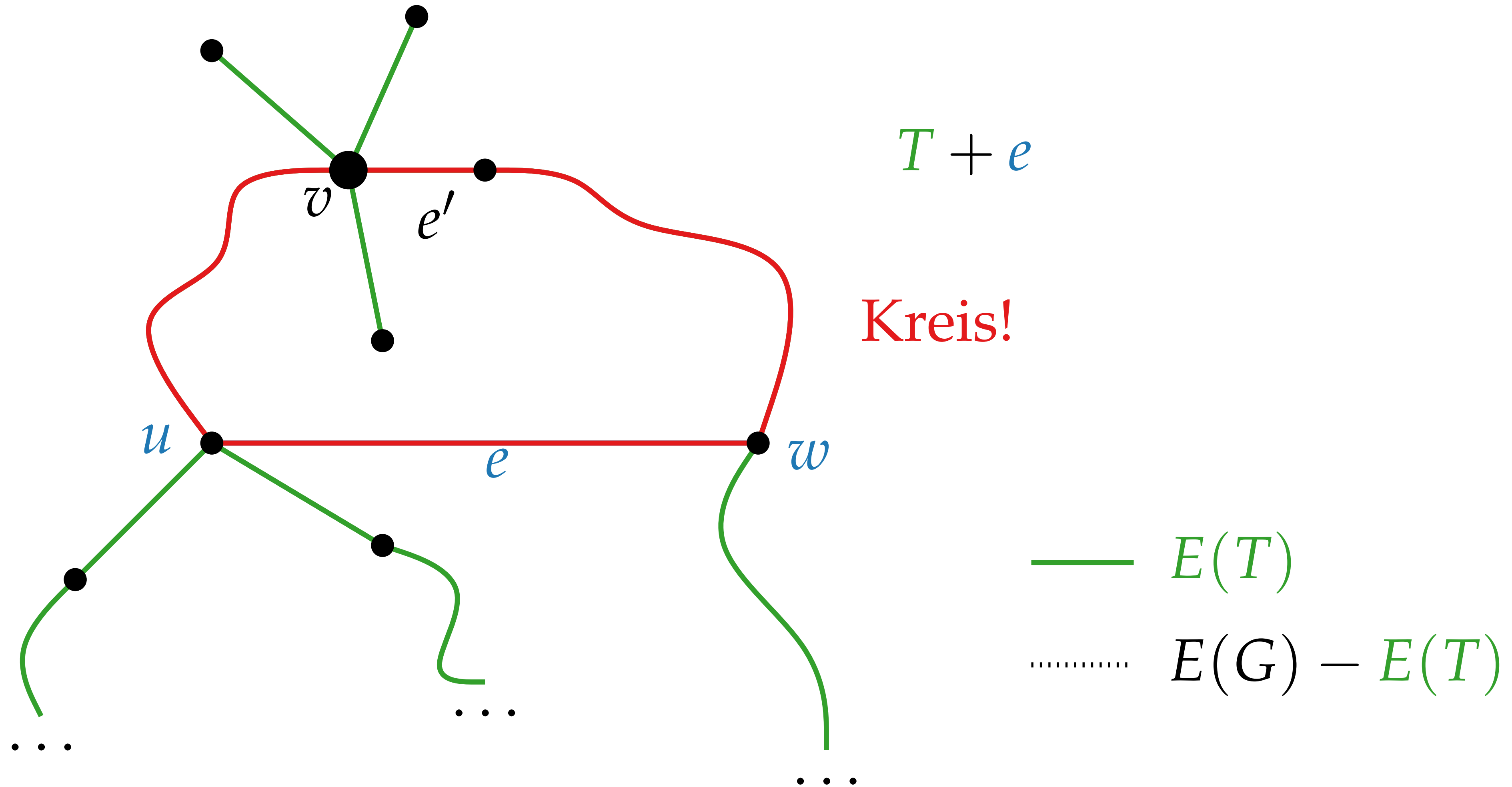
Beob. Ein Spannbaum T hat

- n Knoten und $n-1$ Kanten,
- Knotengradsumme $\sum_{v \in V} \deg_T(v) = 2n-2$,
- durchschnittlichen Knotengrad < 2.

