Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

Lineare Programmierung
und
LP-Dualität

4. Vorlesung

Philipp Kindermann

Wintersemester 2019/20

Einführung Lineare Programmierung

Ein Großteil bekannter Approximationsalgorithmen basiert auf linearer Programmierung.

- Lineare Programmierung (LP) und LP-Dualität
- Min-Max-Beziehungen
- Techniken LP-basierten Algorithmendesigns

Einführung Lineare Programmierung

Ein Großteil bekannter Approximationsalgorithmen basiert auf linearer Programmierung.

- Lineare Programmierung (LP) und LP-Dualität
- Min-Max-Beziehungen
- Techniken LP-basierten Algorithmendesigns

Motivation: Obere und untere Schranken

Betrachte schweres NP-Minimierungsproblem.

Motivation: Obere und untere Schranken

Betrachte schweres NP-Minimierungsproblem.

Entscheidungsproblem:
Ist gegebenes S **obere Schranke** für OPT?

Motivation: Obere und untere Schranken

Betrachte schweres NP-Minimierungsproblem.

Entscheidungsproblem:
Ist gegebenes S **obere Schranke** für OPT?

Leicht verifizierbare „Ja“-Zertifikate (nach Def. von NP)

Motivation: Obere und untere Schranken

Betrachte schweres NP-Minimierungsproblem.

Entscheidungsproblem:
Ist gegebenes S **obere Schranke** für OPT?

Leicht verifizierbare „Ja“-Zertifikate (nach Def. von NP)

Untere Schranken / „Nein“-Zertifikate?

Motivation: Obere und untere Schranken

Betrachte schweres NP-Minimierungsproblem.

Entscheidungsproblem:
Ist gegebenes S **obere Schranke** für OPT?

Leicht verifizierbare „Ja“-Zertifikate (nach Def. von NP)

Untere Schranken / „Nein“-Zertifikate?
$\rightsquigarrow$ wahrscheinlich nicht! (Vermutung: NP $\neq$ coNP)

Motivation: Obere und untere Schranken

Betrachte schweres NP-Minimierungsproblem.

Entscheidungsproblem:
Ist gegebenes S **obere Schranke** für OPT?

Leicht verifizierbare „Ja“-Zertifikate (nach Def. von NP)

Untere Schranken / „Nein“-Zertifikate?
$\rightsquigarrow$ wahrscheinlich nicht! (Vermutung: NP $\neq$ coNP)

Brauchen untere Schranken $\mathrm{obj}(S) \geq \mathrm{OPT}/\alpha$
(approximative „Nein“-Zertifikate) für
Approximationsalgorithmen!

Motivation: Obere und untere Schranken

Betrachte schweres NP-Minimierungsproblem.

Entscheidungsproblem:
Ist gegebenes S **obere Schranke** für OPT?

Leicht verifizierbare „Ja“-Zertifikate (nach Def. von NP)

Untere Schranken / „Nein“-Zertifikate?
$\rightsquigarrow$ wahrscheinlich nicht! (Vermutung: NP $\neq$ coNP)

Brauchen untere Schranken $\mathrm{obj}(S) \geq \mathrm{OPT}/\alpha$
(approximative „Nein“-Zertifikate) für
Approximationsalgorithmen!

Beispiele

- Vertex Cover: Untere Schranke durch Matchings
- TSP: Untere Schranke durch MST oder Cycle Cover

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

Standardform (ÜA)

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\textbf{minimize} \quad c^\top x$$

Standardform (ÜA)

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & c^\top x & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq \; b \end{array}$$

Standardform (ÜA)

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\begin{array}{rrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \text{Standardform (ÜA)} \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \text{Standardform (ÜA)} \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Beispiel. $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \text{Standardform (ÜA)} \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Beispiel. $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\textbf{minimize} \quad 7x_1 + x_2 + 5x_3$$

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \text{Standardform (ÜA)} \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Beispiel. $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\ \textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \end{array}$$

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \text{Standardform (ÜA)} \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Beispiel. $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\ \textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \end{array}$$

Lineare Programmierung

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \text{Standardform (ÜA)} \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Beispiel. $c = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\ \textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 1010 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 10 10 \\
 & 5x_1 10 & + & 2x_2 2 & - & x_3 3 & \geq & 6 9 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 14 + & & x_2 & + & 5x_3 & & 30 \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 10 10 \\
 & 5x_1 10 + & & 2x_2 2 & - & x_3 3 & \geq & 6 9 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 14 + & & x_2 1 & + & 5x_3 & & 30 \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 10 10 \\
 & 5x_1 10 + & & 2x_2 2 & - & x_3 3 & \geq & 6 9 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 14 & + & x_2 1 & + & 5x_3 15 & & 30 \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 10 10 \\
 & 5x_1 10 & + & 2x_2 2 & - & x_3 3 & \geq & 6 9 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 14 & + & x_2 1 & + & 5x_3 15 & = & 30 \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 10 10 \\
 & 5x_1 10 & + & 2x_2 2 & - & x_3 3 & \geq & 6 9 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

Lin. Progr. – Obere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 14 + & & x_2 1 & + & 5x_3 15 & = & 30 \\
\textbf{subject to} & x_1 2 & - & x_2 1 & + & 3x_3 9 & \geq & 10 10 \\
 & 5x_1 10 + & & 2x_2 2 & - & x_3 3 & \geq & 6 9 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Zulässige Lösung?

$x = (2, 1, 3)$

$\Rightarrow \text{obj}(x) = 30$ ist obere Schranke für OPT

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & \overset{\geq}{x_1} & - & \overset{\geq}{x_2} & + & \overset{\geq}{3x_3} & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \Rightarrow \text{OPT} \geq 10$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \Rightarrow \text{OPT} \geq 10$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \Rightarrow \text{OPT} \geq 10$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \Rightarrow \text{OPT} \geq 10$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq (x_1 - x_2 + 3x_3) + (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq 10 + 6
\end{aligned}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Optimiere (d.h. minimiere oder maximiere) eine lineare Funktion unter Anwesenheit linearer Ungleichungsbedingungen.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\
 & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \Rightarrow \text{OPT} \geq 10$$

$$\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq (x_1 - x_2 + 3x_3) + (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq 10 + 6 \qquad \Rightarrow \text{OPT} \geq 16
\end{aligned}$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcrcr} \textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\ \textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq (x_1 - x_2 + 3x_3) + (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\ &\geq 10 + 6 \qquad \Rightarrow \text{OPT} \geq 16 \end{aligned}$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcrcr} \textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\ \textbf{subject to} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 10 \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq 1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + 1 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\ &\geq 1 \cdot 10 + 1 \cdot 6 \quad \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 1 \cdot 16 \end{aligned}$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$\boxed{\begin{array}{lrcrcrcr} \textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\ \textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\ & 5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq & 6 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq 1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + 1 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\ &\geq 1 \cdot 10 + 1 \cdot 6 \quad \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 1 \cdot 16 \end{aligned}$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq 1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + 1 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq 1 \cdot 10 + 1 \cdot 6 \quad \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 1 \cdot 16
\end{aligned}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

$10y_1 + 6y_2$ ist untere Schranke für OPT

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$\boxed{\begin{array}{rrcrcrcr} \textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\ \textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\ & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\ & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\ &\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2 \end{aligned}$$

Schranken für y_1, y_2:

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Schranken für y_1, y_2:

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

$$y_1 + 5y_2 \leq 7$$

Schranken für y_1, y_2:

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Schranken für y_1, y_2:

$$
\begin{array}{rcrcr}
y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
-y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Schranken für y_1, y_2:

$$
\begin{array}{rcrcr}
y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
-y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
3y_1 & - & y_2 & \leq & 5
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Schranken für y_1, y_2:

$$
\begin{array}{rcrcr}
y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
-y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
3y_1 & - & y_2 & \leq & 5 \\
 & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\textbf{maximize} & 10y_1 & + & 6y_2 & & \\
\textbf{subject to} & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
 & 3y_1 & - & y_2 & \leq & 5 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
\quad \text{Primal}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \text{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\textbf{maximize} & 10y_1 & + & 6y_2 & & \\
\textbf{subject to} & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
 & 3y_1 & - & y_2 & \leq & 5 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Primal

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\textbf{maximize} & 10y_1 & + & 6y_2 & & \\
\textbf{subject to} & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
 & 3y_1 & - & y_2 & \leq & 5 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Lin. Progr. – Untere Schranken

Primal

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\textbf{maximize} & 10y_1 & + & 6y_2 & & \\
\textbf{subject to} & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
 & 3y_1 & - & y_2 & \leq & 5 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Jede zulässige Lösung für das **duale** Programm liefert untere Schranke für Optimum des **primalen** Programms.

Lin. Progr. – Untere Schranken

Primal

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\textbf{maximize} & 10y_1 & + & 6y_2 & & \\
\textbf{subject to} & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
 & 3y_1 & - & y_2 & \leq & 5 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Jede zulässige Lösung für das **duale** Programm liefert untere Schranke für Optimum des **primalen** Programms.

$x = (7/4, 0, 11/4)$ und $y = (2, 1)$ liefern beide den Wert 26.

Lin. Progr. – Untere Schranken

Primal

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\textbf{minimize} & 7x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & & \\
\textbf{subject to} & y_1(x_1 & - & x_2 & + & 3x_3) & \geq & 10\,y_1 \\
 & y_2(5x_1 & + & 2x_2 & - & x_3) & \geq & 6\,y_2 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
7x_1 + x_2 + 5x_3 &\geq y_1 \cdot (x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2 \cdot (5x_1 + 2x_2 - x_3) \\
&\geq y_1 \cdot 10 + y_2 \cdot 6 \Rightarrow \mathrm{OPT} \geq 10y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\textbf{maximize} & 10y_1 & + & 6y_2 & & \\
\textbf{subject to} & y_1 & + & 5y_2 & \leq & 7 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 1 \\
 & 3y_1 & - & y_2 & \leq & 5 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Jede zulässige Lösung für das **duale** Programm liefert untere Schranke für Optimum des **primalen** Programms.

$x = (7/4, 0, 11/4)$ und $y = (2, 1)$ liefern beide den Wert $26 = \mathrm{OPT}$.

Primal – Dual

Primales Programm

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{minimize} & c^\top x & & \\
\textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Primal – Dual

Primales Programm

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Duales Programm

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Primal – Dual

Primales Programm

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Duales Programm

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Duales Programm des Dualen Programmes

Primal – Dual

Primales Programm

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Duales Programm

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Duales Programm des Dualen Programmes

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

LP-Dualität

Primal

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

LP-Dualität

Primal

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Das primale Programm hat ein endliches Optimum $\Leftrightarrow$ das duale Programm hat ein endliches Optimum.

LP-Dualität

Primal

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Das primale Programm hat ein endliches Optimum $\Leftrightarrow$ das duale Programm hat ein endliches Optimum. Sind dann $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ und $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *optimale* Lösungen für das primale bzw. duale Programm, so gilt

LP-Dualität

Primal

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\intercal x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\intercal y & & \\ \textbf{subject to} & A^\intercal y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Das primale Programm hat ein endliches Optimum $\Leftrightarrow$ das duale Programm hat ein endliches Optimum. Sind dann $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ und $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ *optimale* Lösungen für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* .$$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq$$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \geq$$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & \boxed{A^\top y \quad \leq \quad c} \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \geq$$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & \boxed{x} & \boxed{\geq} & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & \boxed{A^\top y} & \boxed{\leq} & \boxed{c} \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \geq$$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & \boxed{x} & \boxed{\geq} & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & \boxed{A^\top y} & \boxed{\leq} & \boxed{c} \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right)} x_j =$$

$\geq$

Schwache LP-Dualität

minimize	$c^\top x$		
subject to	Ax	$\geq$	b
	x	$\geq$	0

maximize	$b^\top y$		
subject to	$A^\top y$	$\leq$	c
	y	$\geq$	0

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \geq$$

$\geq$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & \boxed{x} & \boxed{\geq} & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & \boxed{A^\top y} & \boxed{\leq} & \boxed{c} \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \overset{\geq}{\geq} \sum_{j=1}^{n} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^{m} \boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)} y_i \geq$$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^{m} \boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)} y_i \geq$$

$\geq$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^{m} \boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)} y_i \geq$$

$\geq$

Schwache LP-Dualität

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ *zulässige* Lsg. für das primale bzw. duale Programm, so gilt

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,.$$

Beweis.

$$\sum_{j=1}^{n} \boxed{c_j} x_j \overset{\geq}{\geq} \sum_{j=1}^{n} \boxed{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^{m} \boxed{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)} y_i \overset{\geq}{\geq} \sum_{i=1}^{m} \boxed{b_i} y_i \,.$$

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm.

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Beweis.

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$

Beweis. Folgt aus LP-Dualität:

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$

Beweis. Folgt aus LP-Dualität:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \,.$$

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & \boxed{x} & \boxed{\geq} & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{maximize} & b^\top y & & \\ \textbf{subject to} & \boxed{A^\top y} & \boxed{\leq} & \boxed{c} \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$

Beweis. Folgt aus LP-Dualität:

$$\sum_{j=1}^n \boxed{c_j} x_j \geq \sum_{j=1}^n \boxed{\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) y_i \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \,.$$

$=$

Komplementärer Schlupf (*complementary slackness*)

minimize	$c^\top x$		
subject to	Ax	$\geq$	b
	x	$\geq$	0

maximize	$b^\top y$		
subject to	$A^\top y$	$\leq$	c
	y	$\geq$	0

Satz. Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zulässige Lösungen für das primale bzw. duale Programm. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Primaler KS:
Für jedes $j = 1, \ldots, n$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
Für jedes $i = 1, \ldots, m$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$

Beweis. Folgt aus LP-Dualität:

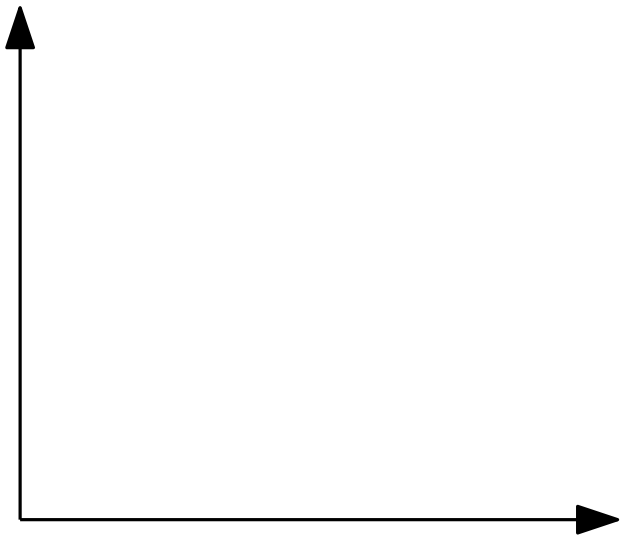
$$\sum_{j=1}^n \boxed{c_j} x_j \geq \sum_{j=1}^n \boxed{\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i\right)} x_j = \sum_{i=1}^m \boxed{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right)} y_i \geq \sum_{i=1}^m \boxed{b_i} y_i \,.$$

LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).

