Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

SetCover via LP-Runden, via Primal-Dual-Schema und via Dual Fitting

5. Vorlesung

Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

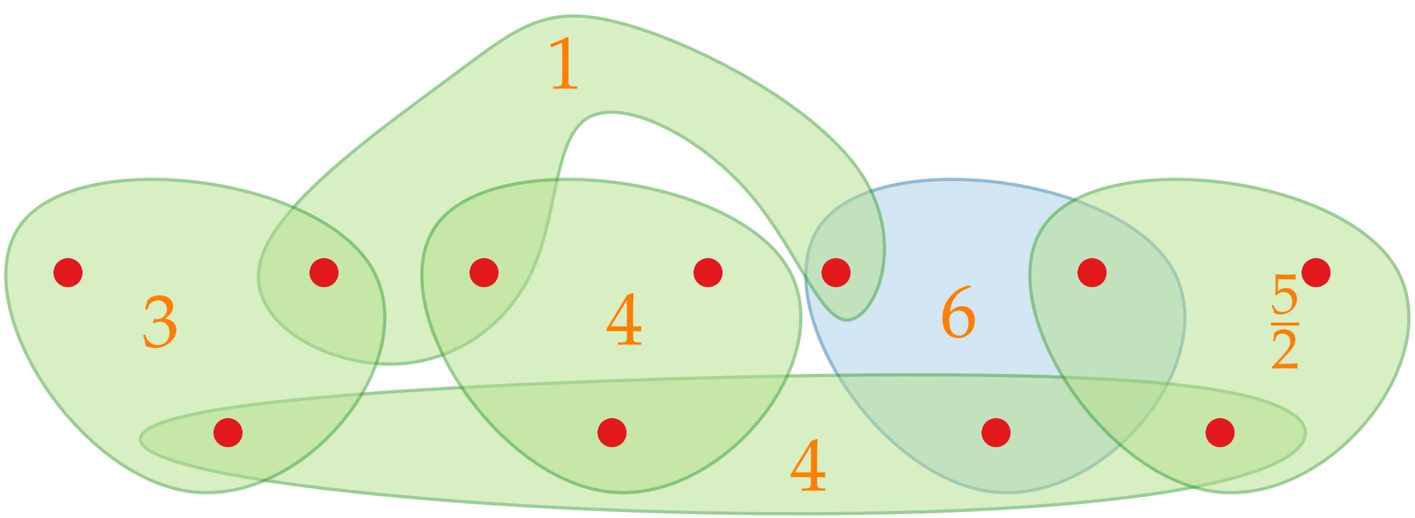
SetCover – Formulierung als ILP

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\
\textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\
& x_S \in \{0,1\} & S \in \mathcal{S}
\end{array}
$$

Grundmenge U

Familie $\mathcal{S} \subseteq 2^U$ mit $\bigcup \mathcal{S} = U$

Kosten $c\colon \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^+$

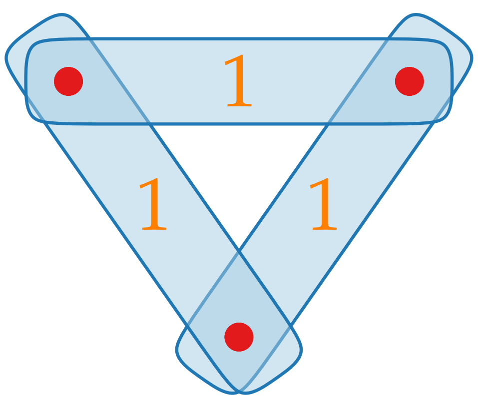


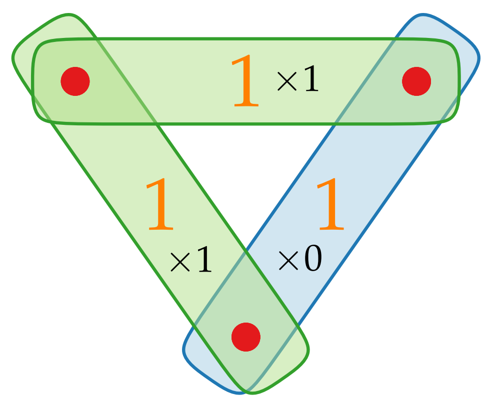
Finde Überdeckung $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U mit minimalen Kosten.