Beob. Sei $V' \subseteq V(G)$.
Dann gilt $\Delta(G) \geq \sum_{v \in V'} \deg(v) / |V'|$.

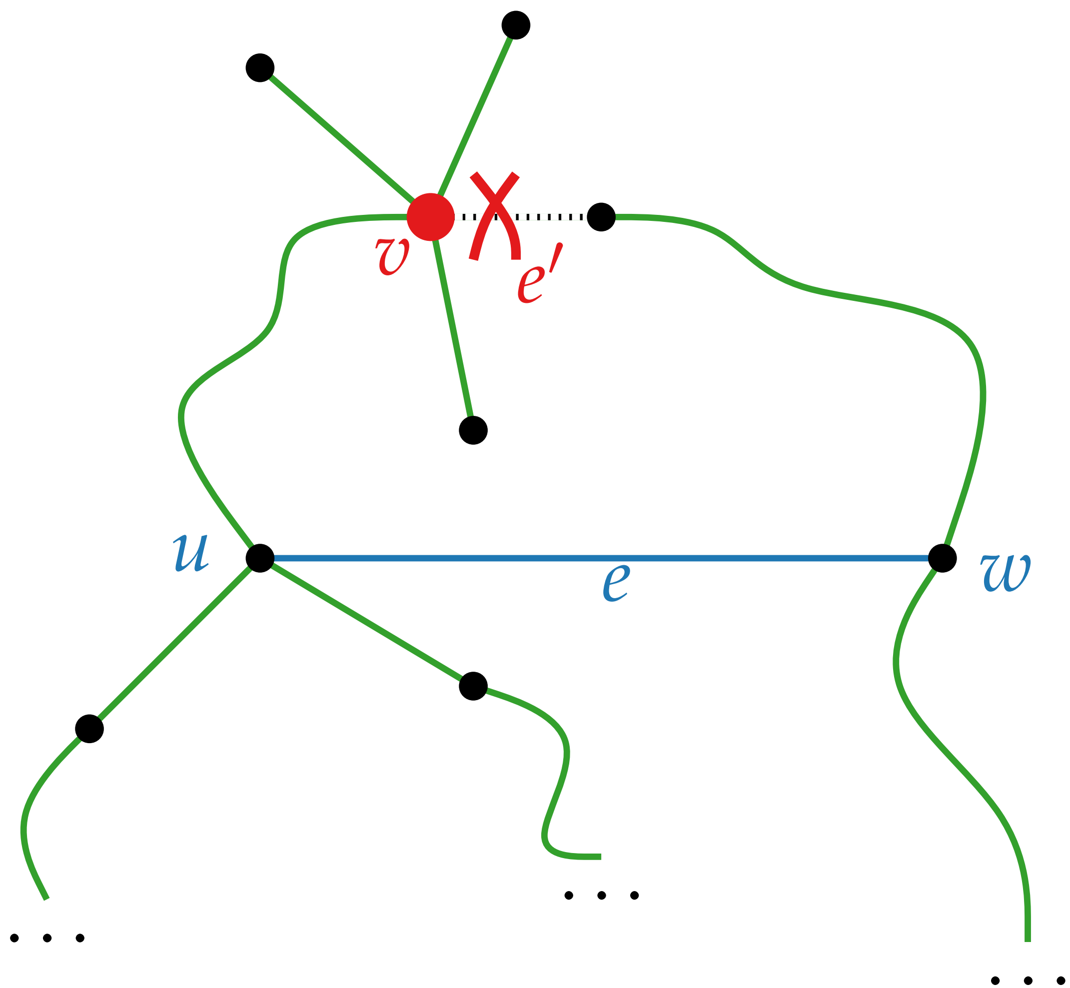
Beob. Sei T ein Spannbaum mit $k = \Delta(T)$.
Dann hat T höchstens $\frac{2n}{k}$ Knoten mit Grad k.