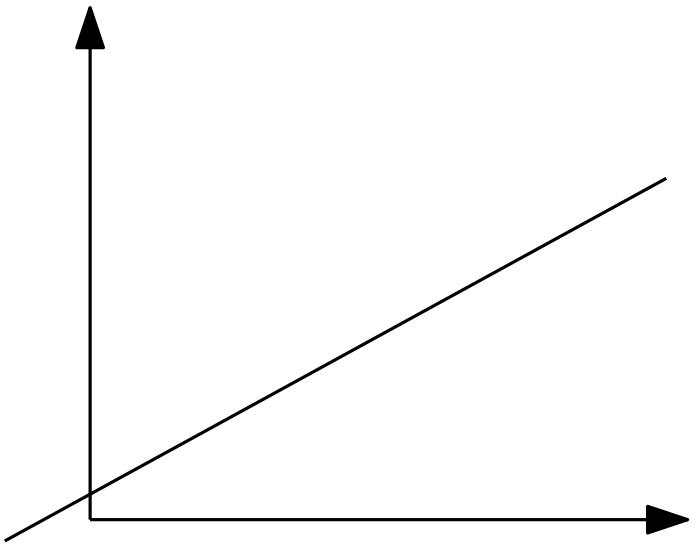
LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



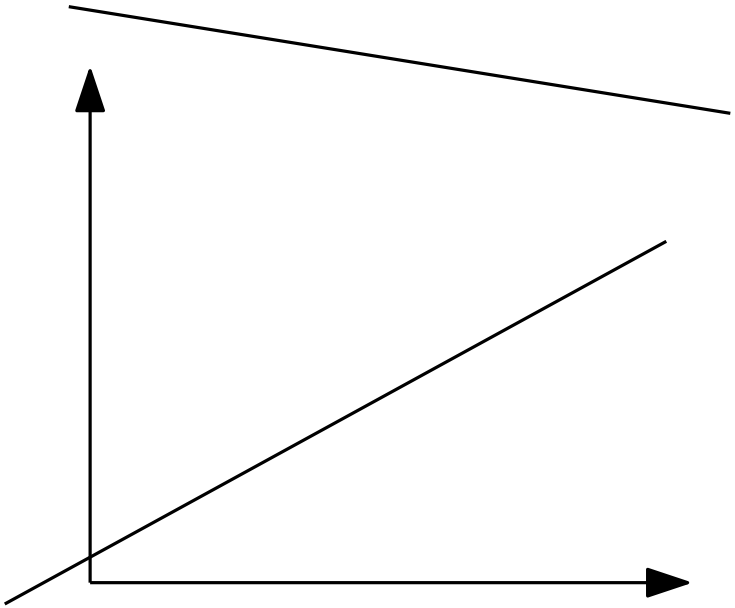
LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



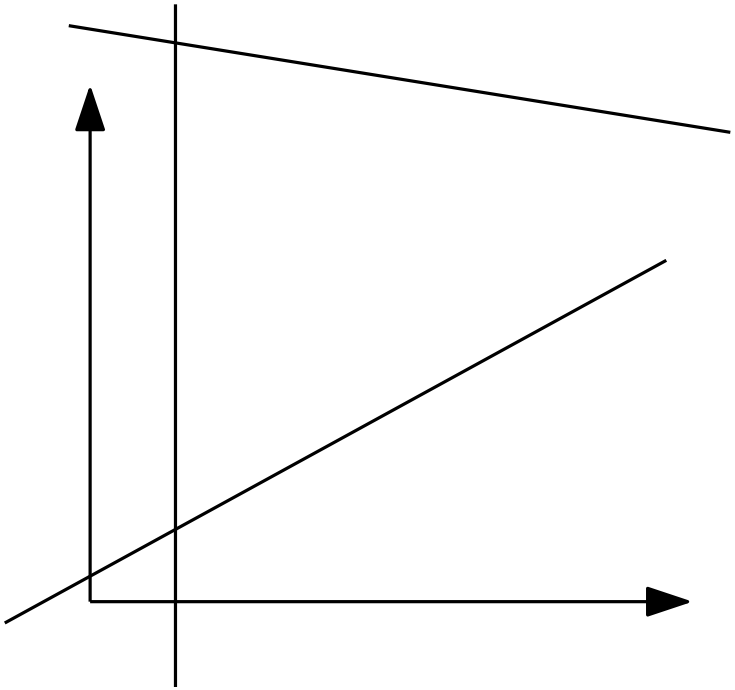
LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



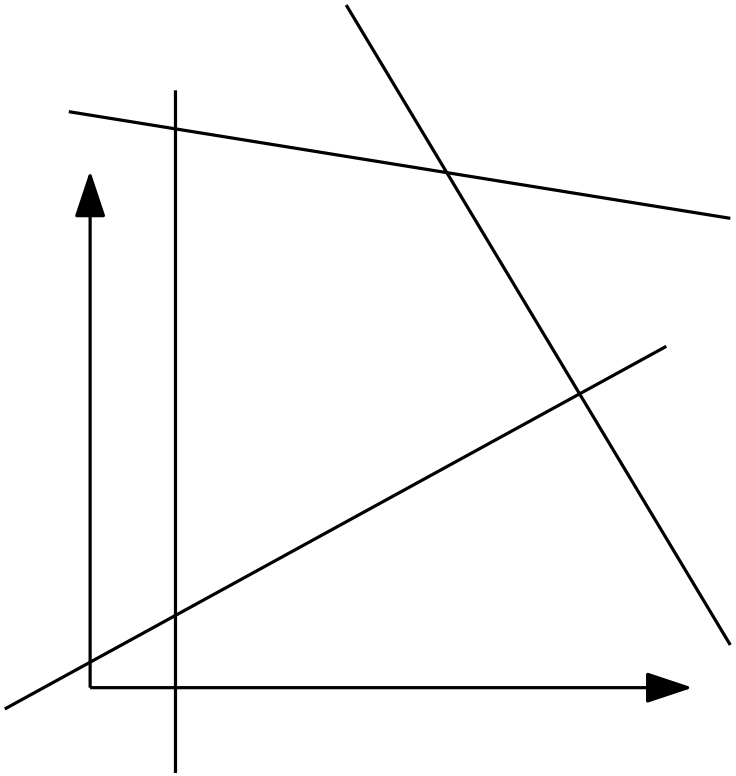
LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



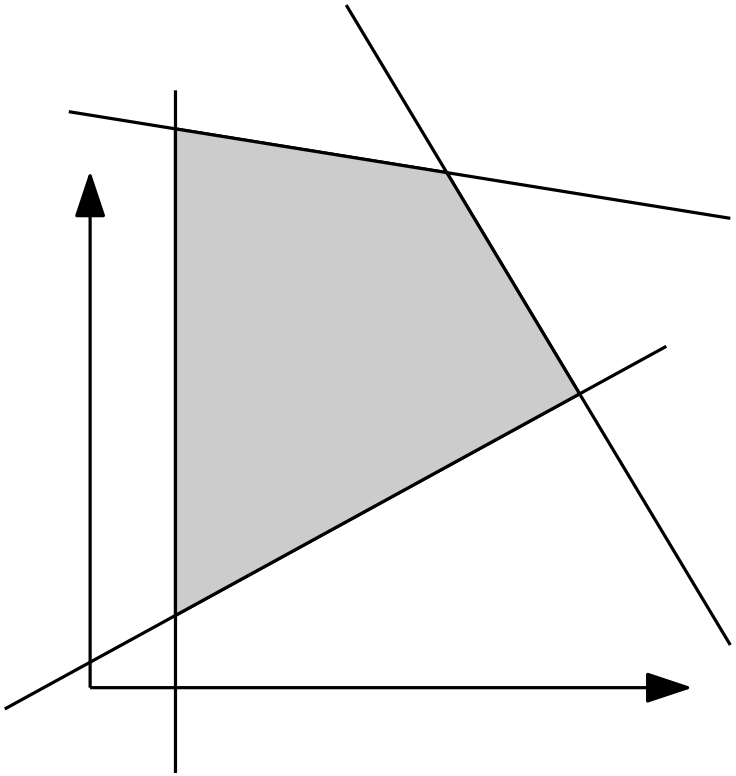
LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



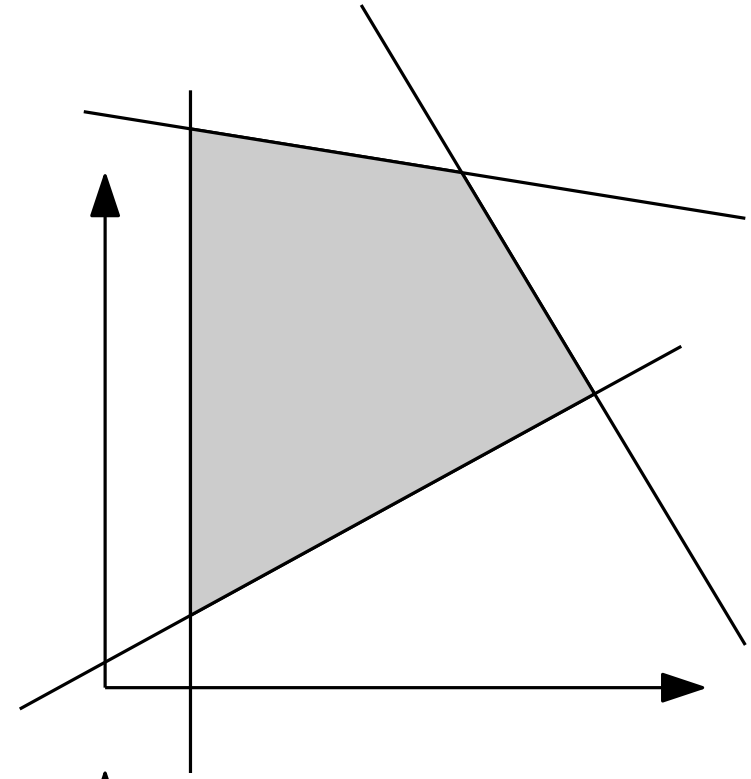
LP und konvexe Polytope

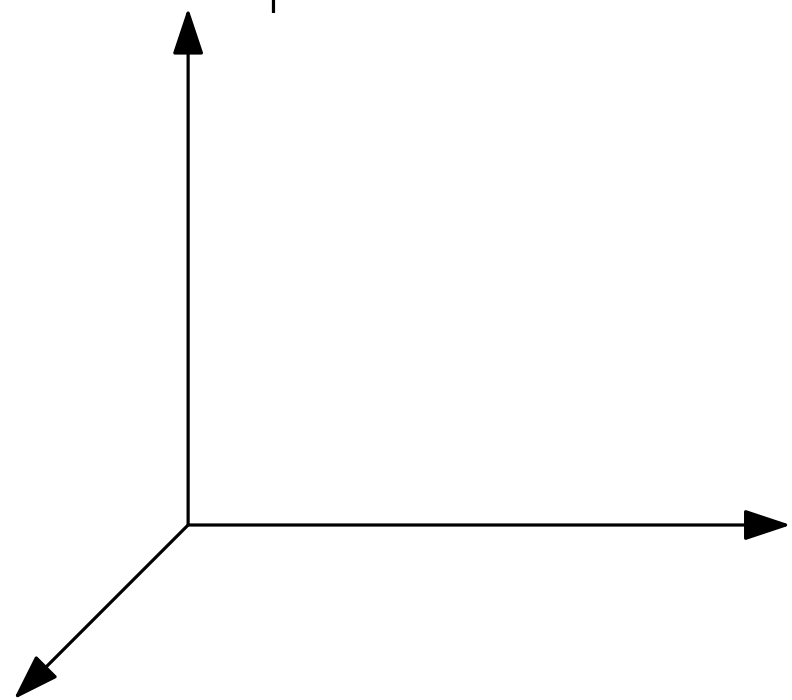
Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



LP und konvexe Polytope

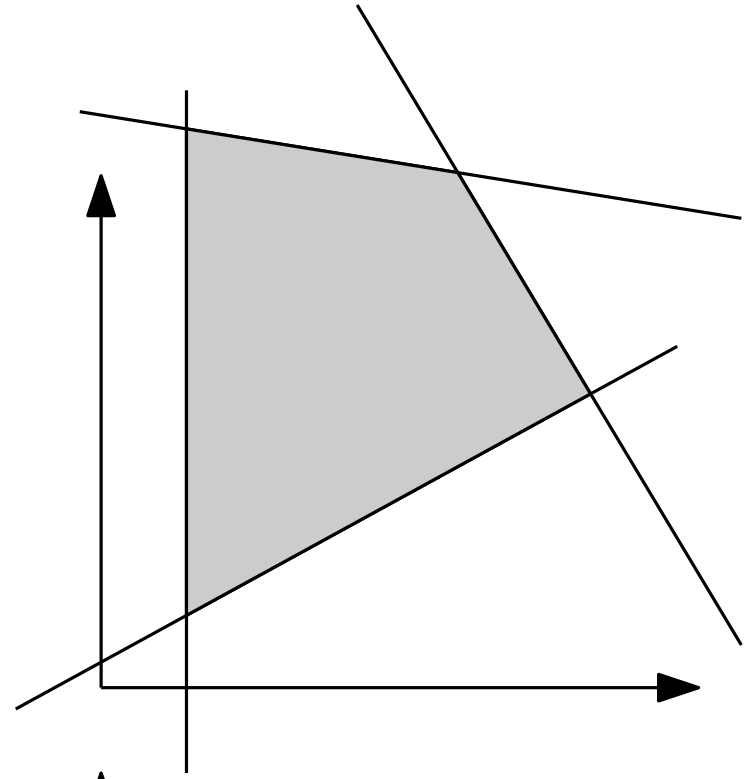
Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).

