Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

SetCover via LP-Runden, via Primal-Dual-Schema und via Dual Fitting

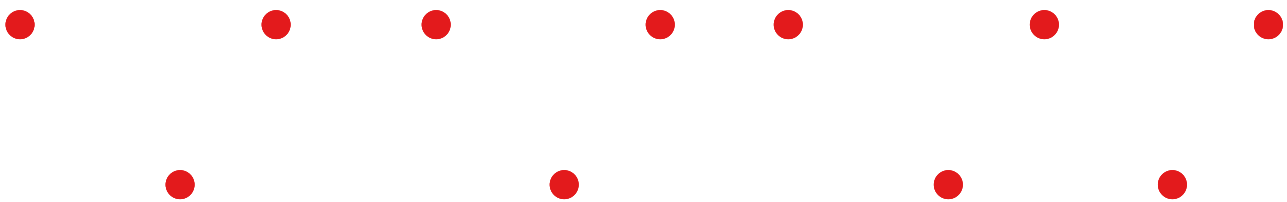
5. Vorlesung

Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

SetCover – Formulierung als ILP

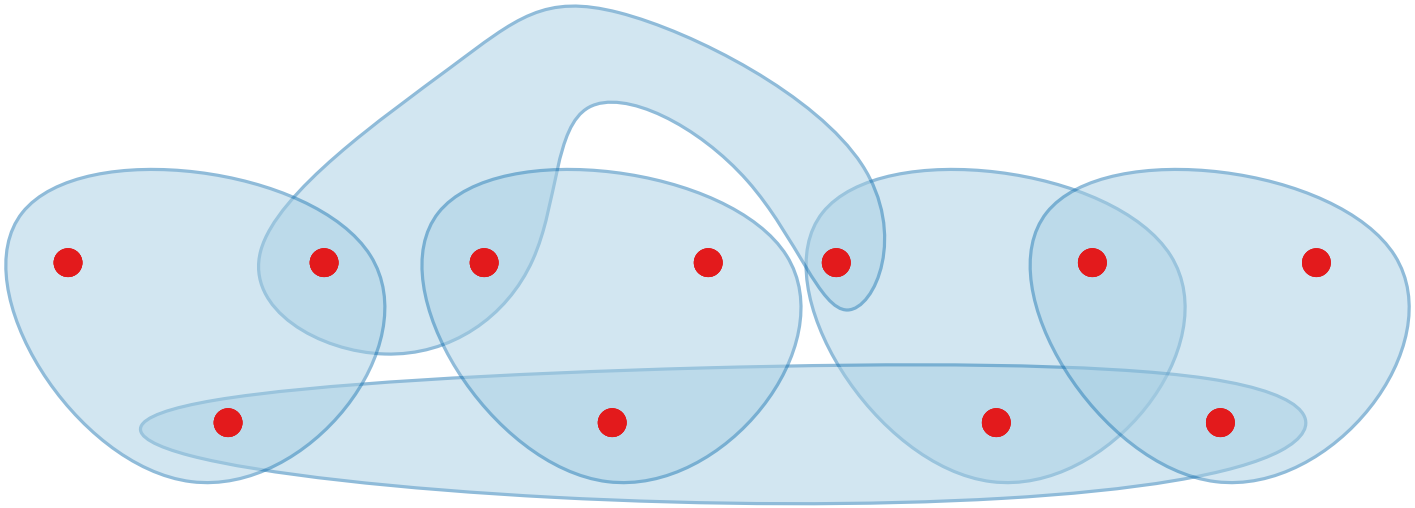
Grundmenge U



SetCover – Formulierung als ILP

Grundmenge U

Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

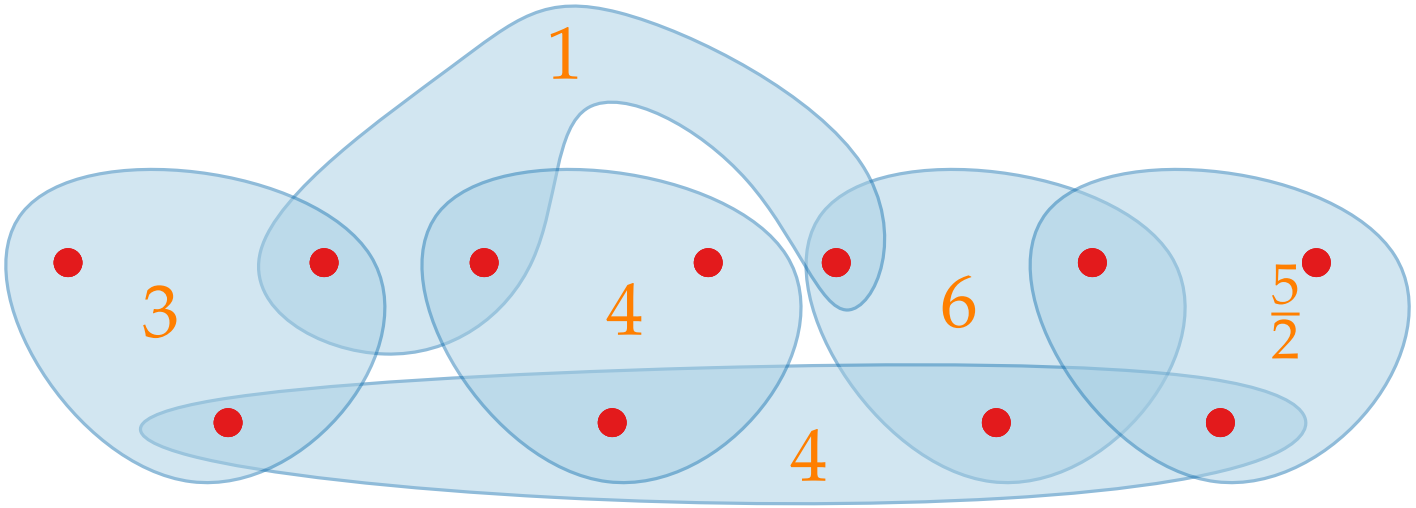


SetCover – Formulierung als ILP

Grundmenge U

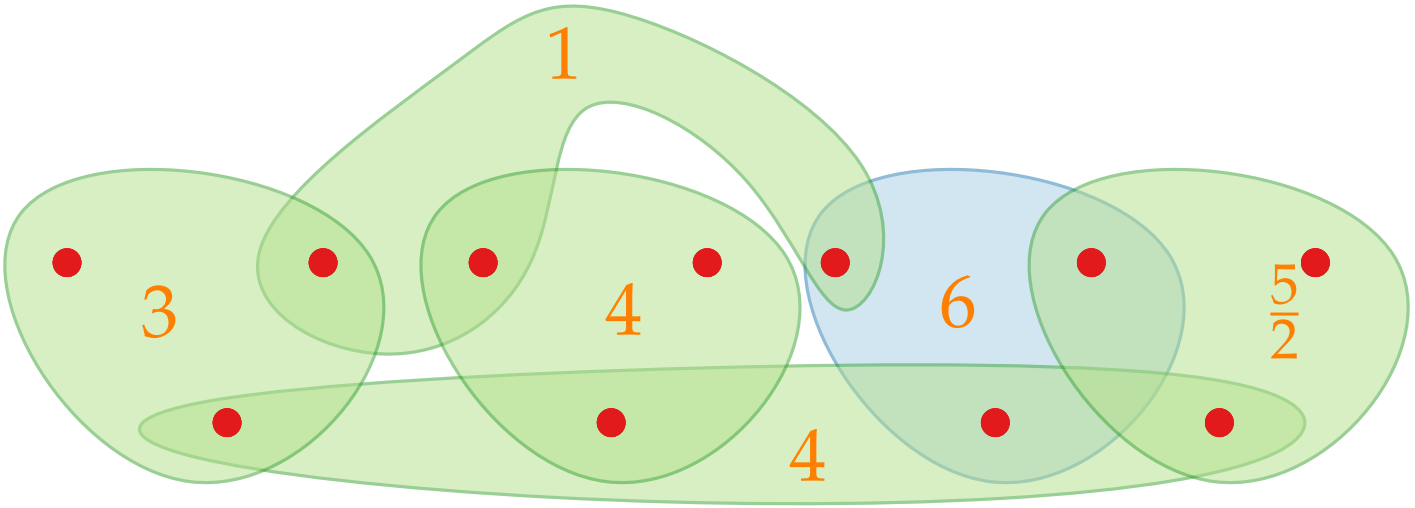
Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$



SetCover – Formulierung als ILP

Grundmenge U
Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$
Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$



Finde Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U mit minimalen Kosten.