SetCover – LP-Relaxierung

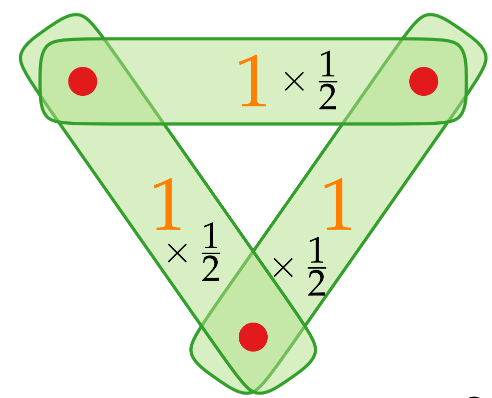
$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\ & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S} \end{array}$$

Optimal?





integer: 2



fractional: $\frac{3}{2}$

I) LP-Runden

LP-Runden: Ansatz I

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\ & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S} \end{array}$$

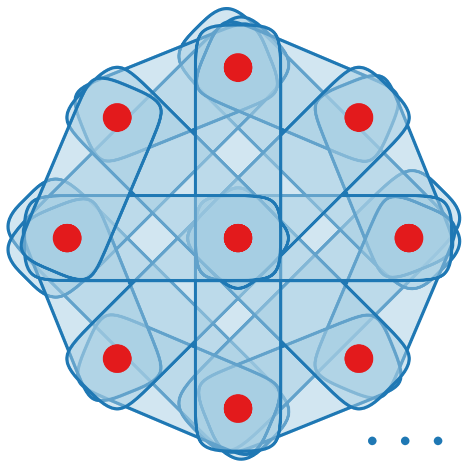
LP-Runden-Eins$(U, \mathcal{S}, c)$

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $x_S > 0$ auf 1.

Generiert zulässige Lösung

Skalierungsfaktor beliebig groß

Benutze Häufigkeit h



LP-Runden: Ansatz II

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\ \textbf{subject to} & \sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\ & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S} \end{array}$$

LP-Runden-Zwei($U, \mathcal{S}, c$)

Ermittle optimale Lösung x für LP-Relaxierung.
Runde jedes x_S mit $\boxed{x_S \geq 1/h}$ auf 1; restliche auf 0.

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-h-Approximationsalgorithmus für SetCover.

II) Primal-Dual-Ansatz

Komplementärer Schlupf

minimize	$c^\intercal x$		
subject to	Ax	$\geq$	b
	x	$\geq$	0

maximize	$b^\intercal y$		
subject to	$A^\intercal y$	$\leq$	c
	y	$\geq$	0

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Relaxierter komplementärer Schlupf

$$\begin{array}{llll} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

~~**Primaler KS**~~: Relaxierter primaler KS

Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\cancel{\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j}$

$$c_j / \alpha \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$$

~~**Dualer KS**~~: Relaxierter dualer KS

Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\cancel{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i}$

$$b_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \beta \cdot b_i$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i} \qquad \Rightarrow \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \alpha\beta \sum_{i=1}^m b_i y_i \leq \alpha\beta \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}}$$

Primal-Dual-Ansatz

Beginne mit zulässiger Dual- und unzulässiger Primal-Lösung (häufig trivial).

„Verbessere“ die Zulässigkeit der Primal-Lösung…

…und simultan den Zielwert der Dual-Lösung.

Gewährleiste dabei die relaxierten KS-Bedingungen.

Erweitere Primal-Lösung immer nur ganzzahlig.

Zulässigkeit der Primal-Lösung und relaxierte KS-Bedingungen führen zu Approximationsgüte.