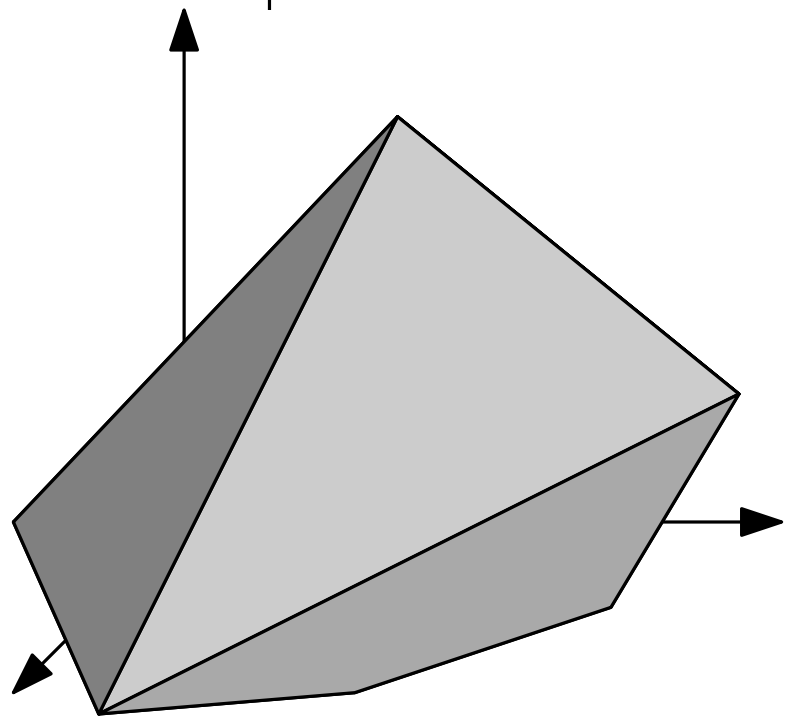




LP und konvexe Polytope

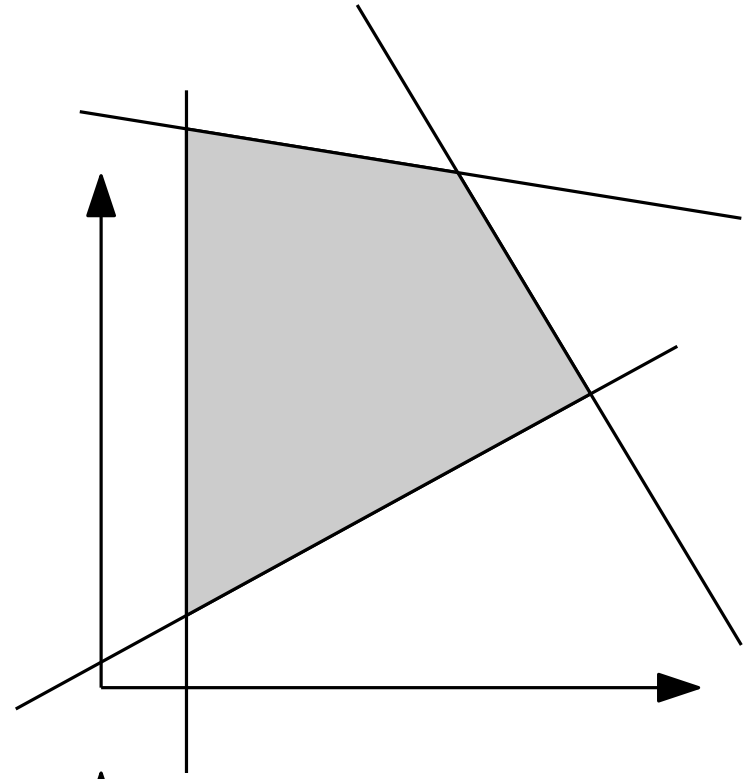
Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



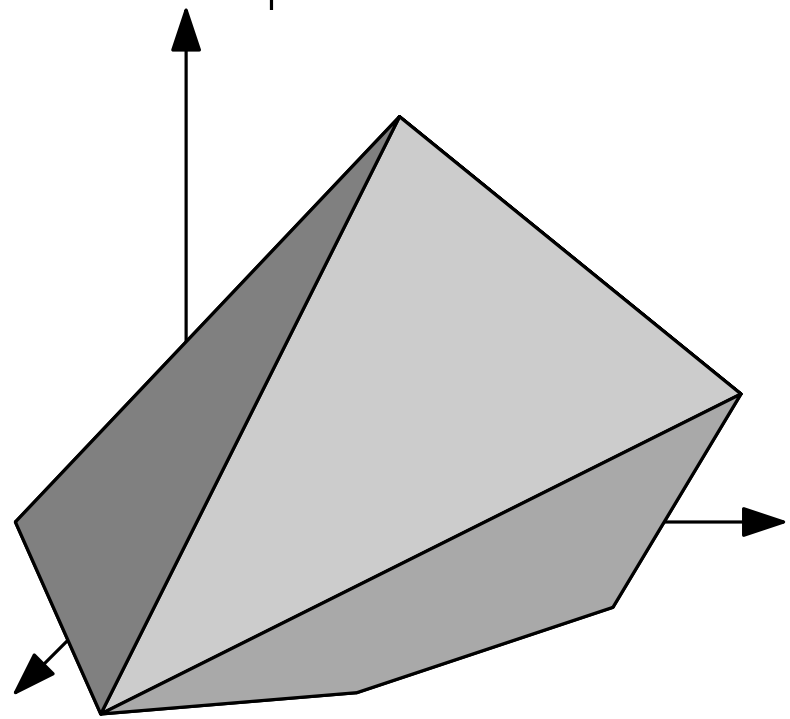


LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



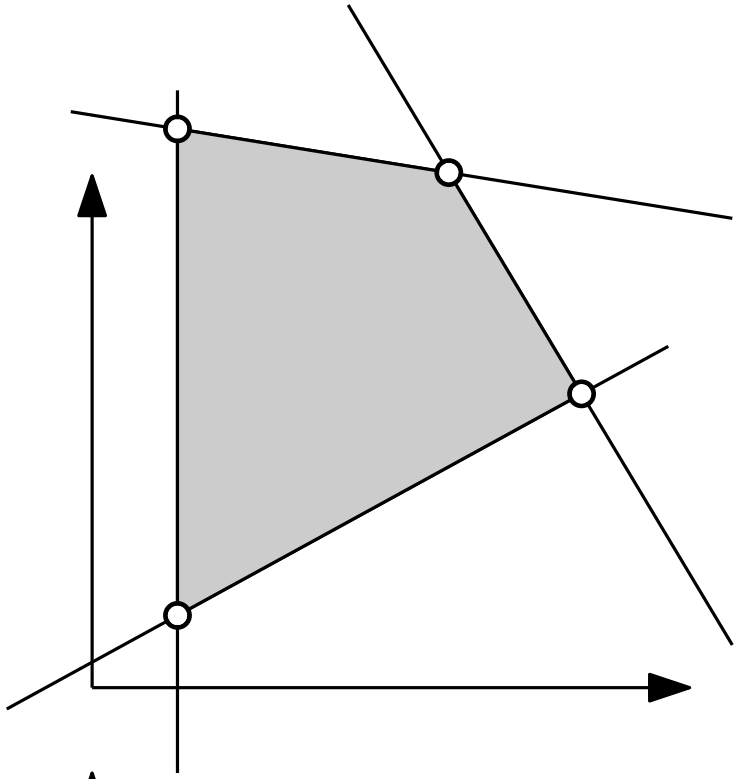
Ecken des Polytops heißen **Extrempunkt-Lösungen** $\Leftrightarrow$ n linear unabhängige Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt.

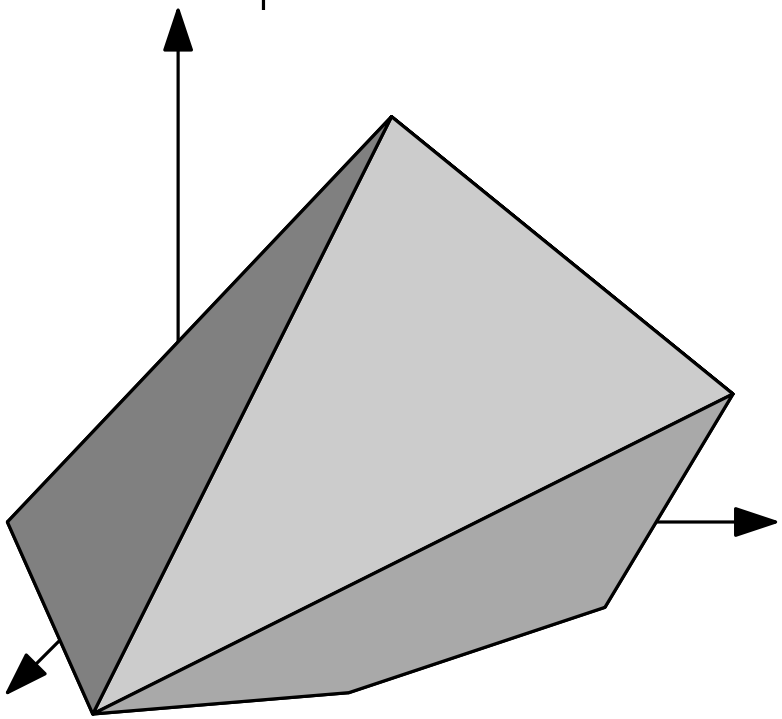


LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).

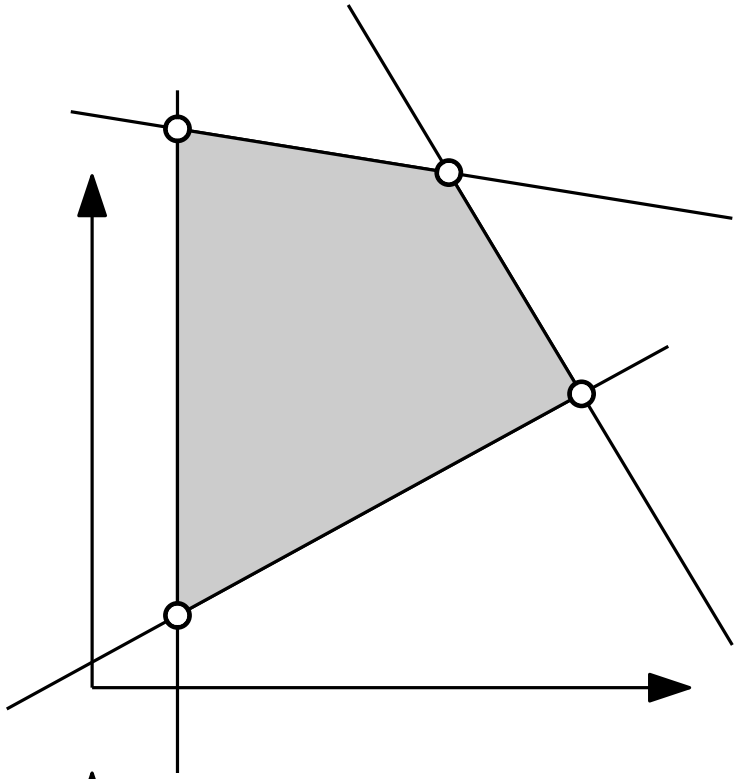
Ecken des Polytops heißen **Extrempunkt-Lösungen** $\Leftrightarrow$ n linear unabhängige Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt.



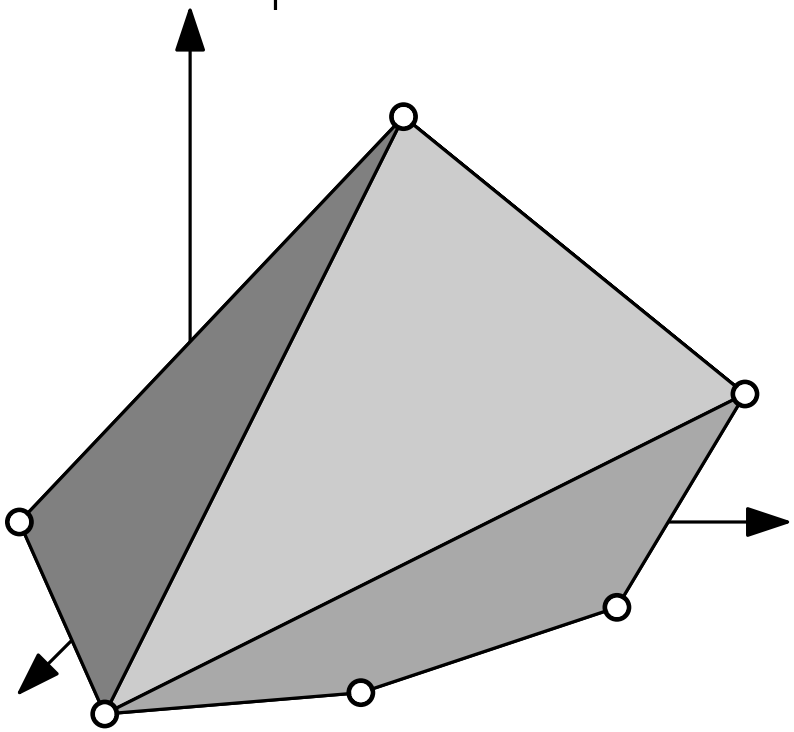


LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).