Kantenflip

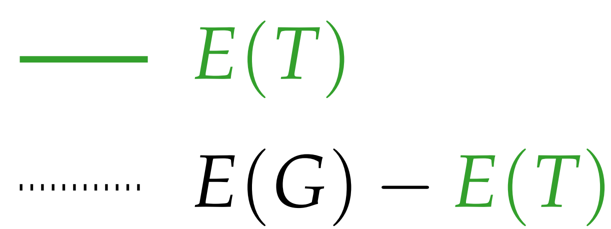


Kantenflip

Defi. Ein **verbessernder Flip** in T für einen Knoten v und eine Kante $uw \in E(G) \setminus E(T)$ ist ein Flip bei dem $\deg_T(v) > \max\{\deg_T(v), \deg_T(w)\} + 1$.



$T + e - e'$
ist ein neuer Spannbaum



Lokale Suche

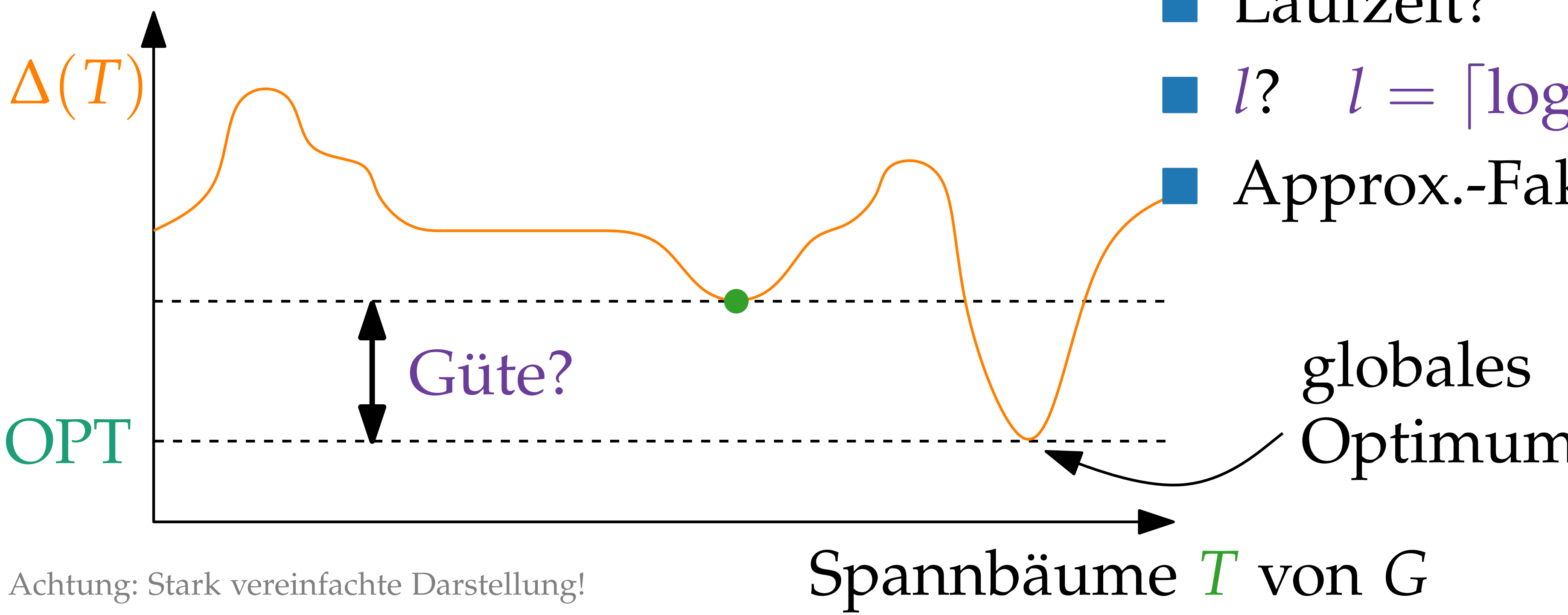
MinDegSpanningTreeLocalSearch(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while $\exists$ "verbessernder Flip" in T für einen Knoten v mit $\deg_T(v) \geq \Delta(T) - l$ **do**