Relaxierter KS für SetCover

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S x_S & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \geq 1 & u \in U \\ & x_S \geq 0 & S \in \mathcal{S} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \displaystyle\sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \displaystyle\sum_{u \in S} y_u \leq c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \geq 0 & u \in U \end{array}$$

kritische Menge

(Unrelaxierter) primaler KS: $x_S \neq 0 \Rightarrow \sum_{u \in S} y_u = c_S$

wähle nur kritische Mengen

trivial für binäres x

Relaxierter dualer KS: $y_u \neq 0 \Rightarrow 1 \leq \displaystyle\sum_{S \ni u} x_S \leq h \cdot 1$

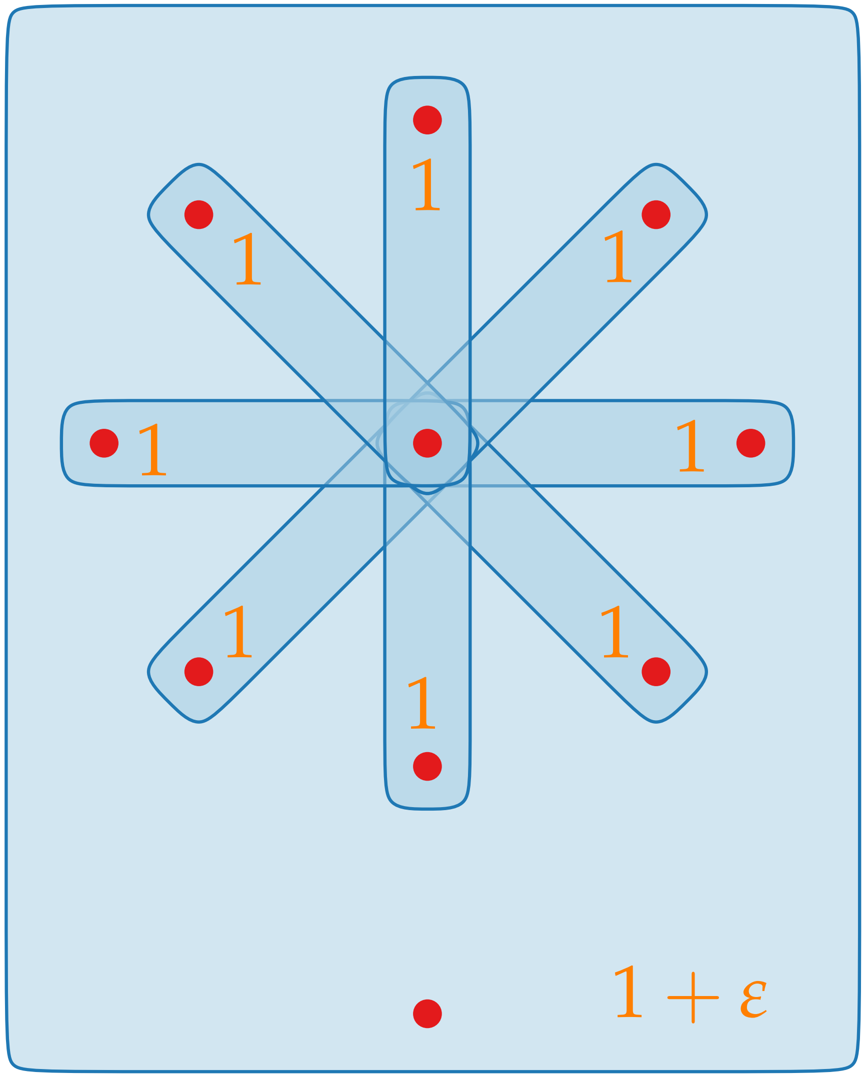
Primal-Dual-Schema für SetCover

PrimalDualSetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$
repeat
   Wähle ein noch unüberdecktes Element u.
   Erhöhe y_u, bis eine Menge S kritisch ($\sum_{u' \in S} y_{u'} = c_S$).
   Wähle alle kritischen Mengen und aktualisiere x.
   Markiere Elemente in diesen Mengen als überdeckt.
until alle Elemente sind überdeckt.
return x

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-h-Approximationsalgorithmus für SetCover. Diese Schranke ist scharf.