SetCover – Formulierung als ILP

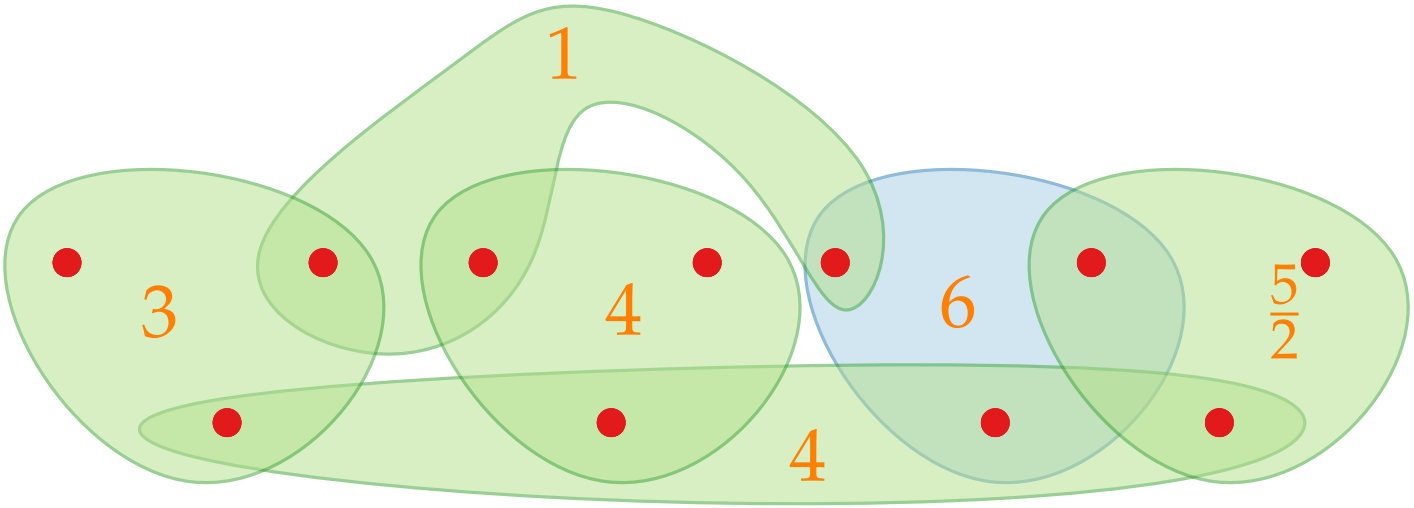
minimize

subject to

Grundmenge U

Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$



Finde Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U mit minimalen Kosten.

SetCover – Formulierung als ILP

minimize

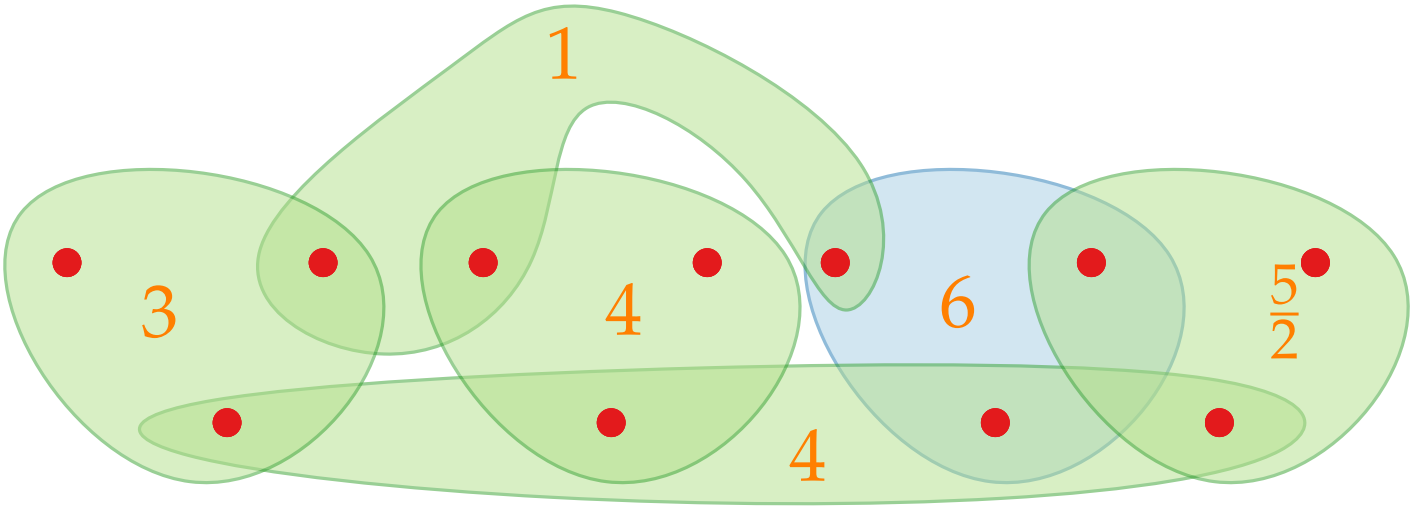
subject to

$x_S \qquad S \in \mathcal{S}$

Grundmenge U

Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$



Finde Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U mit minimalen Kosten.

SetCover – Formulierung als ILP

minimize

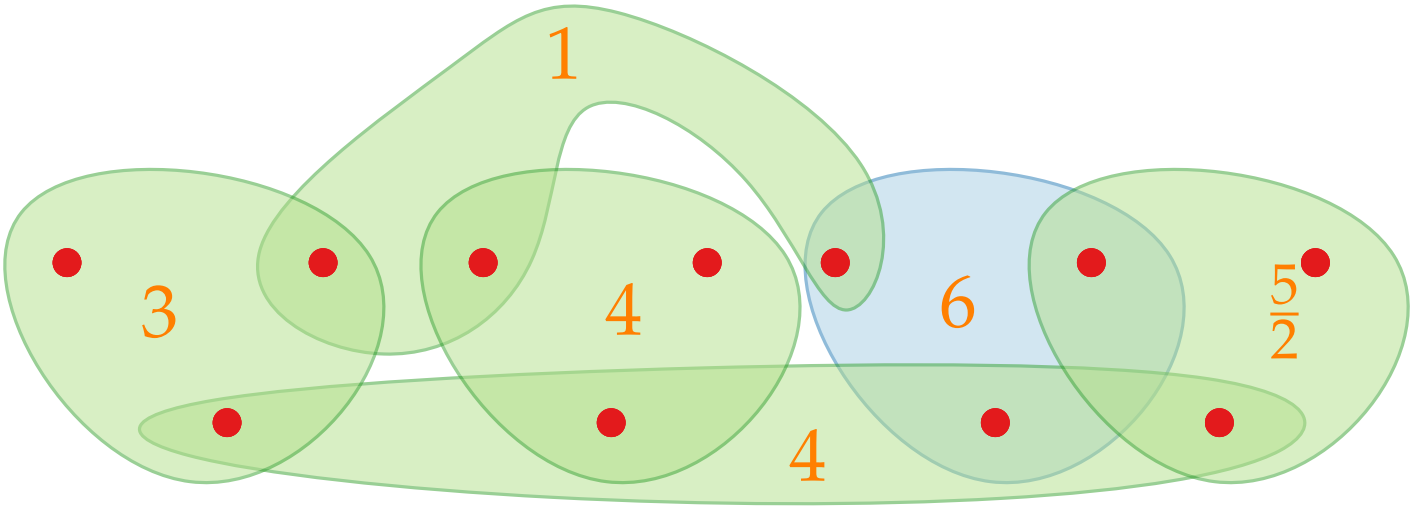
subject to

$$x_S \in \{0,1\} \qquad S \in \mathcal{S}$$

Grundmenge U

Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$



Finde Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U mit minimalen Kosten.