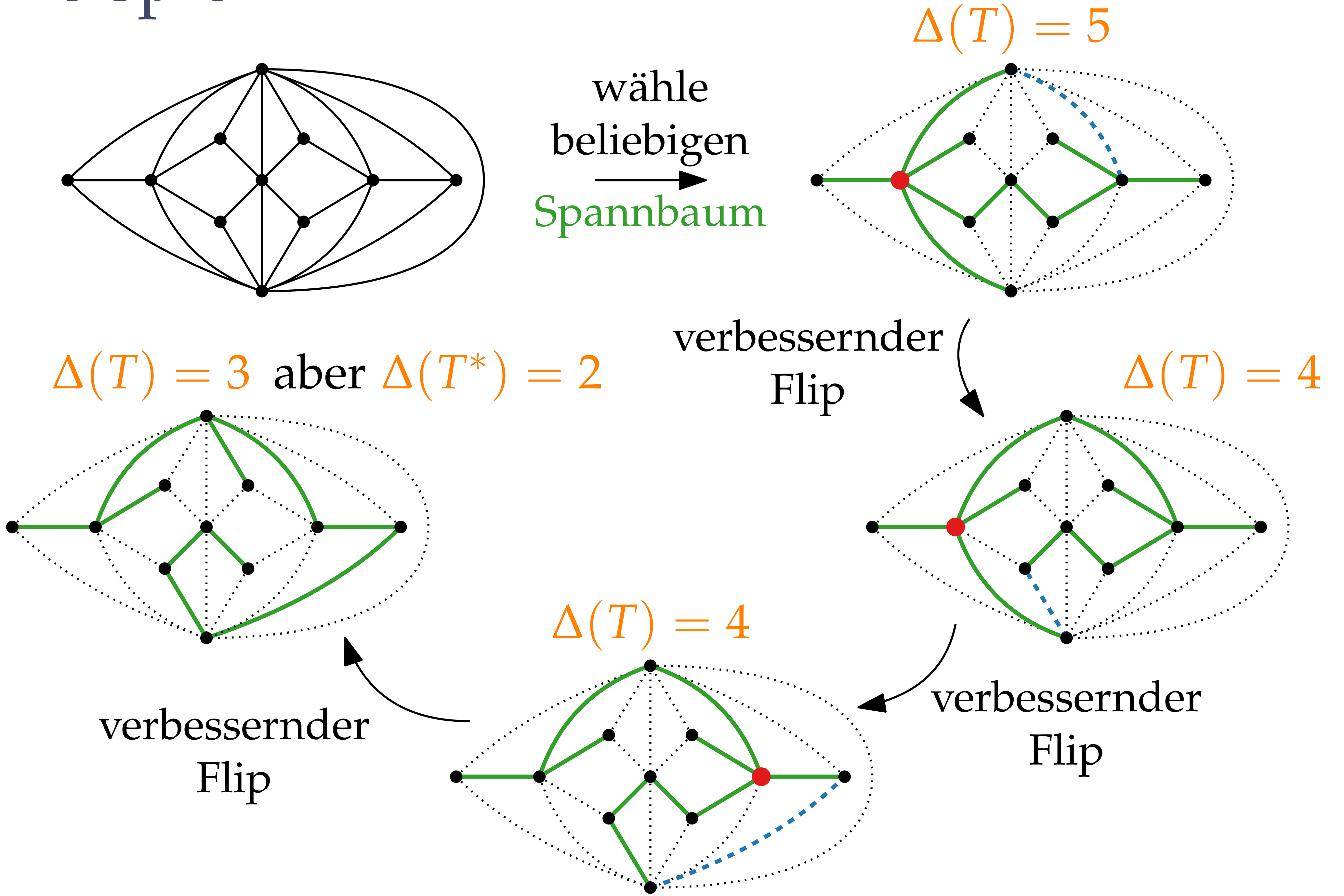
führe den Flip durch

- Terminierung?
- Laufzeit?
- l? $l = \lceil \log n \rceil$
- Approx.-Faktor?