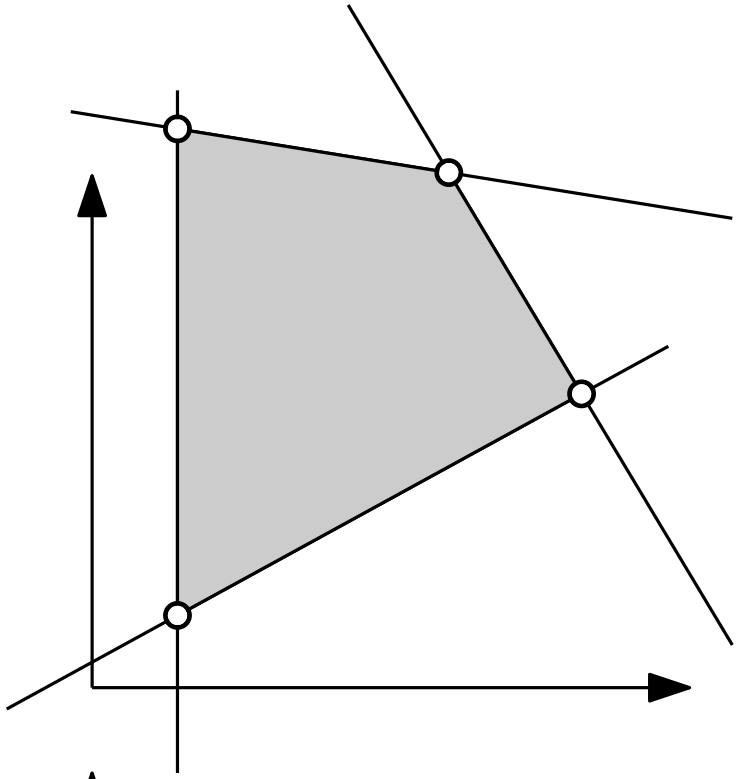


Ecken des Polytops heißen **Extrempunkt-Lösungen** $\Leftrightarrow$ n linear unabhängige Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt.



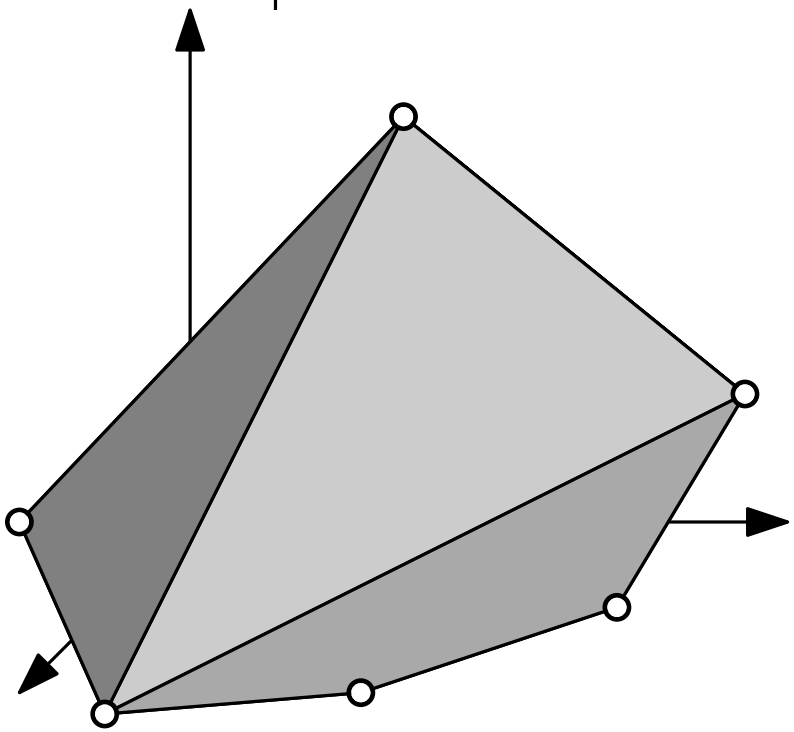
LP und konvexe Polytope

Menge der zulässigen Lösungen eines LPs mit n Variablen bilden **konvexes Polytop** im $\mathbb{R}^n$ (Schnitt von Halbräumen).



Ecken des Polytops heißen **Extrempunkt-Lösungen** $\Leftrightarrow$ n linear unabhängige Ungleichungen sind mit Gleichheit erfüllt.

Wenn optimale Lösung existiert, dann auch eine solche, die Extrempunkt ist.



Ganzzahlige lineare Programme

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{minimize} & c^\top x & & \\
\textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}
$$

Ganzzahlige lineare Programme

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Ganzzahlige lineare Programme

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Ganzzahlige lineare Programme

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Eine Vielzahl von NP-Optimierungsproblemen lässt sich als ILP formulieren; Lösung ist daher NP-schwer.

Ganzzahlige lineare Programme

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \textbf{minimize} & c^\top x & & \\ \textbf{subject to} & Ax & \geq & b \\ & x & \in & \mathbb{N} \end{array}$$

Eine Vielzahl von NP-Optimierungsproblemen lässt sich als ILP formulieren; Lösung ist daher NP-schwer.

LP-Relaxierung liefert untere Schranke: $\mathrm{OPT}_{\mathrm{LP}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{ILP}}$

Einführung Lineare Programmierung

Ein Großteil bekannter Approximationsalgorithmen basiert auf linearer Programmierung.

- Lineare Programmierung (LP) und LP-Dualität
- Min-Max-Beziehungen
- Techniken LP-basierten Algorithmendesigns

Einführung Lineare Programmierung

Ein Großteil bekannter Approximationsalgorithmen basiert auf linearer Programmierung.

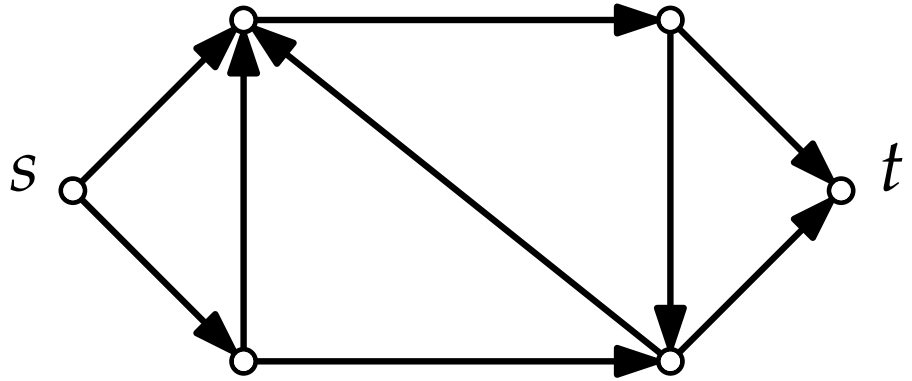
- Lineare Programmierung (LP) und LP-Dualität
- Min-Max-Beziehungen
- Techniken LP-basierten Algorithmendesigns

Max-Flow-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

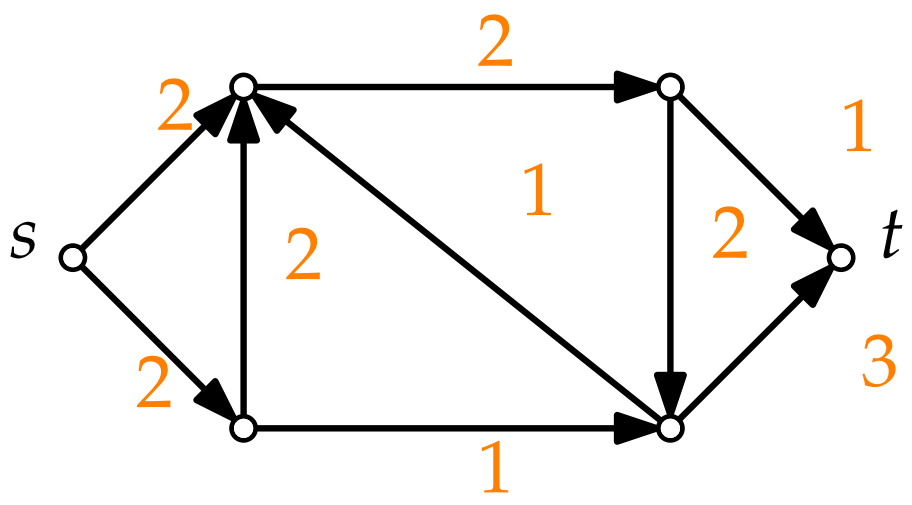
Max-Flow-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.



Max-Flow-Problem

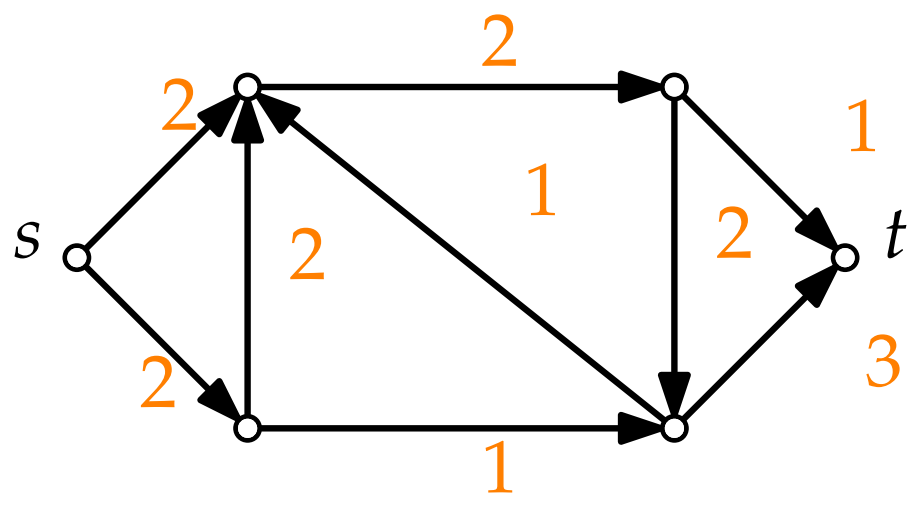
Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.



Max-Flow-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

Gesucht: Ein maximaler s–t-Fluss (nicht-negative Kantengewichte f), so dass

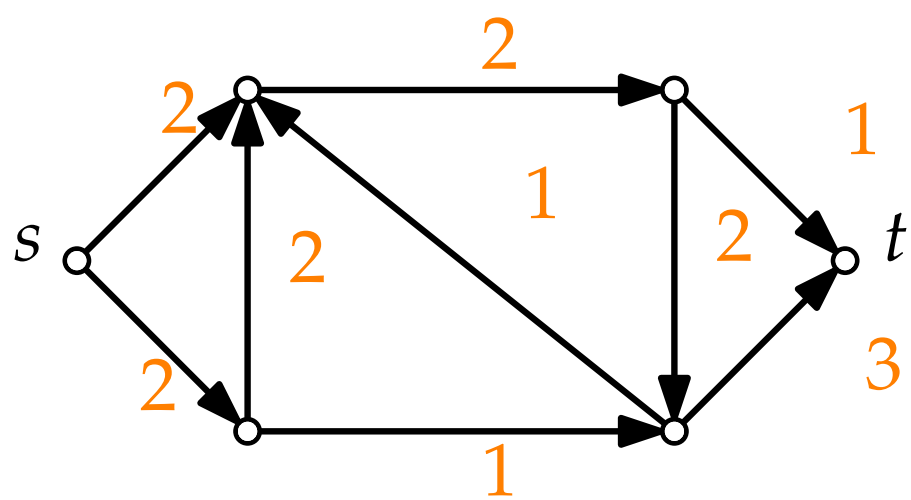


Max-Flow-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

Gesucht: Ein maximaler s–t-Fluss (nicht-negative Kantengewichte f), so dass

- $f(u, v) \leq c(u, v)$ für jede Kante $(u, v) \in E$

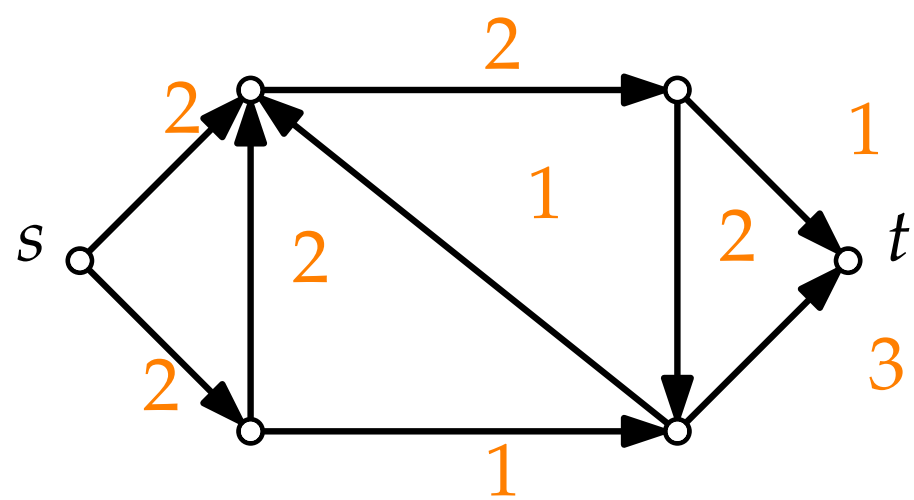


Max-Flow-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

Gesucht: Ein maximaler s–t-Fluss (nicht-negative Kantengewichte f), so dass

- $f(u,v) \leq c(u,v)$ für jede Kante $(u,v) \in E$
- $\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,z)\in E} f(v,z)$ für alle $v \in V - \{s,t\}$