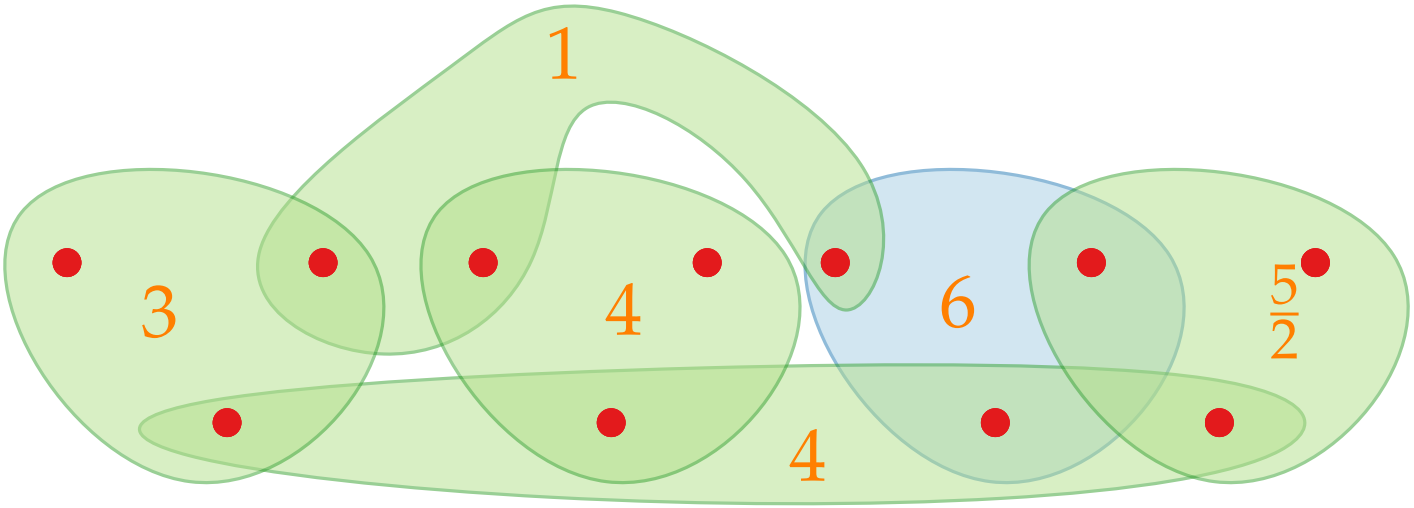
SetCover – Formulierung als ILP

$$\begin{aligned} \textbf{minimize} \quad & \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S \\ \textbf{subject to} \quad & \\ & x_S \in \{0,1\} \quad S \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Grundmenge U

Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$



Finde Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U mit minimalen Kosten.

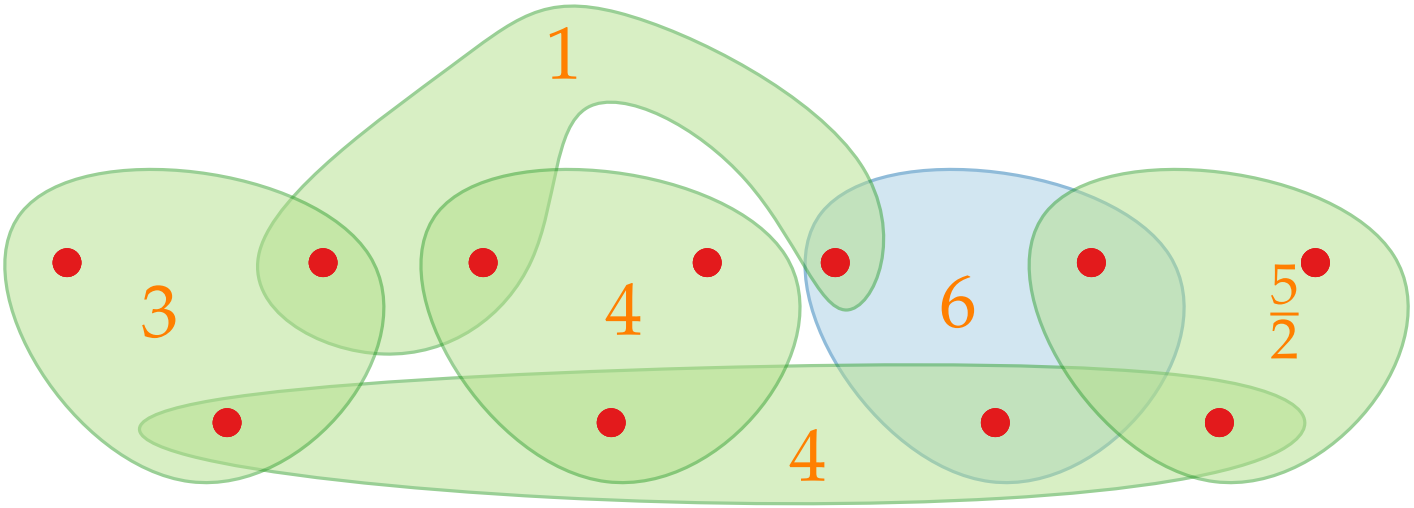
SetCover – Formulierung als ILP

$$\begin{aligned} \textbf{minimize} \quad & \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S \\ \textbf{subject to} \quad & \sum_{S \ni u} x_S \geq 1 \qquad u \in U \\ & x_S \in \{0,1\} \qquad S \in \mathcal{S} \end{aligned}$$

Grundmenge U

Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$



Finde Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U mit minimalen Kosten.

SetCover – LP-Relaxierung

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimize} \quad & \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S \\
\textbf{subject to} \quad & \sum_{S \ni u} x_S \geq 1 \qquad u \in U \\
& x_S \geq 0 \qquad S \in \mathcal{S}
\end{aligned}
$$

SetCover – LP-Relaxierung

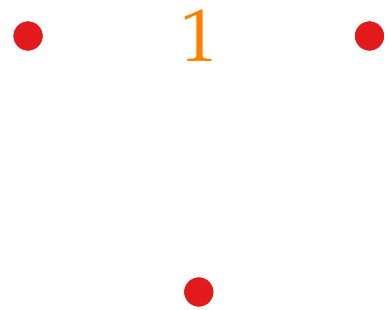
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
 & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

Optimal?

SetCover – LP-Relaxierung

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
 & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

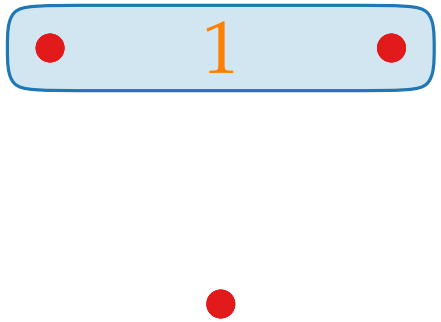
Optimal?



SetCover – LP-Relaxierung

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

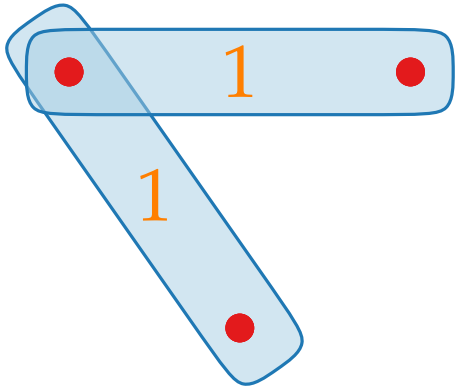
Optimal?



SetCover – LP-Relaxierung

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

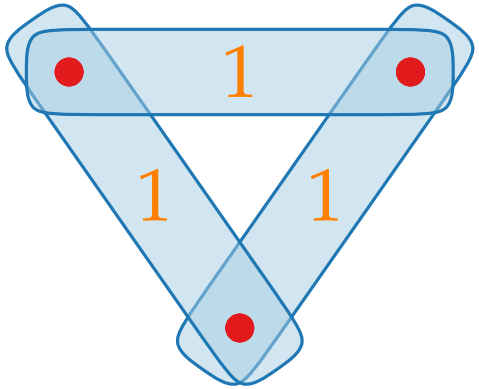
Optimal?



SetCover – LP-Relaxierung

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
 & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

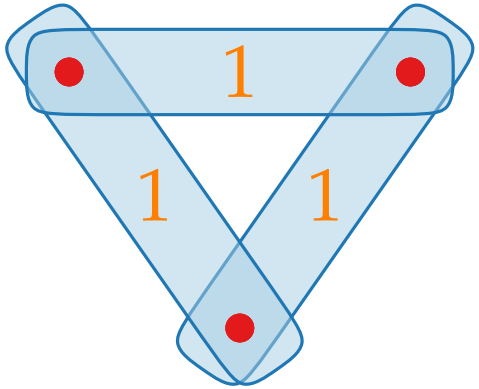
Optimal?