Achtung: Stark vereinfachte Darstellung!

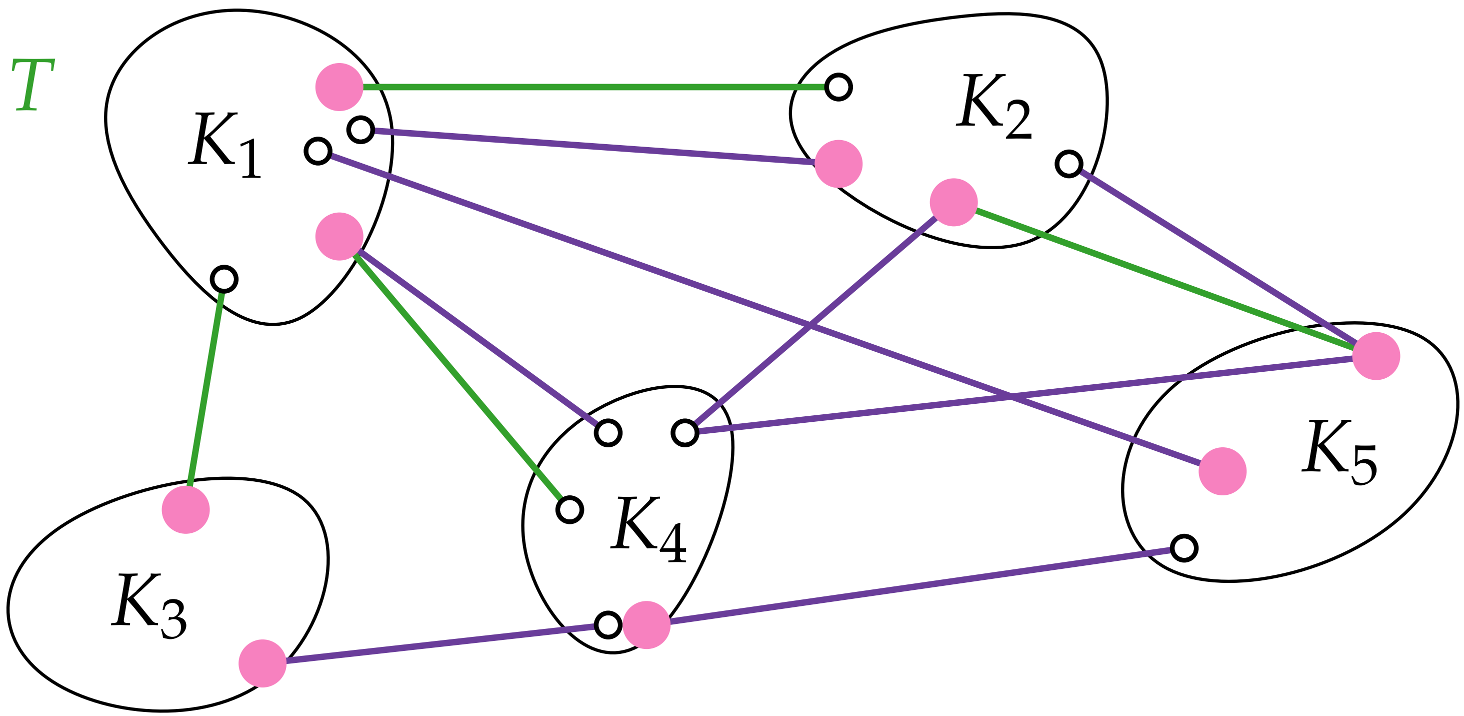
Beispiel



wähle beliebigen Spannbaum
$\Delta(T) = 5$
verbessernder Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder Flip
$\Delta(T) = 4$
verbessernder Flip
$\Delta(T) = 3$ aber $\Delta(T^*) = 2$

Zerlegung $\Rightarrow$ Untere Schranke für OPT

- Entfernung von k Kanten zerlegt T in $k+1$ ZK.
- $E' := \{$Kanten in G zw. verschiedenen ZK $K_i \neq K_j\}$.
- $S :=$ Knotenüberdeckung für E'.