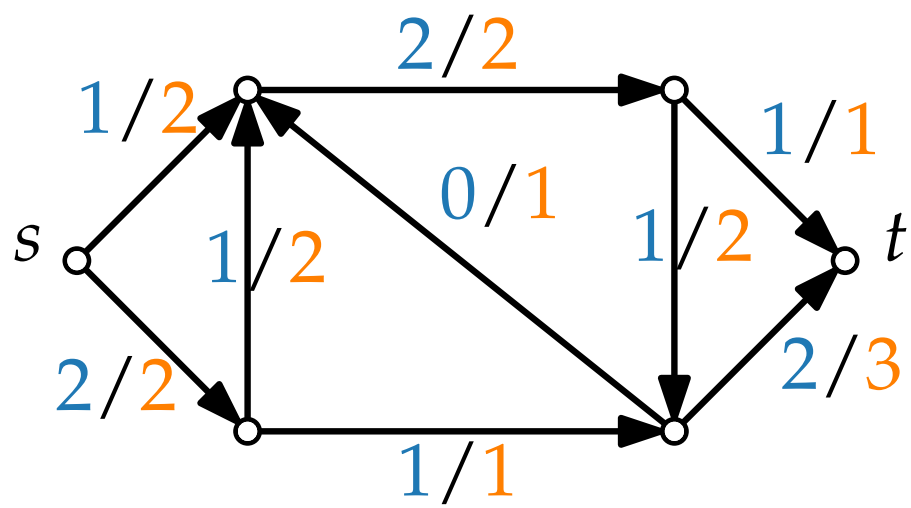


Max-Flow-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

Gesucht: Ein maximaler s–t-Fluss (nicht-negative Kantengewichte f), so dass

- $f(u,v) \leq c(u,v)$ für jede Kante $(u,v) \in E$
- $\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,z)\in E} f(v,z)$ für alle $v \in V - \{s,t\}$



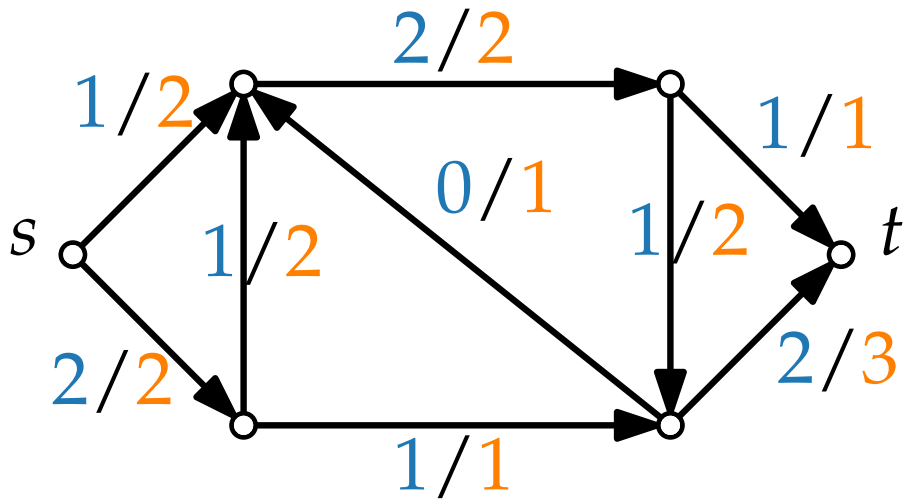
Max-Flow-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

Gesucht: Ein maximaler s–t-Fluss (nicht-negative Kantengewichte f), so dass

- $f(u,v) \leq c(u,v)$ für jede Kante $(u,v) \in E$
- $\sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,z)\in E} f(v,z)$ für alle $v \in V - \{s,t\}$

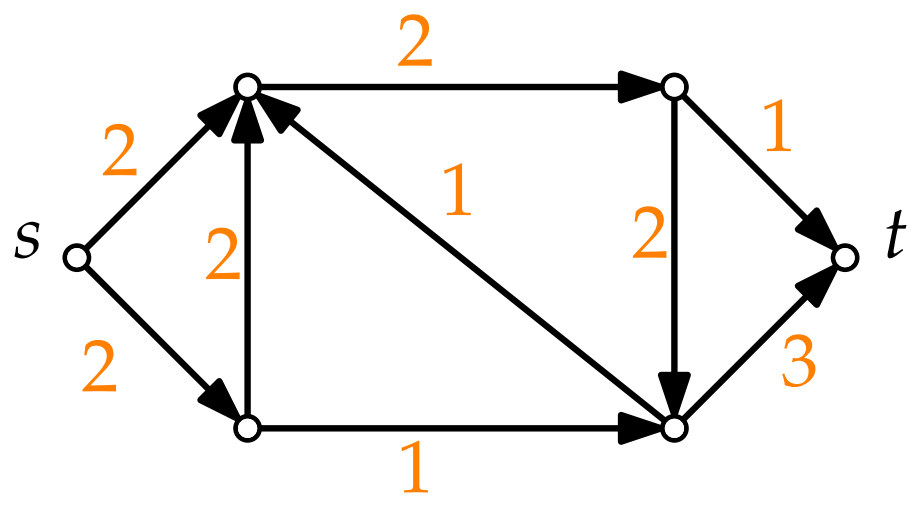
Wert des Flusses hierbei Zufluss zu t minus Abfluss aus t



Min-Cut-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

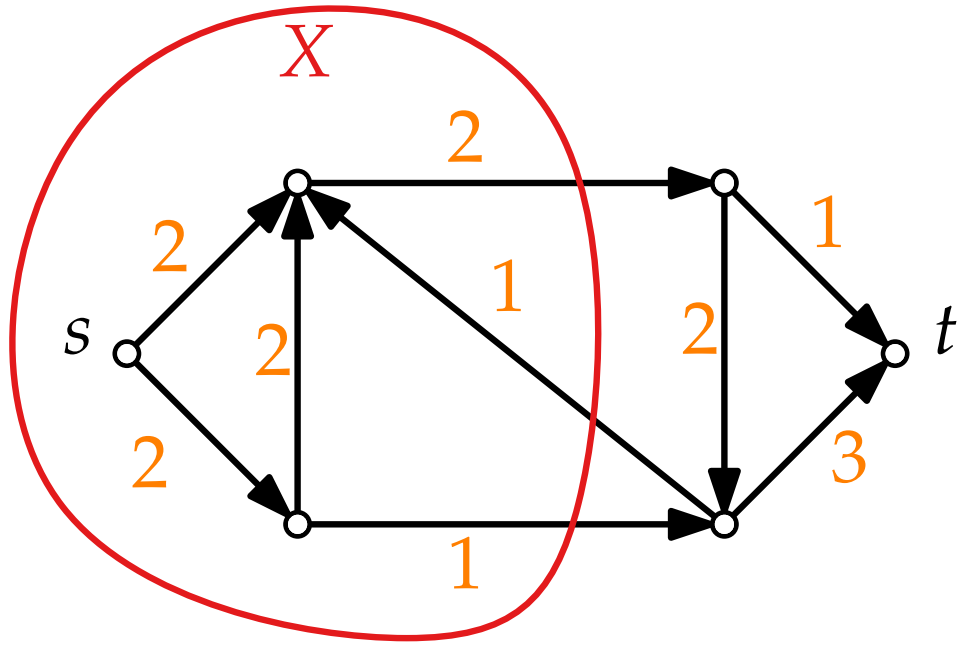
Gesucht: Ein s–t-Schnitt, d.h. eine Knotenmenge X mit $s \in X$ und $t \in \overline{X}$, so dass das Gesamtgewicht $c(X, \overline{X})$ der Kanten von X nach $\overline{X}$ minimal ist.



Min-Cut-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

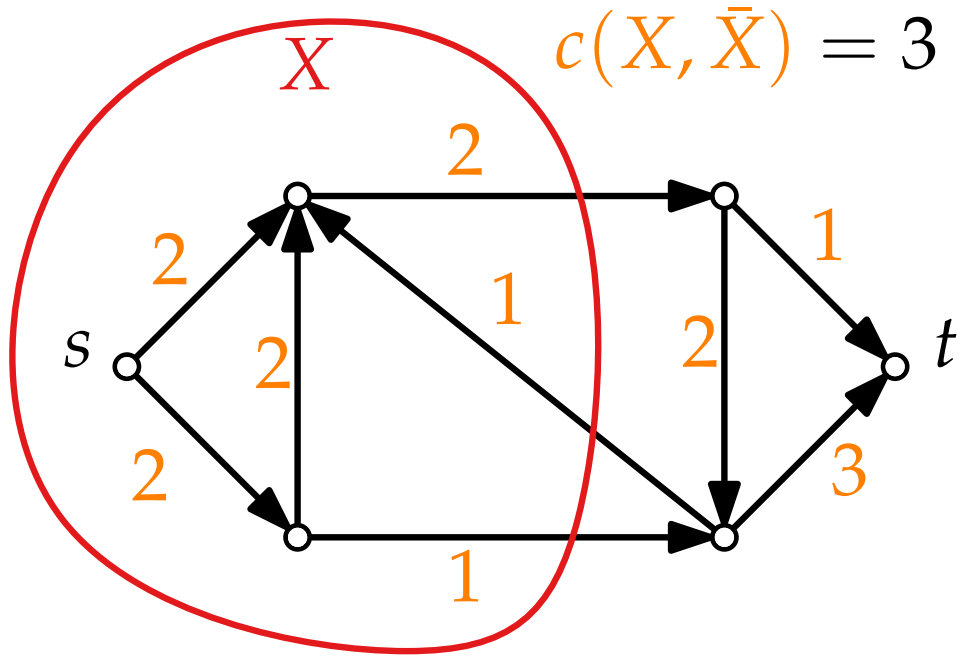
Gesucht: Ein s–t-Schnitt, d.h. eine Knotenmenge X mit $s \in X$ und $t \in \overline{X}$, so dass das Gesamtgewicht $c(X, \overline{X})$ der Kanten von X nach $\overline{X}$ minimal ist.



Min-Cut-Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkapazitäten $c\colon E \to \mathbb{Q}_+$ und zwei ausgezeichnete Knoten Quelle s und Senke t.

Gesucht: Ein s–t-Schnitt, d.h. eine Knotenmenge X mit $s \in X$ und $t \in \overline{X}$, so dass das Gesamtgewicht $c(X, \overline{X})$ der Kanten von X nach $\overline{X}$ minimal ist.



Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes. . .

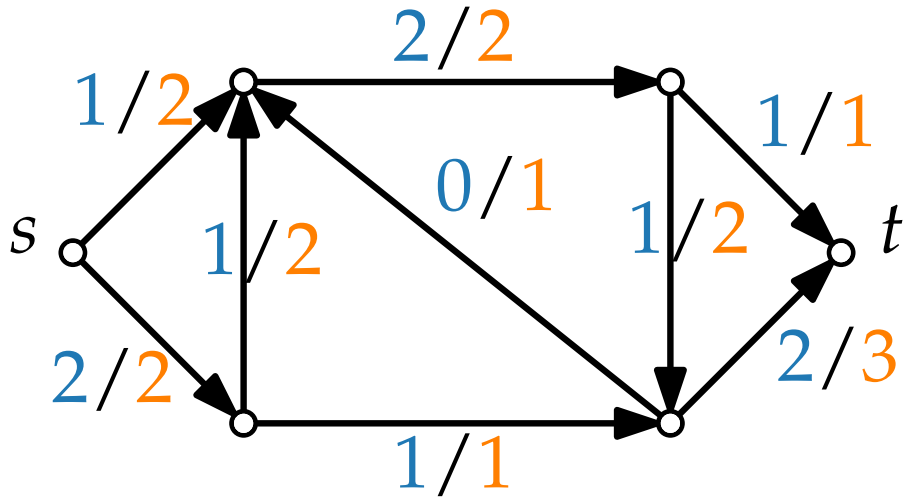
maximize
subject to

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes. . .