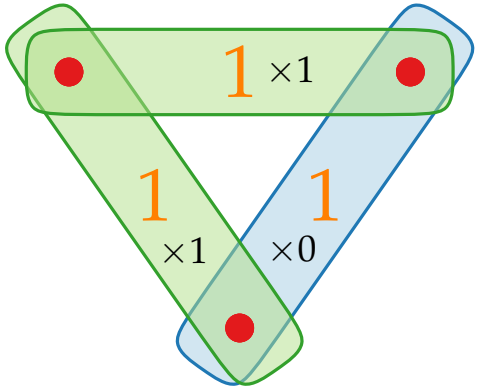


SetCover – LP-Relaxierung

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
 & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

Optimal?



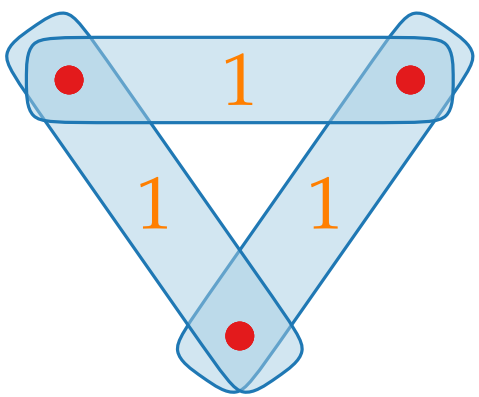


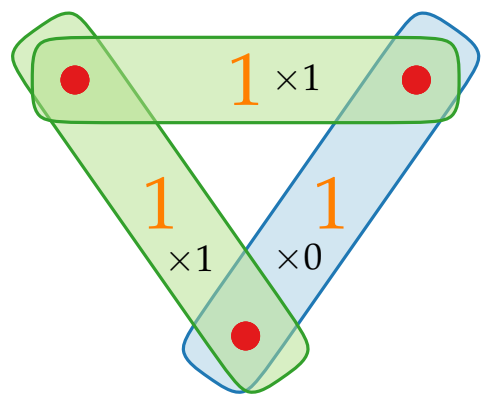
integer: 2

SetCover – LP-Relaxierung

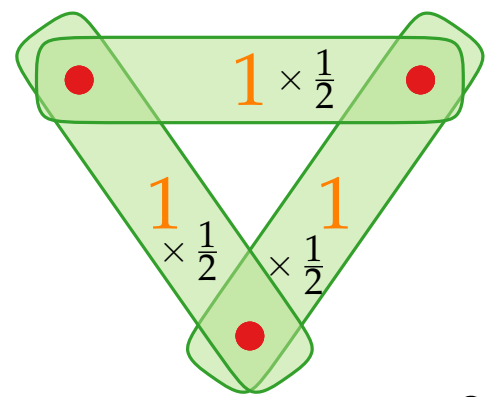
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

Optimal?





integer: 2



fractional: $\frac{3}{2}$

I) LP-Runden

LP-Runden: Ansatz I

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
 & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

LP-Runden: Ansatz I

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

LP-Runden: Ansatz I

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

LP-Runden: Ansatz I

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß

LP-Runden: Ansatz I

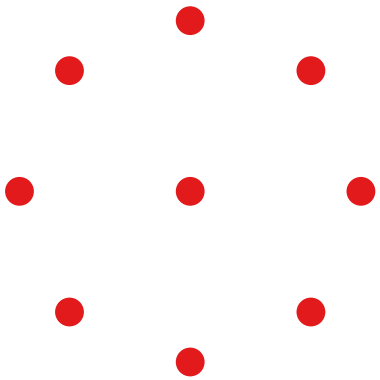
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

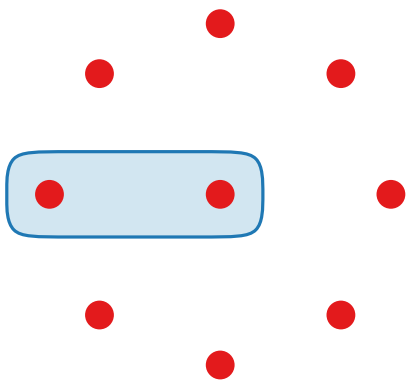
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

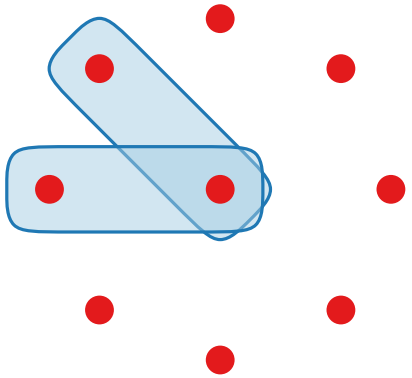
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

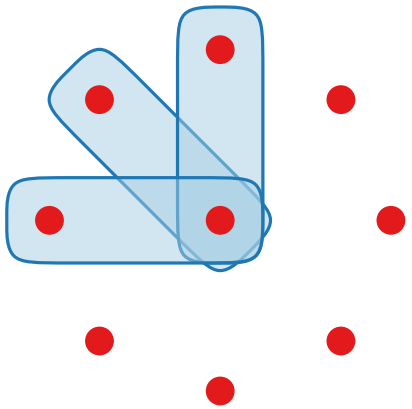
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

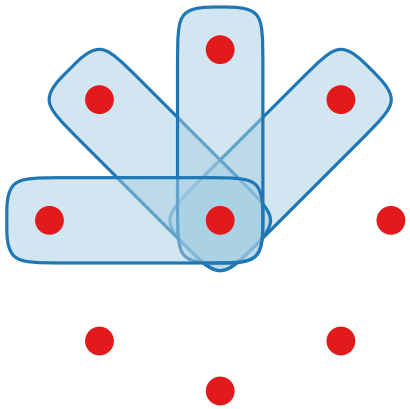
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

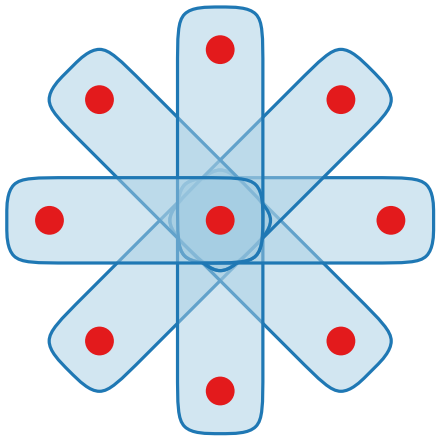
$$
\begin{aligned}
\textbf{minimize} \quad & \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S \\
\textbf{subject to} \quad & \sum_{S \ni u} x_S \geq 1 \qquad u \in U \\
& x_S \geq 0 \qquad S \in \mathcal{S}
\end{aligned}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

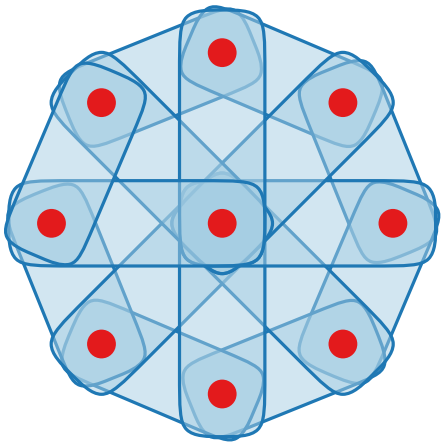
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

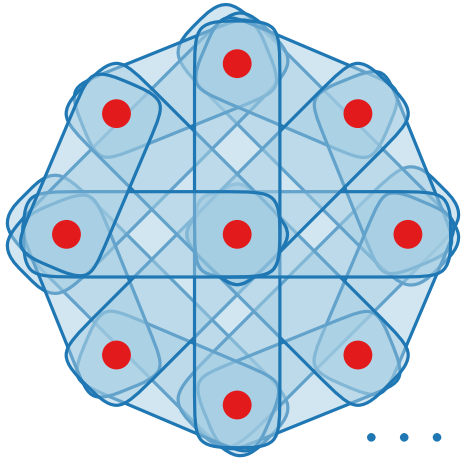
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß



LP-Runden: Ansatz I

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

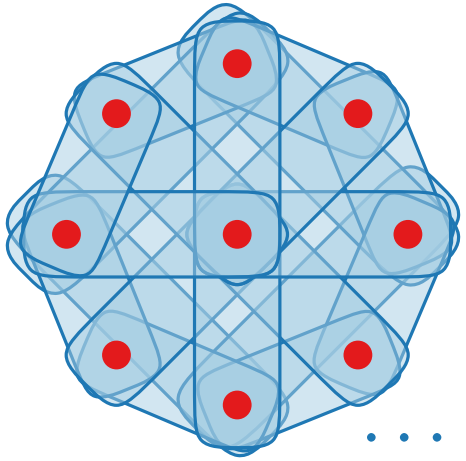
LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß

Benutze Häufigkeit h



LP-Runden: Ansatz II

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Zwei$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $\boxed{x_S \geq 1/h}$ auf 1; restliche auf 0.