- $E(T^*) \cap E' \geq k$ für optimalen SB T^*
- $\sum_{v \in S} \deg_{T^*}(v) \geq k$

Lemma 1.
$\Rightarrow \mathrm{OPT} \geq k/|S|$

Mehr Lemmata

Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$.
Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

$\Rightarrow S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$
$\Rightarrow S_1 = V(G)$
$\Rightarrow E_1 = E(T)$

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Beweis. $|S_{\Delta(T)-l}| > 2^l |S_{\Delta(T)}| \underset{l = \lceil \log_2 n \rceil}{=} 2^{\lceil \log_2 n \rceil} |S_{\Delta(T)}| \geq n |S_{\Delta(T)}|$ ↯

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

Beweis. (i) $|E_i| \underset{\text{Knotengrad}}{\geq i|S_i|} - \underset{\text{doppelt gezählt?}}{(|S_i| - 1)} = (i-1)|S_i| + 1$

(ii) Sonst existiert ein verbessernder Flip für $v \in S_i$.

Approximationsfaktor

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Satz. Sei T ein lokal optimaler Spannbaum. Dann gilt $\Delta(T) \leq 2 \cdot \mathrm{OPT} + \ell$, wobei $\ell = \lceil \log_2 n \rceil$.

Beweis. Seien S_i die Knoten v in T mit $\deg_T(v) \geq i$. Seien E_i die Kanten von T inzident zu S_i.

Lemma 1. $\mathrm{OPT} \geq k/|S|$, wobei $k = |\text{entfernte Kanten}|$.

Lemma 2. Es gibt ein $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$ mit $|S_{i-1}| \leq 2|S_i|$.

Lemma 3. Für lokal optimaler SB T und $i \geq \Delta(T) - \ell + 1$,
(i) $|E_i| \geq (i-1)|S_i| + 1$,
(ii) Jedes $e \in E(G) \setminus E_i$ zwischen unterschiedlichen ZK von $T \setminus E_i$ ist inzident zu einem Knoten von S_{i-1}.

... wie wählen wir k und S?

$$\mathrm{OPT} \underset{\text{Lemma 1}}{\geq} \frac{k}{|S|} \underset{\text{Lemma 3}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{|S_{i-1}|} \underset{\text{Lemma 2}}{\geq} \frac{(i-1)|S_i|+1}{2|S_i|} > \frac{(i-1)}{2} \geq \frac{(\Delta(T)-\ell)}{2} \qquad \square$$

Terminierung und Laufzeit

Satz. Der Algorithmus findet effizient einen lokal optimalen Spannbaum.

Beweis. Mit Potentialfunktion $\Phi(T)$, die den Wert einer Lösung misst, bei der (hoffentlich) $\Phi(T) = \sum_{v \in V(G)} 3^{\deg_T(v)}$

- jede Iteration das Potential der Lösung verringert

Lemma. Nach jedem Flip $T \to T'$, $\Phi(T') \leq (1 - \frac{2}{27n^3})\Phi(T)$.

Aufgabe

- die Funktion von unten und oben beschränkt ist

Lemma. Für jeden Spannbaum T, $\Phi(T) \in [3n, n3^n]$.