maximize
subject to

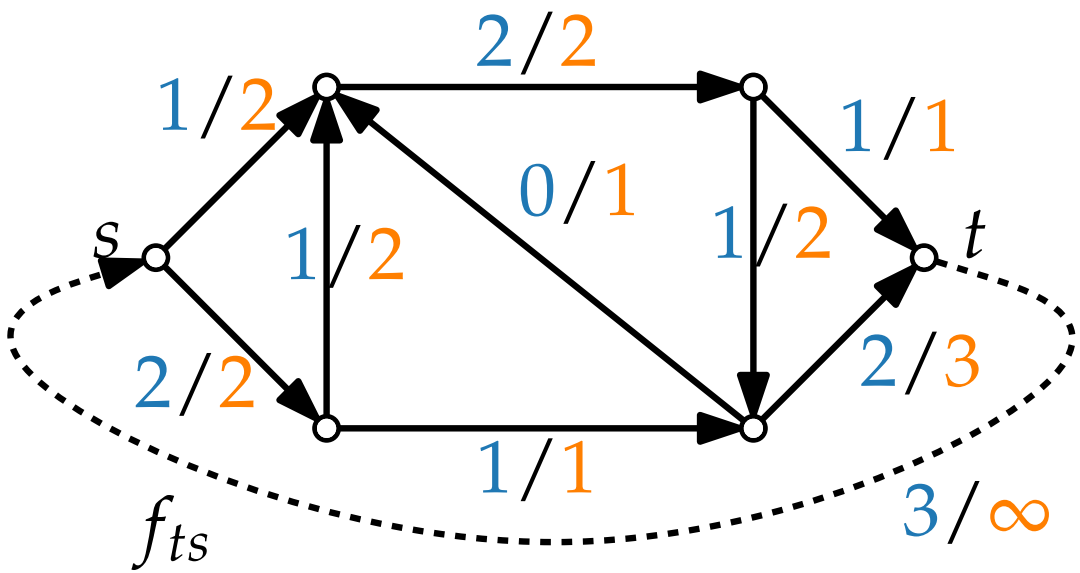


Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes…

maximize f_{ts}
subject to

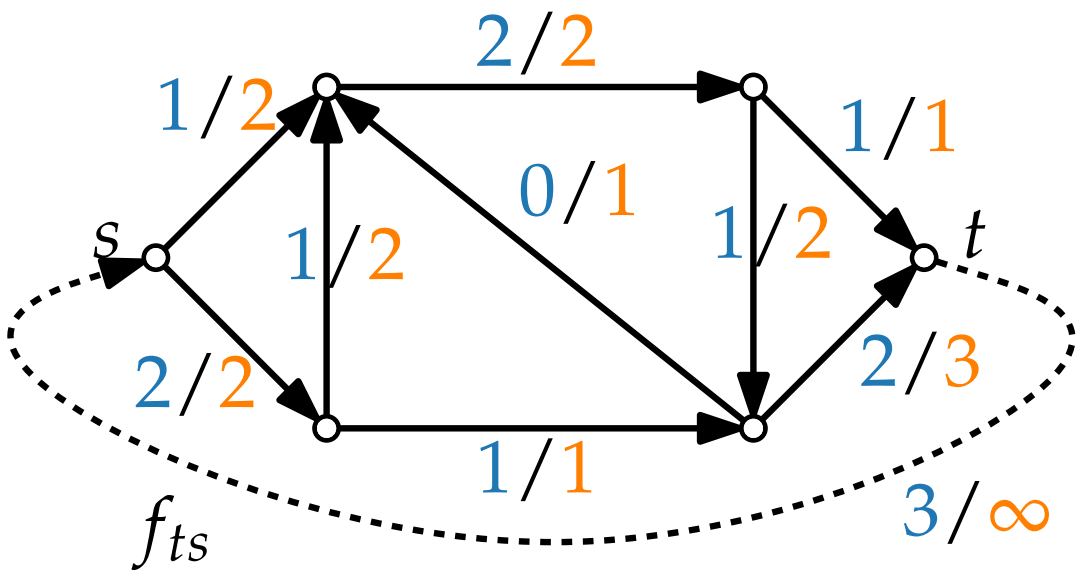


Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$



Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

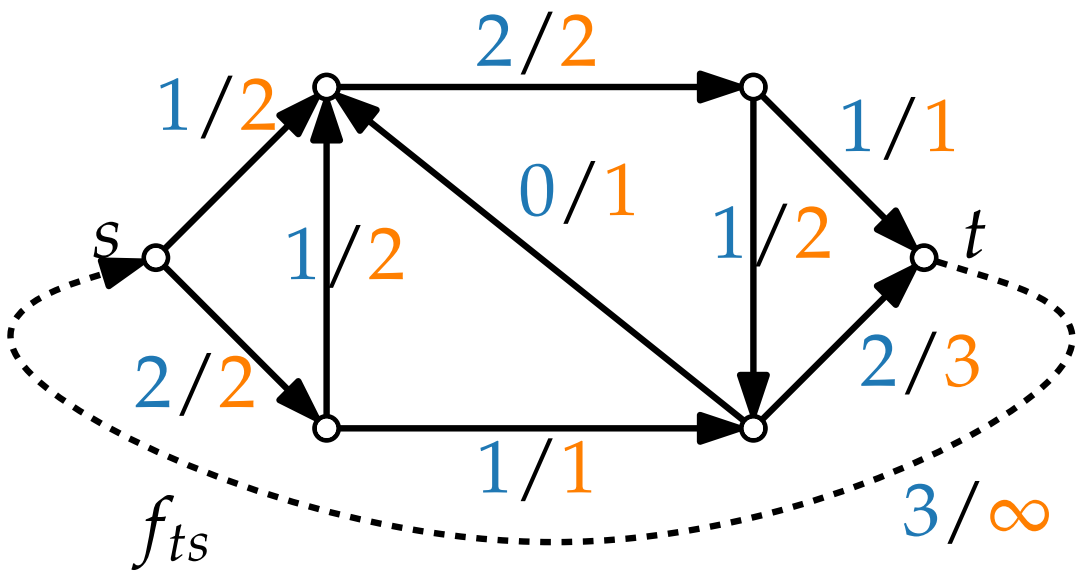
Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

maximize f_{ts}

subject to

$$f_{uv} \leq c_{uv} \qquad \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$$

$$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 \qquad \forall v \in V$$

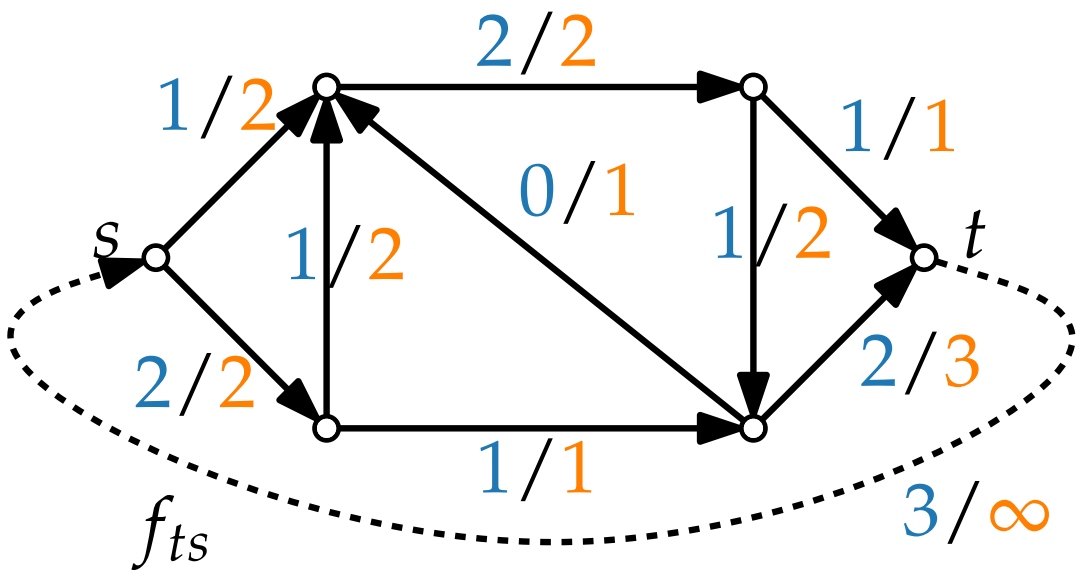


Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$



Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \quad d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E
\end{array}
$$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lllr}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\top x$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lllr}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv})$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts}$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \;= \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;+1 \cdot f_{ts} \;\Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts} \quad \Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor?

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lllr}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts} \quad \Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor? d_{uv}

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \quad d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V \quad p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts} \quad \Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor? d_{uv}, p_u

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lllr}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts} \quad \Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor? d_{uv}, p_u, p_v

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts} \quad \Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor? d_{uv}, p_u, p_v

$$\Rightarrow d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lllr}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts} \quad \Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor? d_{uv}, p_u, p_v

$$\Rightarrow d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$$

In welchen Nebenbedingungen kommt f_{ts} vor?

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \quad = \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;\; +1 \cdot f_{ts} \quad \Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor? d_{uv}, p_u, p_v

$$\Rightarrow d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$$

In welchen Nebenbedingungen kommt f_{ts} vor? p_s, p_t

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \quad d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V \quad p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E
\end{array}
$$

maximize $c^\intercal x \;= \sum_{(u,v)\in E} (0 \cdot f_{uv}) \;+1 \cdot f_{ts} \;\Rightarrow c = (0,\ldots,0,1)$

In welchen Nebenbedingungen kommt $f_{uv} \neq f_{ts}$ vor? d_{uv}, p_u, p_v

$$\Rightarrow d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$$

In welchen Nebenbedingungen kommt f_{ts} vor? p_s, p_t

$$\Rightarrow p_s - p_t \geq 1$$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \quad d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V \quad p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \\
& p_s - p_t \geq 1 & \\
& d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E \\
& p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Satz. Der Wert eines maximalen s–t-Flusses und die Kapazität eines minimalen s–t-Schnitts sind gleich.

Beweis. Spezialfall des LP-Dualitätssatzes...

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{maximize} & f_{ts} & & \\
\textbf{subject to} & f_{uv} \leq c_{uv} & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} & d_{uv} \\
& \displaystyle\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0 & \forall v \in V & p_v \\
& f_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \\
& p_s - p_t \geq 1 & \\
& d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E \\
& p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$

Duales LP – Interpretation als ILP

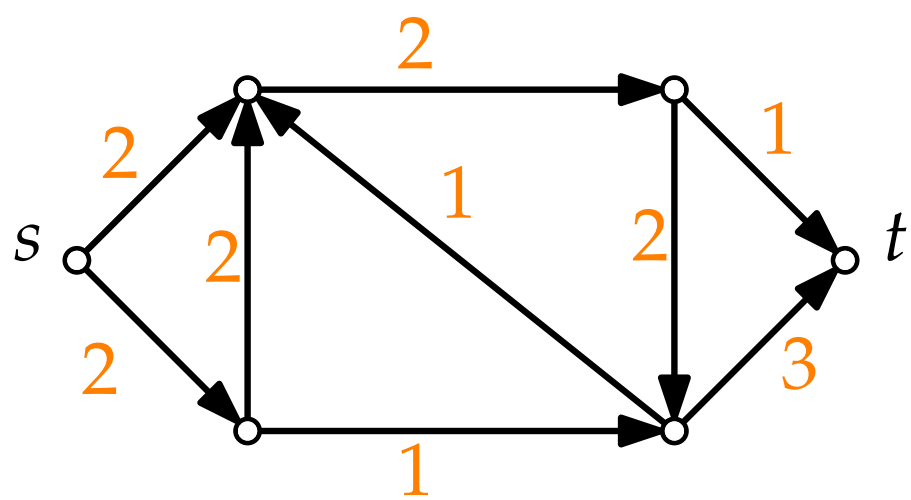
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$