LP-Runden: Ansatz II

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

LP-Runden-Zwei$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $\boxed{x_S \geq 1/h}$ auf 1; restliche auf 0.

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-h-Approximationsalgorithmus für SetCover.

II) Primal-Dual-Ansatz

Komplementärer Schlupf

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Relaxierter komplementärer Schlupf

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Relaxierter komplementärer Schlupf

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

~~**Primaler KS**~~: Relaxierter primaler KS

Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\cancel{\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j}$

$$c_j / \alpha \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$$

Dualer KS:

Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Relaxierter komplementärer Schlupf

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

~~**Primaler KS**~~: Relaxierter primaler KS

Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\cancel{\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j}$

$$c_j / \alpha \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$$

~~**Dualer KS**~~: Relaxierter dualer KS

Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\cancel{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i}$

$$b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \beta \cdot b_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

Relaxierter komplementärer Schlupf

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

~~**Primaler KS**~~: Relaxierter primaler KS

Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\cancel{\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j}$

$$c_j / \alpha \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$$

~~**Dualer KS**~~: Relaxierter dualer KS

Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\cancel{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i}$

$$b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \beta \cdot b_i$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i} \quad \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \alpha\beta \sum_{i=1}^m b_i y_i \leq \alpha\beta \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$$

Primal-Dual-Ansatz

Beginne mit zulässiger Dual- und unzulässiger Primal-Lösung (häufig trivial).

Primal-Dual-Ansatz

Beginne mit zulässiger Dual- und unzulässiger Primal-Lösung (häufig trivial).

„Verbessere“ die Zulässigkeit der Primal-Lösung…

Primal-Dual-Ansatz

Beginne mit zulässiger Dual- und unzulässiger Primal-Lösung (häufig trivial).

„Verbessere“ die Zulässigkeit der Primal-Lösung…

…und simultan den Zielwert der Dual-Lösung.

Primal-Dual-Ansatz

Beginne mit zulässiger Dual- und unzulässiger Primal-Lösung (häufig trivial).

„Verbessere“ die Zulässigkeit der Primal-Lösung…

…und simultan den Zielwert der Dual-Lösung.

Gewährleiste dabei die relaxierten KS-Bedingungen.

Primal-Dual-Ansatz

Beginne mit zulässiger Dual- und unzulässiger Primal-Lösung (häufig trivial).

„Verbessere“ die Zulässigkeit der Primal-Lösung…

…und simultan den Zielwert der Dual-Lösung.

Gewährleiste dabei die relaxierten KS-Bedingungen.

Erweitere Primal-Lösung immer nur ganzzahlig.

Primal-Dual-Ansatz

Beginne mit zulässiger Dual- und unzulässiger Primal-Lösung (häufig trivial).

„Verbessere“ die Zulässigkeit der Primal-Lösung...

...und simultan den Zielwert der Dual-Lösung.

Gewährleiste dabei die relaxierten KS-Bedingungen.

Erweitere Primal-Lösung immer nur ganzzahlig.

Zulässigkeit der Primal-Lösung und relaxierte KS-Bedingungen führen zu Approximationsgüte.

Relaxierter KS für SetCover

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize		
subject to		
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to		
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

Relaxierter KS für SetCover

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\ \textbf{subject to} & \sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\ & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

(Unrelaxierter) primaler KS:

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

wähle nur kritische Mengen

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

wähle nur kritische Mengen

Relaxierter dualer KS:

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

wähle nur kritische Mengen

Relaxierter dualer KS: $y_u \neq 0 \Rightarrow$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

wähle nur kritische Mengen

Relaxierter dualer KS: $y_u \neq 0 \Rightarrow 1 \leq \sum_{S \ni u} x_S \leq \quad \cdot 1$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

wähle nur kritische Mengen

Relaxierter dualer KS: $y_u \neq 0 \Rightarrow 1 \leq \sum_{S \ni u} x_S \leq h \cdot 1$

Relaxierter KS für SetCover

minimize	$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S$	
subject to	$\sum_{S \ni u} x_S \geq 1$	$u \in U$
	$x_S \geq 0$	$S \in \mathcal{S}$

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

wähle nur kritische Mengen

trivial für binäres x

Relaxierter dualer KS: $y_u \neq 0 \Rightarrow 1 \leq \sum_{S \ni u} x_S \leq h \cdot 1$

Primal-Dual-Schema für SetCover

PrimalDualSetCover($\mathcal{U}, \mathcal{S}, c$)

$x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$

repeat

until alle Elemente sind überdeckt.

return x

Primal-Dual-Schema für SetCover

PrimalDualSetCover($\mathcal{U}, \mathcal{S}, c$)

$x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$

repeat

Wähle ein noch unüberdecktes Element u.

until alle Elemente sind überdeckt.

return x

Primal-Dual-Schema für SetCover

PrimalDualSetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$

repeat

Wähle ein noch unüberdecktes Element u.

Erhöhe y_u, bis eine Menge S kritisch ($\sum_{u' \in S} y_{u'} = c_S$).

until alle Elemente sind überdeckt.

return x

Primal-Dual-Schema für SetCover

PrimalDualSetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$

repeat

Wähle ein noch unüberdecktes Element u.

Erhöhe y_u, bis eine Menge S kritisch ($\sum_{u' \in S} y_{u'} = c_S$).

Wähle alle kritischen Mengen und aktualisiere x.

until alle Elemente sind überdeckt.

return x

Primal-Dual-Schema für SetCover

PrimalDualSetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$

repeat

Wähle ein noch unüberdecktes Element u.

Erhöhe y_u, bis eine Menge S kritisch ($\sum_{u' \in S} y_{u'} = c_S$).

Wähle alle kritischen Mengen und aktualisiere x.

Markiere Elemente in diesen Mengen als überdeckt.

until alle Elemente sind überdeckt.

return x

Primal-Dual-Schema für SetCover

PrimalDualSetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$

repeat

Wähle ein noch unüberdecktes Element u.

Erhöhe y_u, bis eine Menge S kritisch ($\sum_{u' \in S} y_{u'} = c_S$).

Wähle alle kritischen Mengen und aktualisiere x.

Markiere Elemente in diesen Mengen als überdeckt.

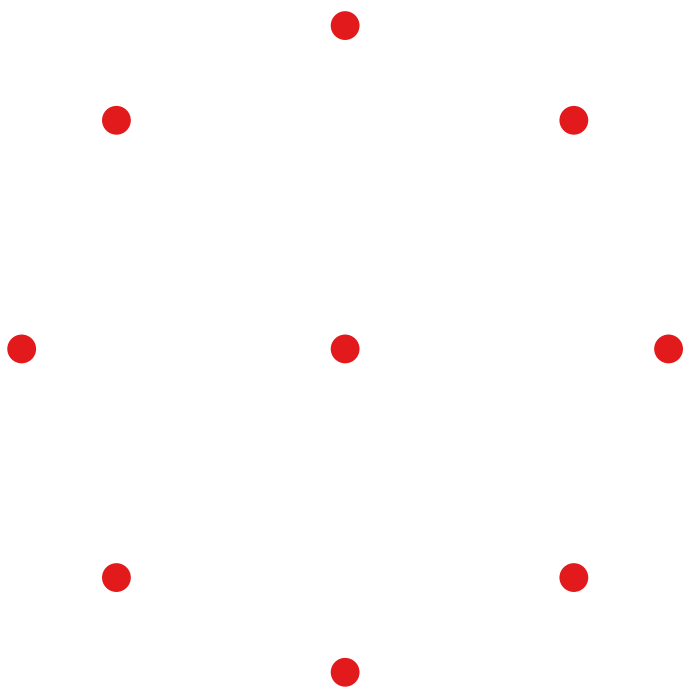
until alle Elemente sind überdeckt.