- $f(n)$ Iterationen diese untere Schranke unterschreitet

Sei $f(n) = \frac{27}{2} n^4 \cdot \ln 3$. Wie verändert sich $\Phi(T)$?

verringert sich um: $(1 - \frac{2}{27n^3})^{f(n)} \leq (e^{-\frac{2}{27n^3}})^{f(n)} = e^{-n \ln 3} = 3^{-n}$

Ziel: Nach $f(n)$ Iterationen: $\Phi(T) = n < 3n$ $\square$

Erweiterungen

[Fürer & Raghvachari: SODA'92, JA'94]

Korollar. Für jede Konstante $b > 1$ und $\ell = \lceil \log_b n \rceil$ läuft die lokale Suche in Polynomialzeit und findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq b \cdot \mathrm{OPT} + \lceil \log_b n \rceil$.

Beweis. Ähnlich wie vorherige Seiten. Aufgabe $\square$

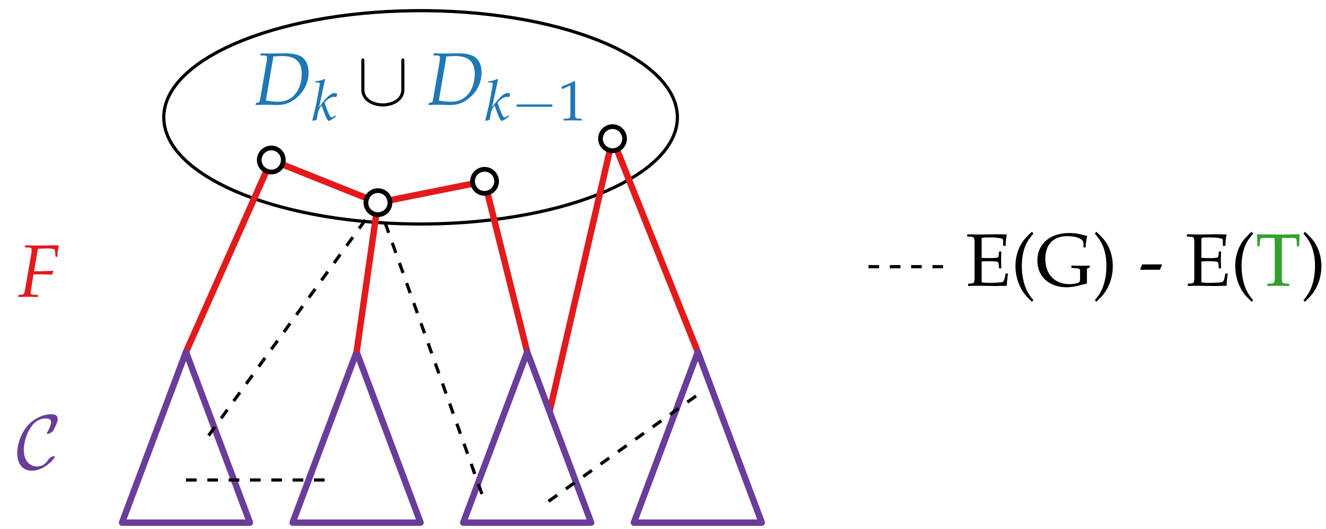
- Varianten für gerichtete Graphen und Steinerspannbaum.

Satz. Es gibt einen lokale Suche Algorithmus, der in $O(EV\alpha(E,V)\log V)$ Zeit einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ findet.

Neue Zerlegung

- Sei $k = \Delta(T)$. Seien D_k die Knoten v mit $\deg_T(v) = k$.
- Sei D_{k-1} eine Teilmenge der Knoten v mit $\deg_T(v) = k - 1$.
- Seien $F \subseteq E(T)$ die Kanten inzident zu $D_k \cup D_{k-1}$.
- Seien $\mathcal{C}$ die $|F| - 1$ ZK von $T - F$.

Lemma. Wenn jede Kante in G, die zwei ZK in $\mathcal{C}$ verbindet, mindestens einen Endpunkt in $D_k \cup D_{k-1}$ hat, dann $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$.