Duales LP – Interpretation als ILP

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall u \in V
\end{array}
$$

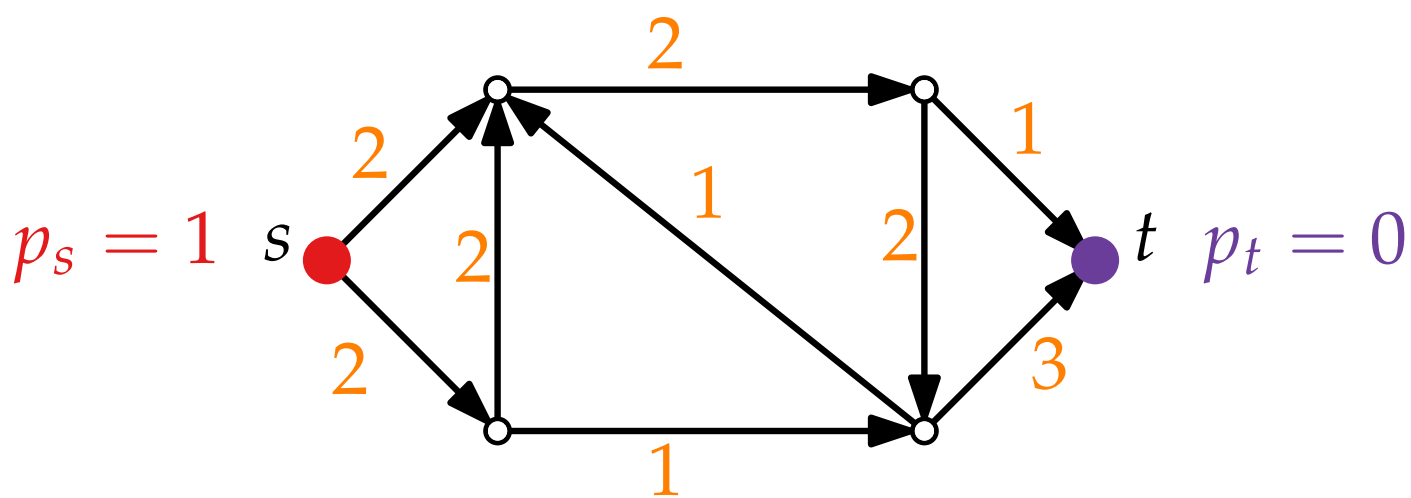
Duales LP – Interpretation als ILP

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall u \in V
\end{array}
$$



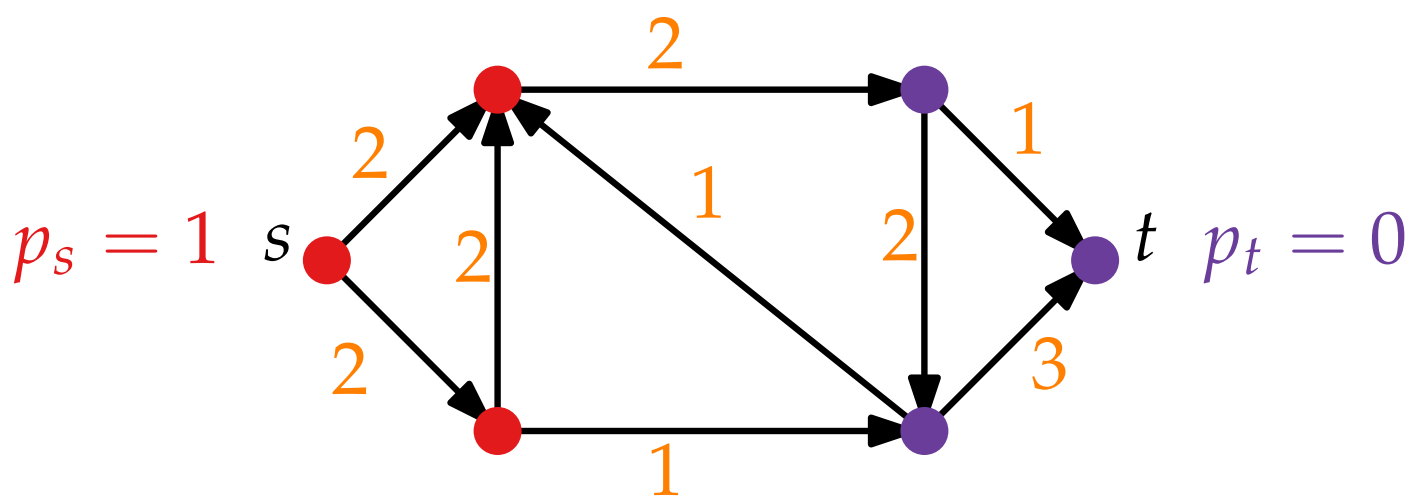
Duales LP – Interpretation als ILP

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall u \in V
\end{array}
$$



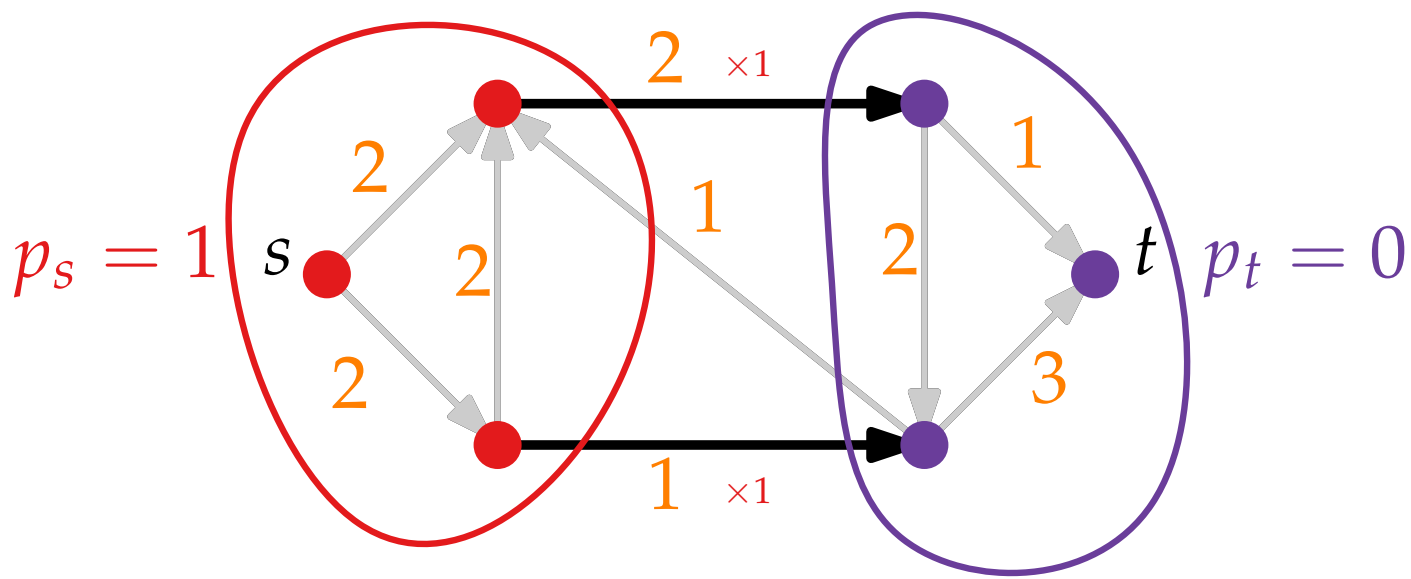
Duales LP – Interpretation als ILP

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall u \in V
\end{array}
$$



Duales LP – Interpretation als ILP

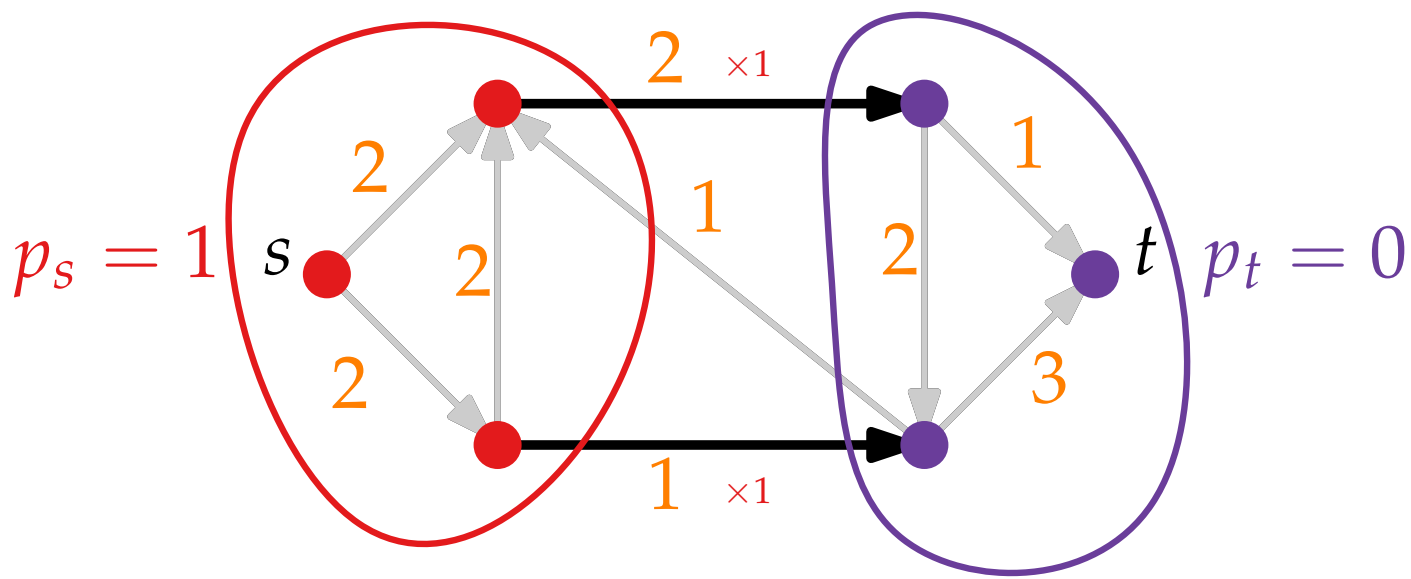
$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall u \in V
\end{array}
$$



Duales LP – Interpretation als ILP

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \cancel{\geq 0} \in \{0,1\} & \forall u \in V
\end{array}
$$

äquivalent zu Min-Cut!

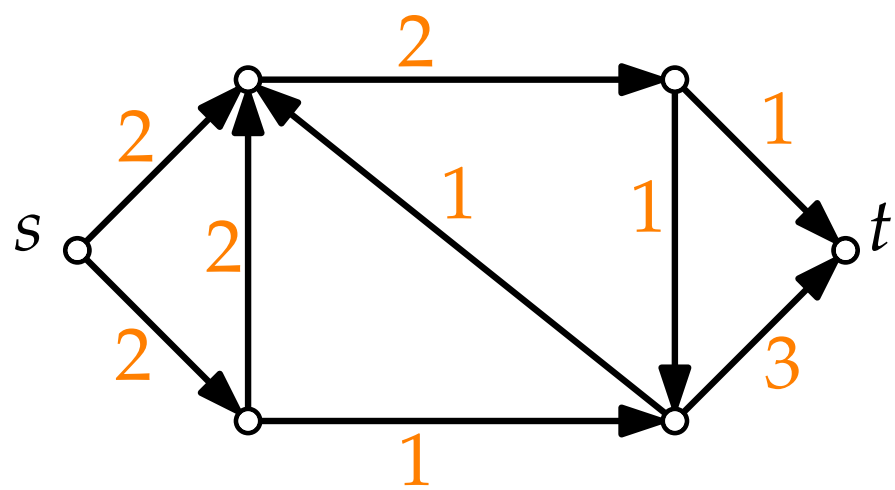


Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E \\
 & p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$

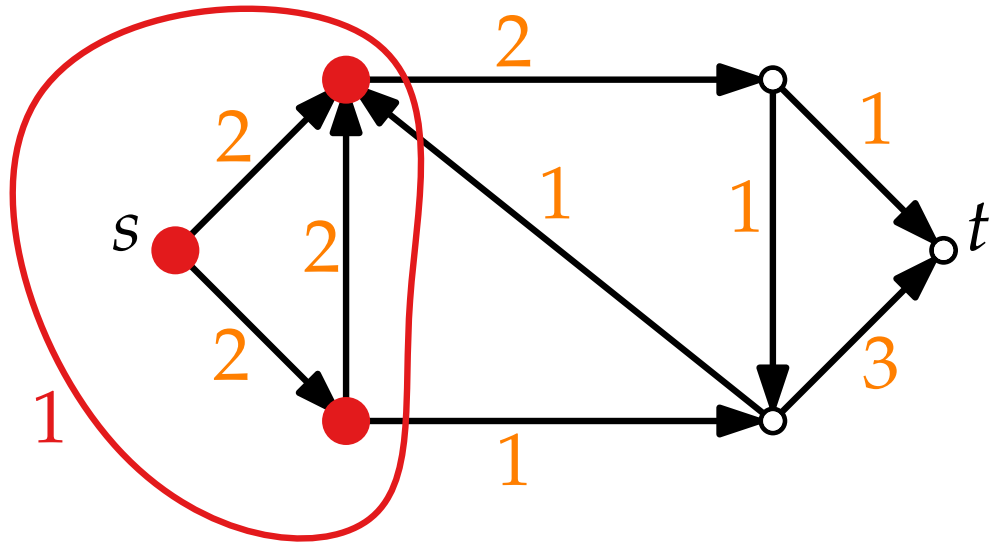
Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E \\
 & p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$



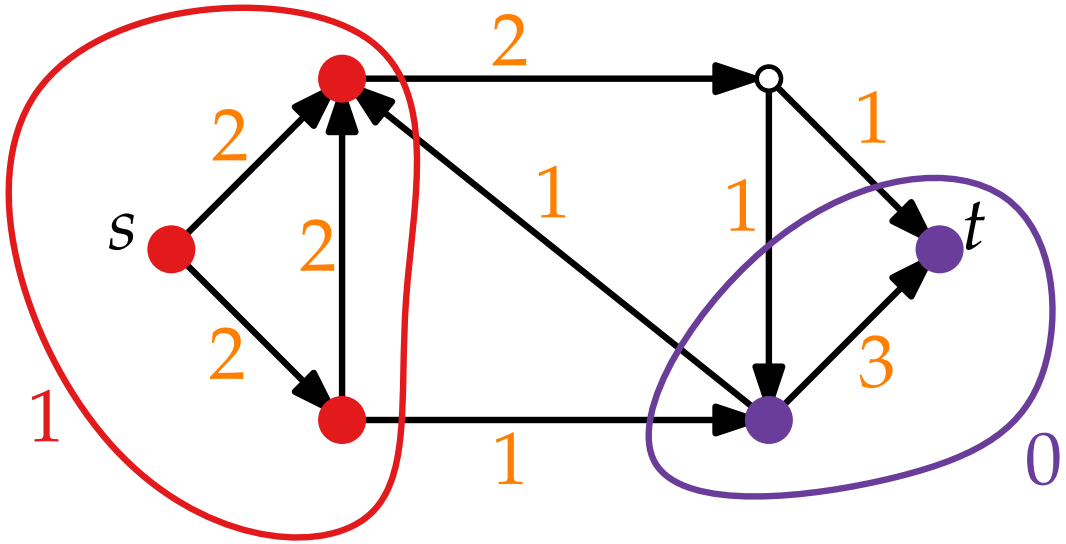
Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E \\
 & p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$



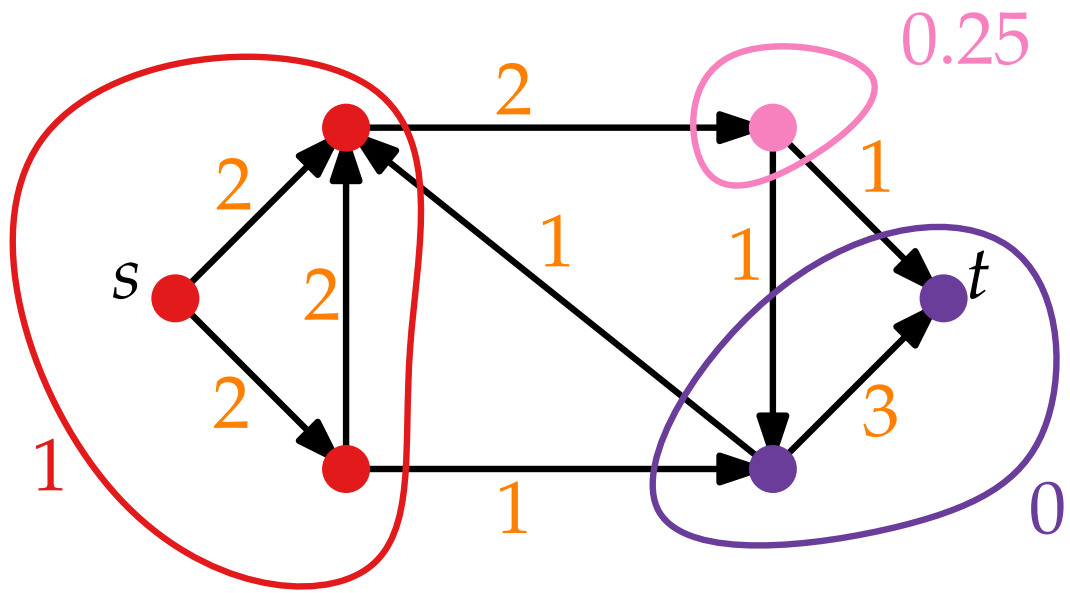
Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E \\
 & p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$