return x

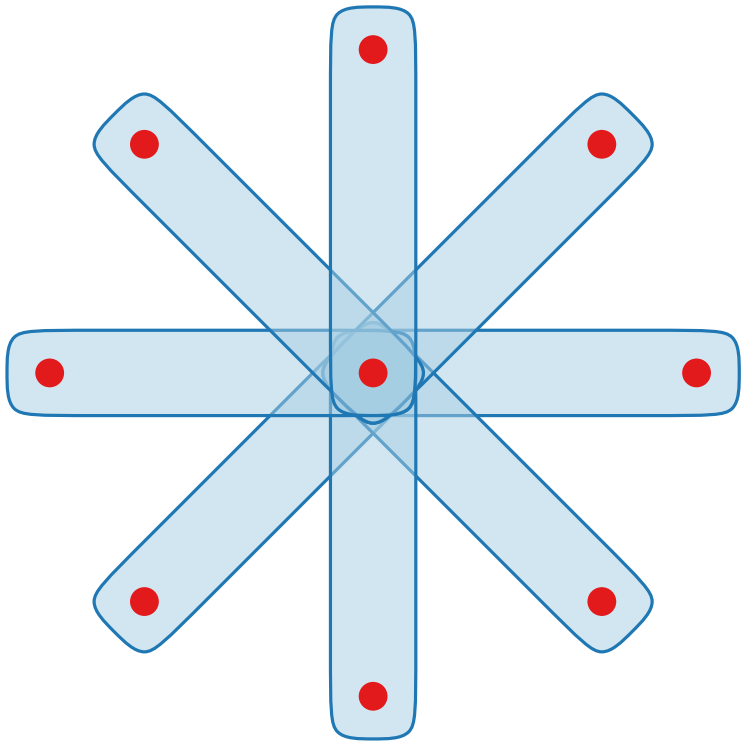
Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-h-Approximationsalgorithmus für SetCover. Diese Schranke ist scharf.