Scharfes Beispiel



III) Dual-Fitting

Dual Fitting für SetCover

Kombinatorischer (Greedy-) Algorithmus (s. 2. Vorlesung):

GreedySetCover$(U, \mathcal{S}, c)$

- $C \leftarrow \emptyset$
- $\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$
- **while** $C \neq U$ **do**
  - $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert
  - **foreach** $u \in S \setminus C$ **do**
    - $\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$
  - $C \leftarrow C \cup S$
  - $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \{S\}$
- **return** $\mathcal{S}'$ `// Überdeckung von` U

Zur Erinnerung: $\sum_{u \in U} \text{preis}(u)$ bezahlt $\mathcal{S}'$ vollständig.

Neu: LP-basierte Analyse

Beob. Für jedes $u \in U$ ist $\mathrm{preis}(u)$ eine duale Variable.
Aber diese duale Lösung ist i.A. nicht zulässig.

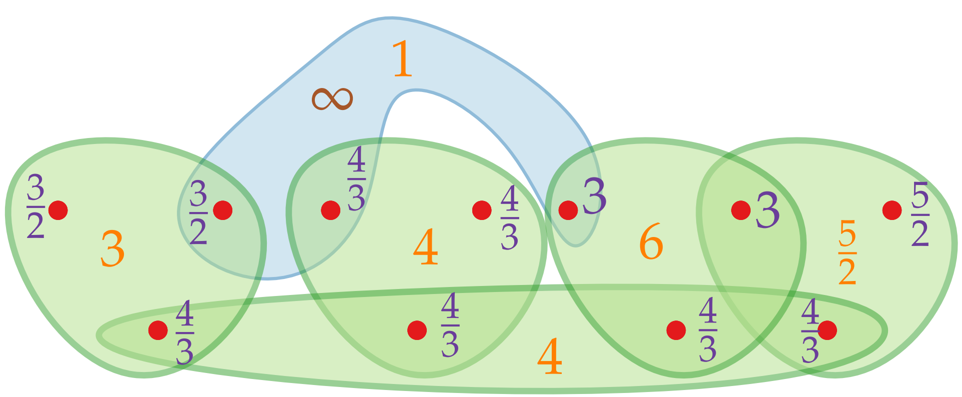
ÜA: Konstruiere Instanz, wo manche S um den Faktor $\approx H_{|S|}$ überpackt werden.

Dual-Fitting-Trick:

Skaliere duale Variable, so dass keine Menge überpackt wird.

Nimm $y_u = \mathrm{preis}(u) / H_n$.

Der Greedy-Alg. benutzt *diese* dualen Variablen als untere Schranke für OPT.



$$\boxed{\begin{array}{lll} \textbf{maximize} & \sum_{u \in U} y_u & \\ \textbf{subject to} & \sum_{u \in S} y_u \le c_S & S \in \mathcal{S} \\ & y_u \ge 0 & u \in U \end{array}}$$

Beweis. Zu zeigen: Keine Menge wird durch y überpackt.
Sei $S \in \mathcal{S}$ und $k = |S|$.

Seien $u_1, \dots, u_k$ die Elemente von S –
in der Reihenfolge, in der Greedy sie überdeckt.

Betrachte Iteration, in der u_i überdeckt wird.

Davor sind $\geq k - i + 1$ Elem. von S unüberdeckt.

Also ist $\mathrm{preis}(u_i) \leq c(S)/(k - i + 1)$.

$$\Rightarrow y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \frac{1}{k-i+1} \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} y_{u_i} \leq \frac{c(S)}{H_n} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{1}\right)}^{H_k}$$
$$\leq c(S)$$

□

Lemma.
Der Vektor $y = (y_u)_{u \in U}$ ist zulässige Lösung für das duale LP.

maximize	$\sum_{u \in U} y_u$	
subject to	$\sum_{u \in S} y_u \leq c_S$	$S \in \mathcal{S}$
	$y_u \geq 0$	$u \in U$

Resultat von Dual Fitting

Satz. Der Approximationsfaktor von GreedySetCover ist H_n, wobei $n = |U|$.

Beweis. $$\mathrm{ALG} = c(\mathcal{S}') \leq \sum_{u \in U} \mathrm{price}(u) = H_n \cdot \sum_{u \in U} y_u \leq$$

$$\leq H_n \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{relax}}$$

$$\leq H_n \cdot \mathrm{OPT} \qquad \square$$