Lokale Suche*

MinDegSpanningTreeLocalSearch*(G)

$T \leftarrow$ beliebiger Spannbaum von G

while `true` **do** $k \leftarrow \Delta(T)$

while $\exists\, v$ mit $\deg_T = k$ **do** $D_{k-1} \leftarrow \{v : \deg_T(v) = k-1\}$

if Bedingungen für Lemma erfüllt **then return** T

for $vw \in E$ zwischen ZK in $\mathcal{C}$: $v, w \notin D_k \cup D_{k-1}$ **do**

$K \leftarrow$ Kreis erzeugt durch T und vw

if $K \cap D_k = \emptyset$ **then**

markiere alle $u \in C \cap D_{k-1}$ reduzierbar durch vw

entferne $C \cap D_{k-1}$ aus D_{k-1}, update F und $\mathcal{C}$

else if $u \in K \cap D_k$ **then**

if v oder w reduzierbar **then**

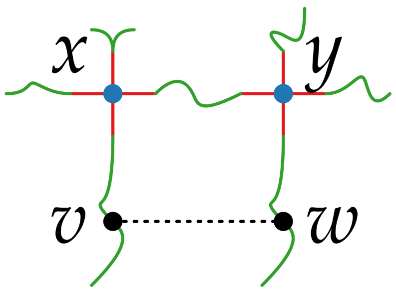
reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere ...

reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

if $K \cap D_k = \emptyset$ **then**

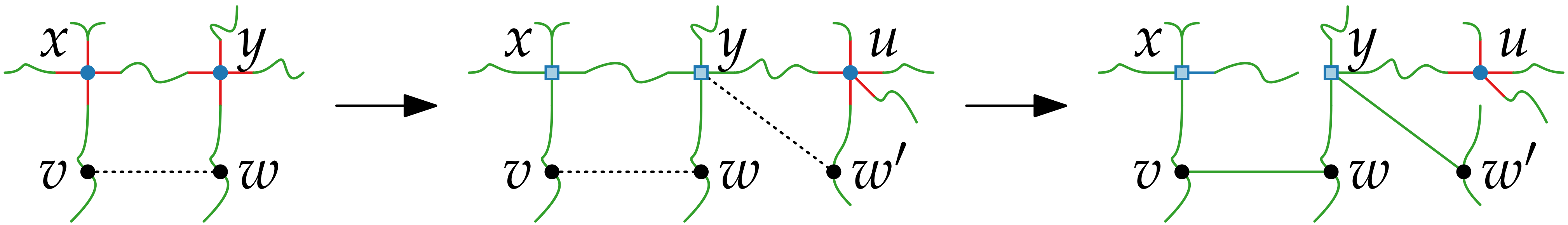
markiere alle $u \in C \cap D_{k-1}$ reduzierbar durch vw

entferne $C \cap D_{k-1}$ aus D_{k-1}, update F und $\mathcal{C}$

Analyse

Satz. Die Lokale Suche* findet einen Spannbaum T mit $\Delta(T) \leq \mathrm{OPT} + 1$ in polynomieller Zeit.

Beweisskizze. $k = 5$



$x, y \in D_{k-1}$

$u \in D_k$
y reduzierbar

else if $u \in K \cap D_k$ **then**

  if v oder w reduzierbar **then** Induktion

    reduziere Grad von v/w mit Flip, propagiere …

  reduziere Grad von u mit Flip, verlasse for-Schleife

- Wir erzeugen keinen Kreise beim Propagieren von Flips.
- Wir erzeugen keinen neuen Knoten mit Grad $\Delta(T)$.

Schlussbemerkungen

- Lokale Suche ist eine beliebte Heuristik für diskrete Optimierungsprobleme
- Lokale Suche kann jederzeit eine gültige Lösung ausgeben – ab-/unterbrechbar
  - Unterschied zu Greedy-Algorithmus
- Weitere lokale Suche Approximationen existieren für
  - Job Scheduling auf identischen, parallelen Maschinen
  - k-Means Clustering
  - Metric Traveling Salesman Problem
  - Simplex-Methode für LPs
  - ...