Scharfes Beispiel

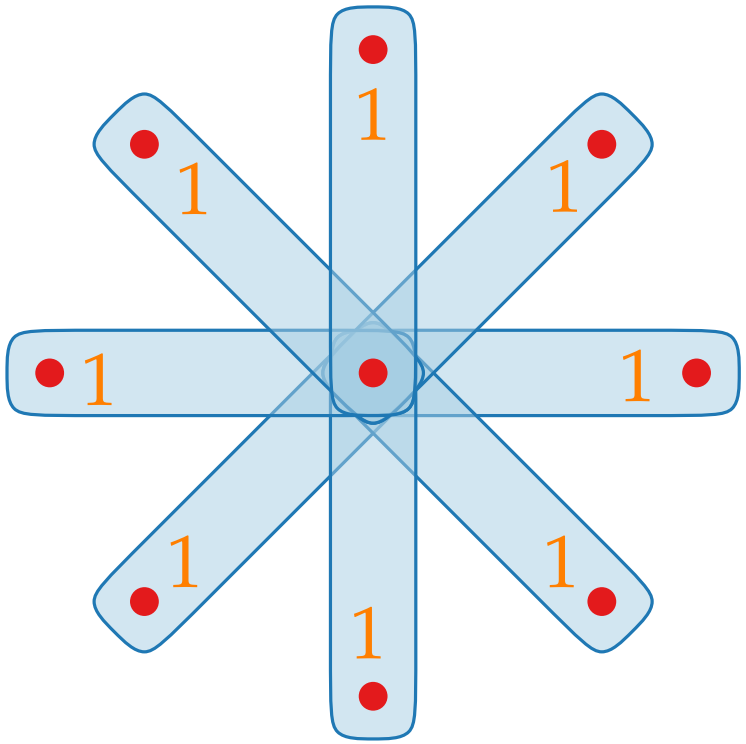
Scharfes Beispiel



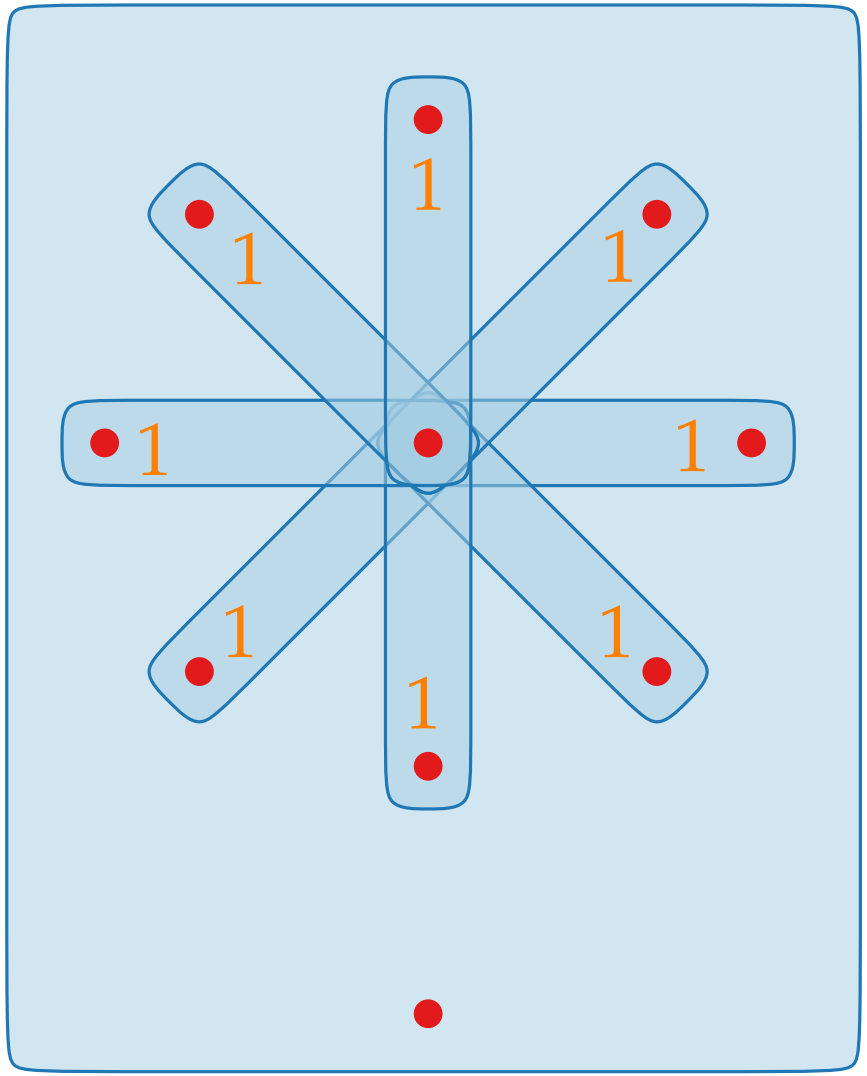
Scharfes Beispiel



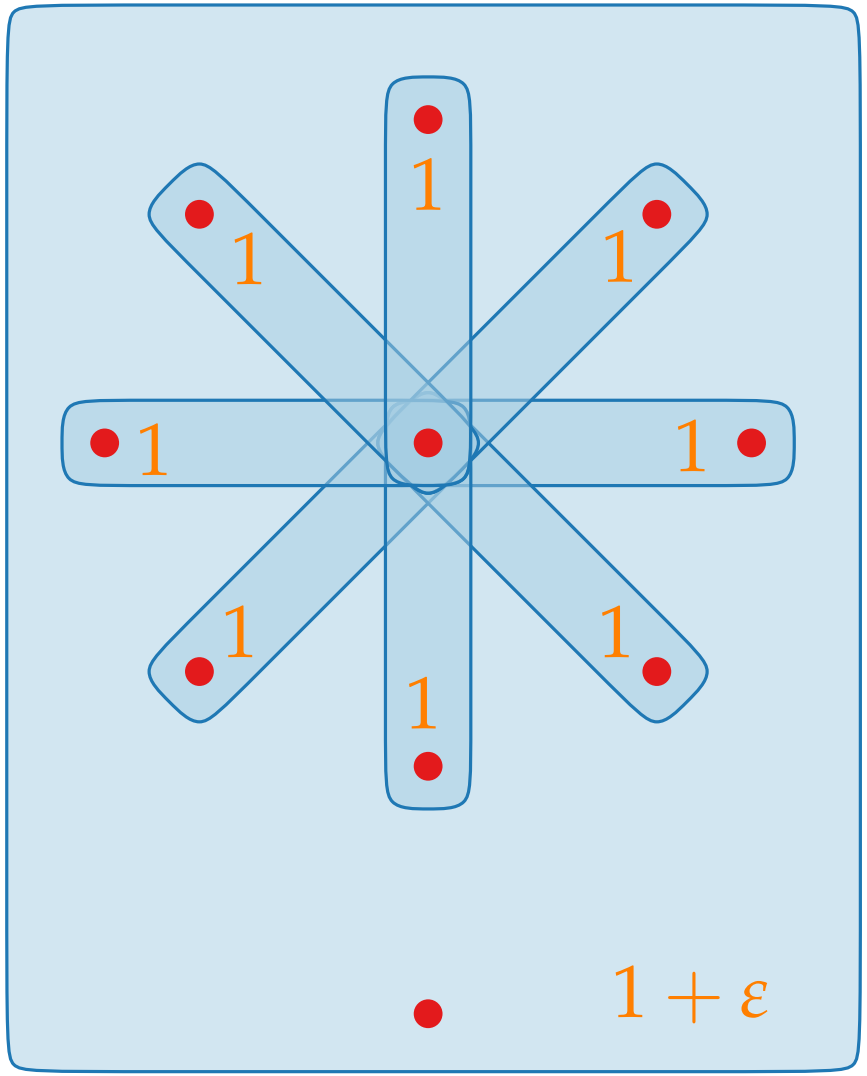
Scharfes Beispiel



Scharfes Beispiel



Scharfes Beispiel



III) Dual-Fitting

Dual Fitting für SetCover

Kombinatorischer (Greedy-) Algorithmus (s. 2. Vorlesung):

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$
$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$
while $C \neq U$ **do**
  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert
  foreach $u \in S \setminus C$ **do**
    $\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$
  $C \leftarrow C \cup S$
  $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \{S\}$
return $\mathcal{S}'$ `// Überdeckung von` U

Dual Fitting für SetCover

Kombinatorischer (Greedy-) Algorithmus (s. 2. Vorlesung):

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$
$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$
while $C \neq U$ **do**
  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert
  foreach $u \in S \setminus C$ **do**
    $\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$
  $C \leftarrow C \cup S$
  $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \{S\}$
return $\mathcal{S}'$ `// Überdeckung von` U

Zur Erinnerung: $\sum_{u \in U} \text{preis}(u) \ldots$

Dual Fitting für SetCover

Kombinatorischer (Greedy-) Algorithmus (s. 2. Vorlesung):

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$
$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$
while $C \neq U$ **do**
  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert
  foreach $u \in S \setminus C$ **do**
    $\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$
  $C \leftarrow C \cup S$
  $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \{S\}$
return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Zur Erinnerung: $\sum_{u \in U} \text{preis}(u)$ bezahlt $\mathcal{S}'$ vollständig.

Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.

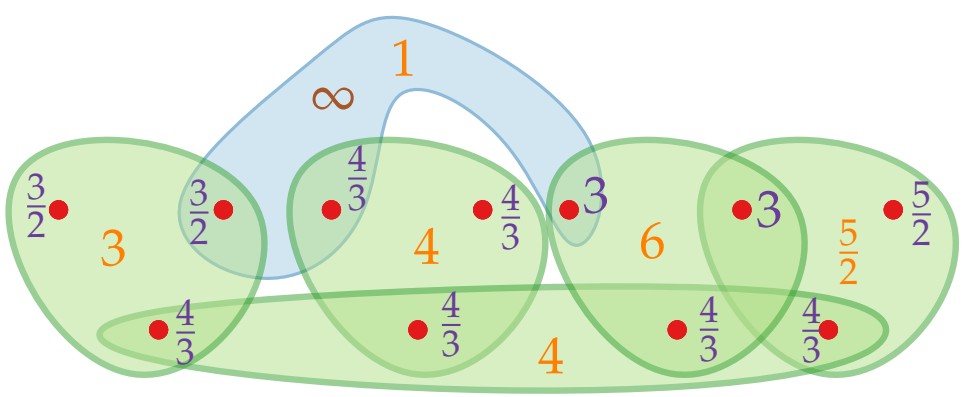
Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}}$$

Neu: LP-basierte Analyse

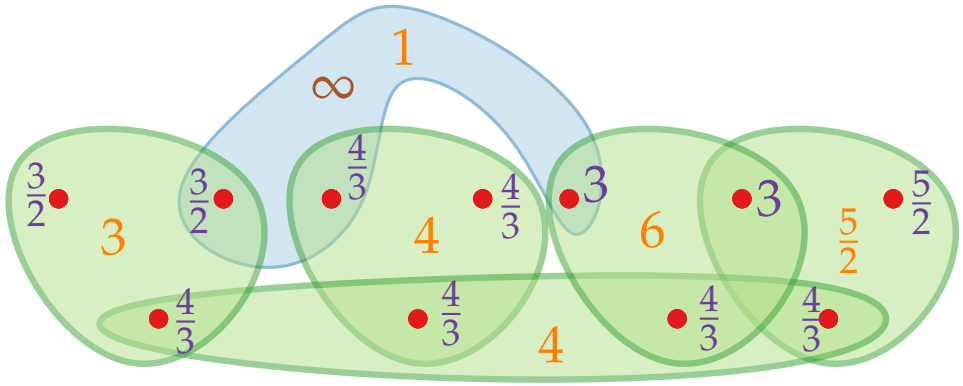
Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.



$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\
 & y_u \geq 0 & u \in U
\end{array}
$$

Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

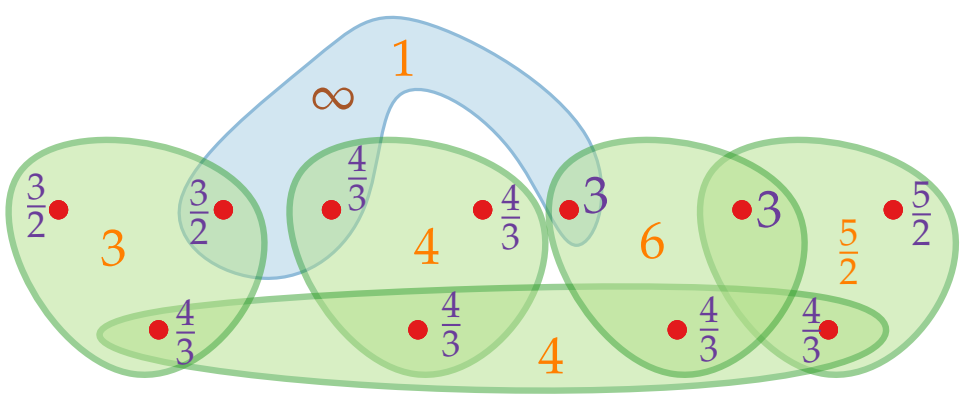


$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\
 & y_u \geq 0 & u \in U
\end{array}
$$

Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.



$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

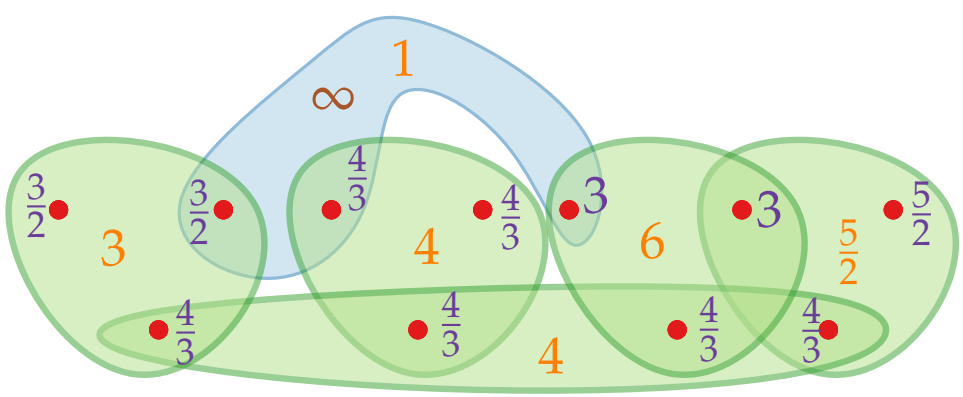
Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.

Dual-Fitting-Trick:

Skaliere duale Variable, so dass keine Menge überpackt wird.



$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Neu: LP-basierte Analyse

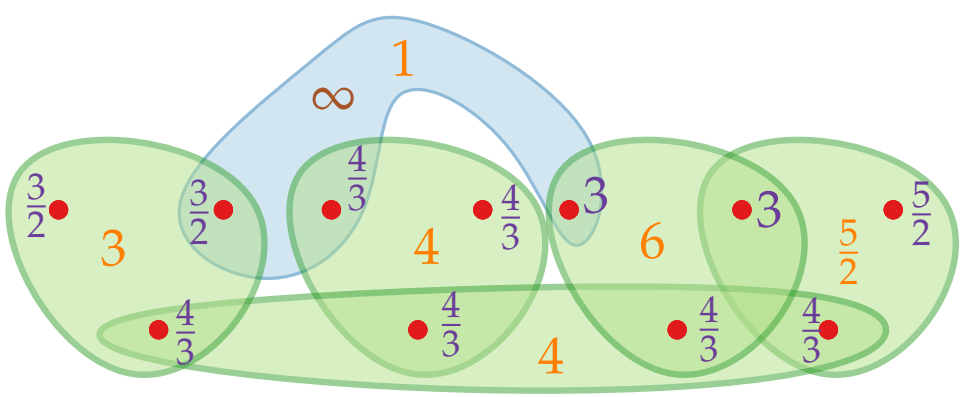
Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.

Dual-Fitting-Trick:

Skaliere duale Variable, so dass keine Menge überpackt wird.

Nimm $y_u =$



$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}}$$

Neu: LP-basierte Analyse

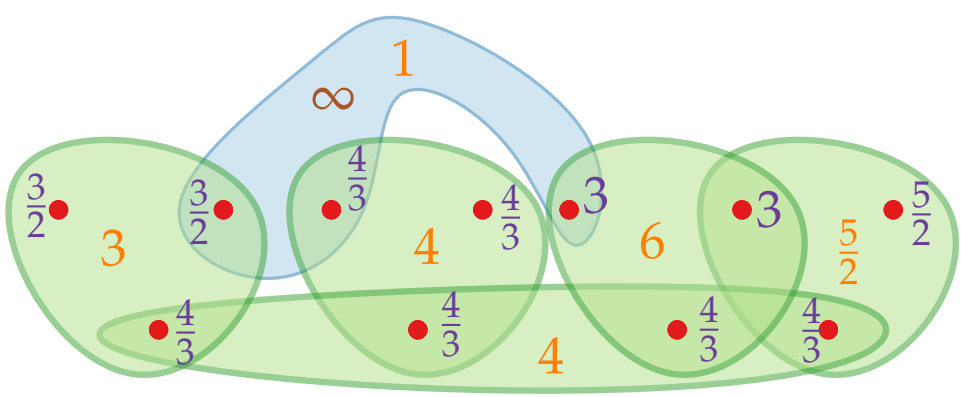
Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.

Dual-Fitting-Trick:

Skaliere duale Variable, so dass keine Menge überpackt wird.

Nimm $y_u = \text{preis}(u)/$



$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Neu: LP-basierte Analyse

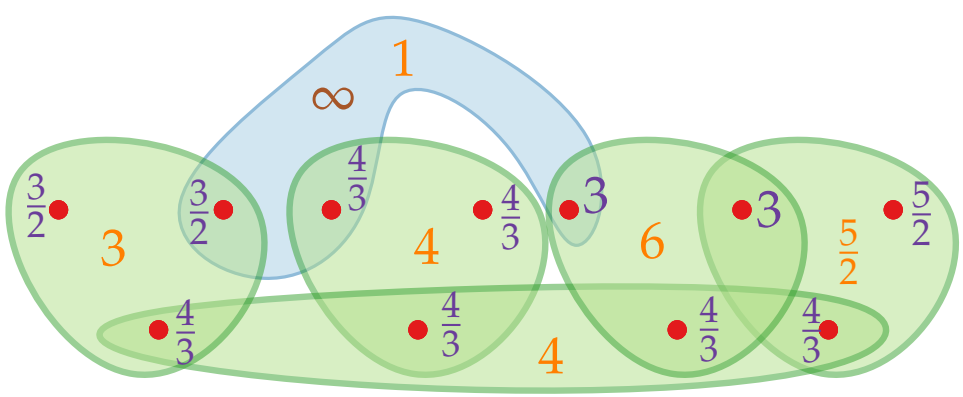
Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.

Dual-Fitting-Trick:

Skaliere duale Variable, so dass keine Menge überpackt wird.

Nimm $y_u = \text{preis}(u)/H_n$.



$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \le c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \ge 0 & u \in U \end{array}$$

Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

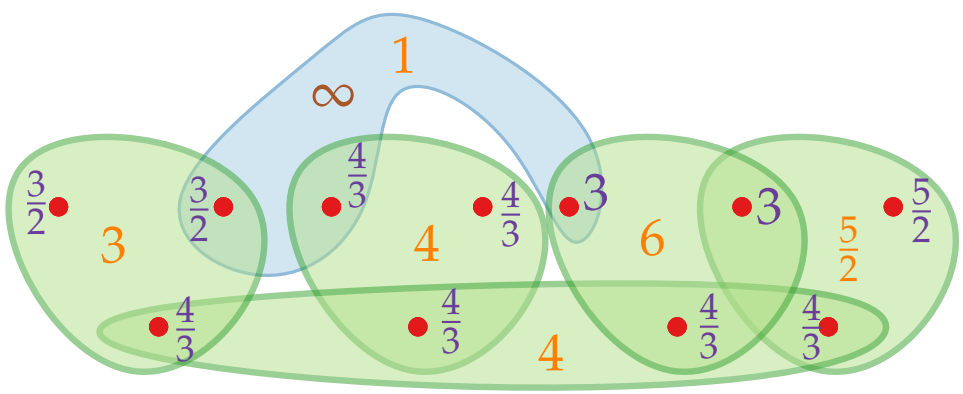
ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.

Dual-Fitting-Trick:

Skaliere duale Variable, so dass keine Menge überpackt wird.

Nimm $y_u = \text{preis}(u)/H_n$.

Der Greedy-Alg. benutzt *diese* dualen Variablen als untere Schranke für OPT.



$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\text{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.

Dual-Fitting-Trick:

Skaliere duale Variable, so dass keine Menge überpackt wird.

Nimm $y_u = \text{preis}(u)/H_n$.

Der Greedy-Alg. benutzt *diese* dualen Variablen als untere Schranke für OPT.

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis.

Lemma.

Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.
Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$\Rightarrow y_{u_i} \leq$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1}$$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} y_{u_i} \leq$$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \Big(\qquad \Big)$$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{1}\right)$$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{1}\right)}$$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{1}\right)}^{H_k}$$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \ldots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.
Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.
Also ist $\text{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{1}\right)}^{H_k} \leq c(S)$$

$\square$

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

Resultat von Dual Fitting

Satz. Der Approximationsfaktor von GreedySetCover ist H_n, wobei $n = |U|$.

Resultat von Dual Fitting

Satz. Der Approximationsfaktor von GreedySetCover ist H_n, wobei $n = |U|$.

Beweis. $\text{ALG} = c(\mathcal{S}') \leq$

Resultat von Dual Fitting

Satz. Der Approximationsfaktor von GreedySetCover ist H_n, wobei $n = |U|$.

Beweis. $\text{ALG} = c(\mathcal{S}') \leq \sum_{u \in U} \text{price}(u) =$

Resultat von Dual Fitting

Satz. Der Approximationsfaktor von GreedySetCover ist H_n, wobei $n = |U|$.

Beweis. $\text{ALG} = c(\mathcal{S}') \leq \sum_{u \in U} \text{price}(u) = H_n \cdot \sum_{u \in U} y_u \leq$

Resultat von Dual Fitting

Satz. Der Approximationsfaktor von GreedySetCover ist H_n, wobei $n = |U|$.

Beweis. $\mathrm{ALG} = c(\mathcal{S}') \leq \sum_{u \in U} \mathrm{price}(u) = H_n \cdot \sum_{u \in U} y_u \leq$

$$\leq H_n \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{relax}}$$

Resultat von Dual Fitting

Satz. Der Approximationsfaktor von GreedySetCover ist H_n, wobei $n = |U|$.

Beweis. $$\begin{aligned} \mathrm{ALG} = c(\mathcal{S}') \leq \sum_{u \in U} \mathrm{price}(u) &= H_n \cdot \sum_{u \in U} y_u \leq \\ &\leq H_n \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{relax}} \\ &\leq H_n \cdot \mathrm{OPT} \end{aligned}$$ $\square$