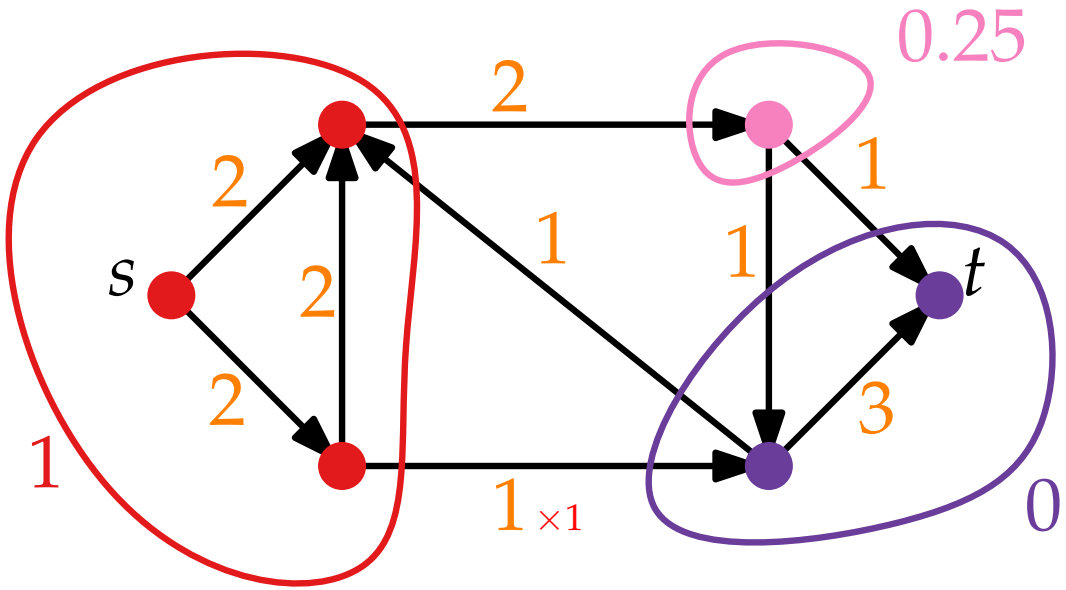
Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v) \in E \\
 & p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$



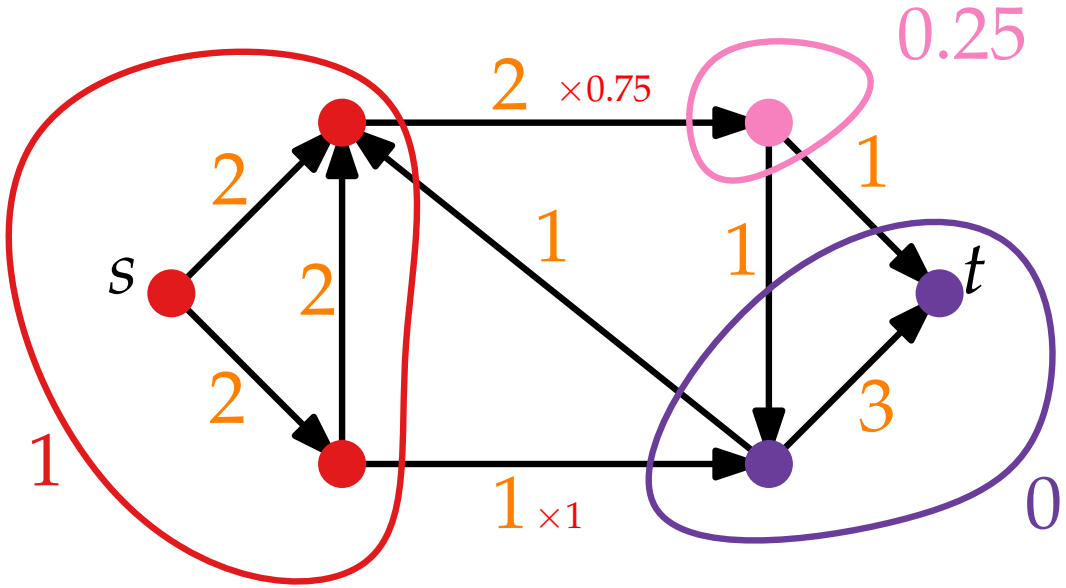
Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\ \textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\ & p_s - p_t \geq 1 & \\ & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v)\in E \\ & p_u \geq 0 & \forall u \in V \end{array}$$



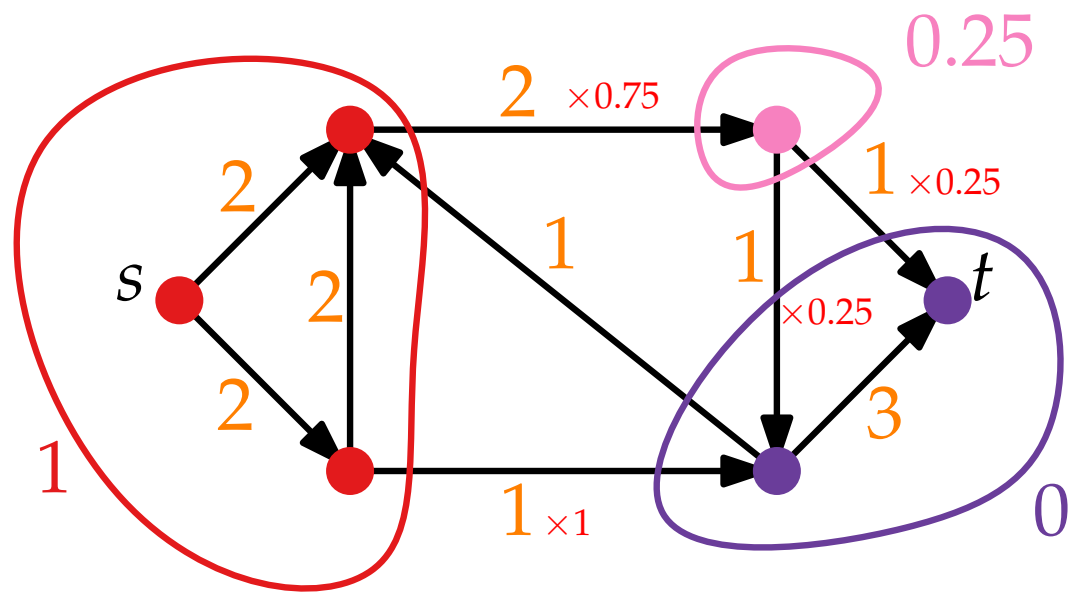
Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
 & p_s - p_t \geq 1 & \\
 & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v)\in E \\
 & p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$



Duales LP – Fraktionale Schnitte

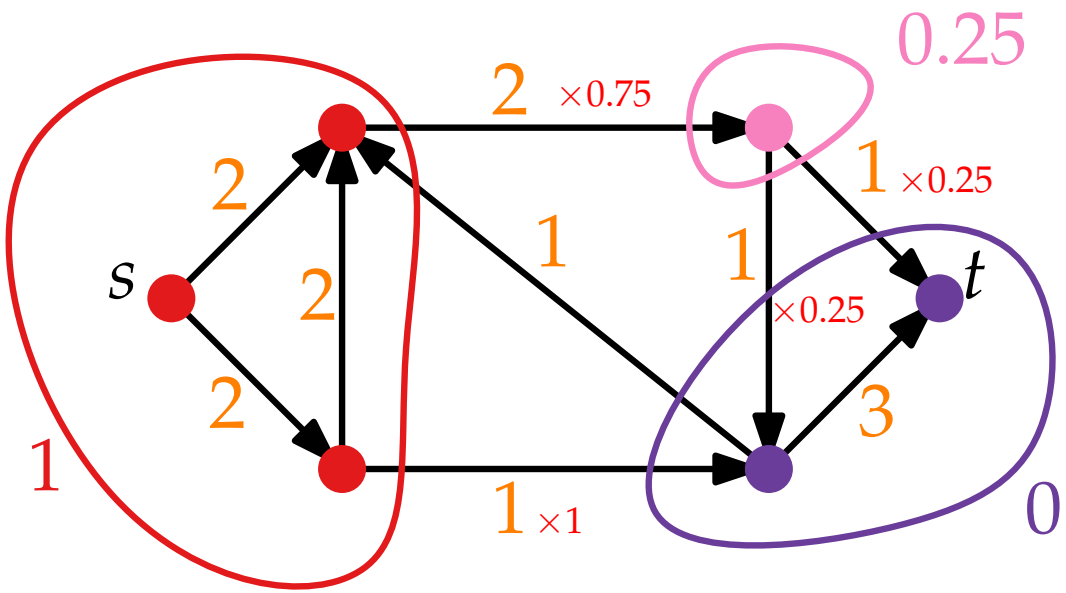
$$\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
& p_s - p_t \geq 1 & \\
& d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v)\in E \\
& p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}$$



Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} & \\
\textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\
& p_s - p_t \geq 1 & \\
& d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v)\in E \\
& p_u \geq 0 & \forall u \in V
\end{array}
$$

Jeder s–t-Weg $s = v_0, \ldots, v_k = t$ hat Länge ≥ 1 bezüglich d:



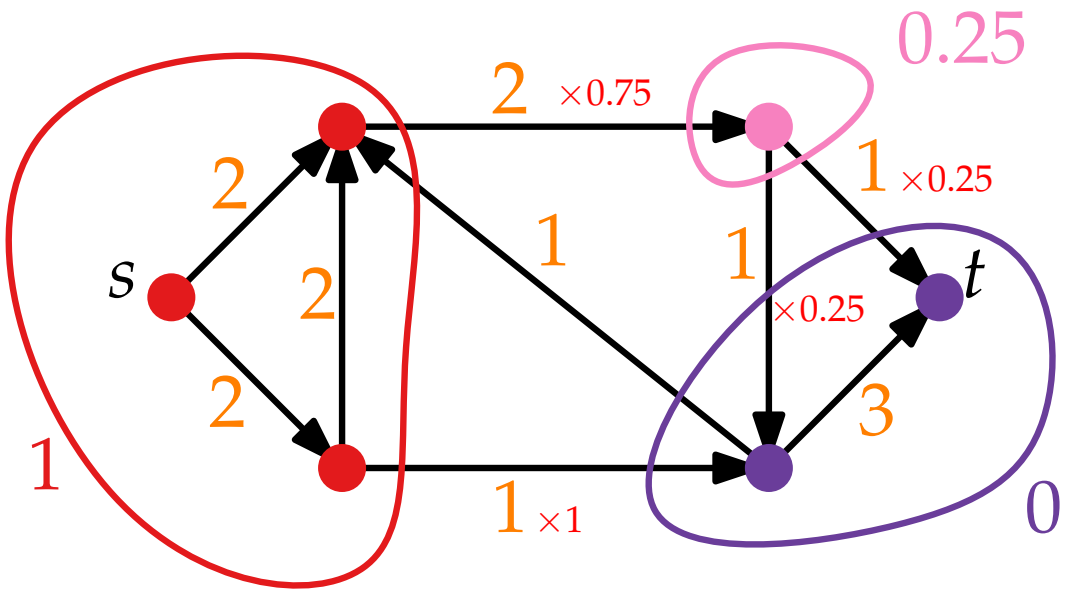
Duales LP – Fraktionale Schnitte

minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	$\equiv$ LP-Relaxierung des ILPs
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$
	$p_u \geq 0$	$\forall u \in V$

Jeder s–t-Weg $s = v_0, \ldots, v_k = t$ hat Länge ≥ 1 bezüglich d:

$$\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,i+1} \geq \sum_{i=0}^{k-1} (p_i - p_{i+1})$$

$$= p_s - p_t$$



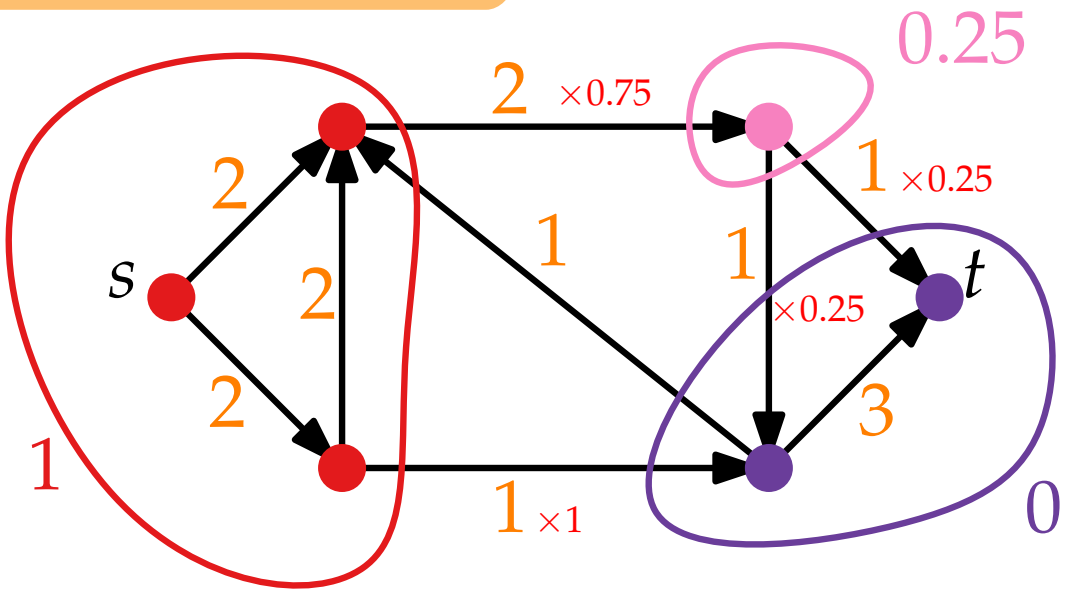
Duales LP – Fraktionale Schnitte

$$\begin{array}{lll} \textbf{minimize} & \displaystyle\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv}\cdot d_{uv} & \equiv \text{LP-Relaxierung des ILPs} \\ \textbf{subject to} & d_{uv} - p_u + p_v \geq 0 & \forall (u,v)\in E\setminus\{(t,s)\} \\ & p_s - p_t \geq 1 & \\ & d_{uv} \geq 0 & \forall (u,v)\in E \\ & p_u \geq 0 & \forall u \in V \end{array}$$

Jede Extrempunkt-Lösung ist hier **ganzzahlig**! (ÜA)

Jeder s–t-Weg $s = v_0, \ldots, v_k = t$ hat Länge ≥ 1 bezüglich d:

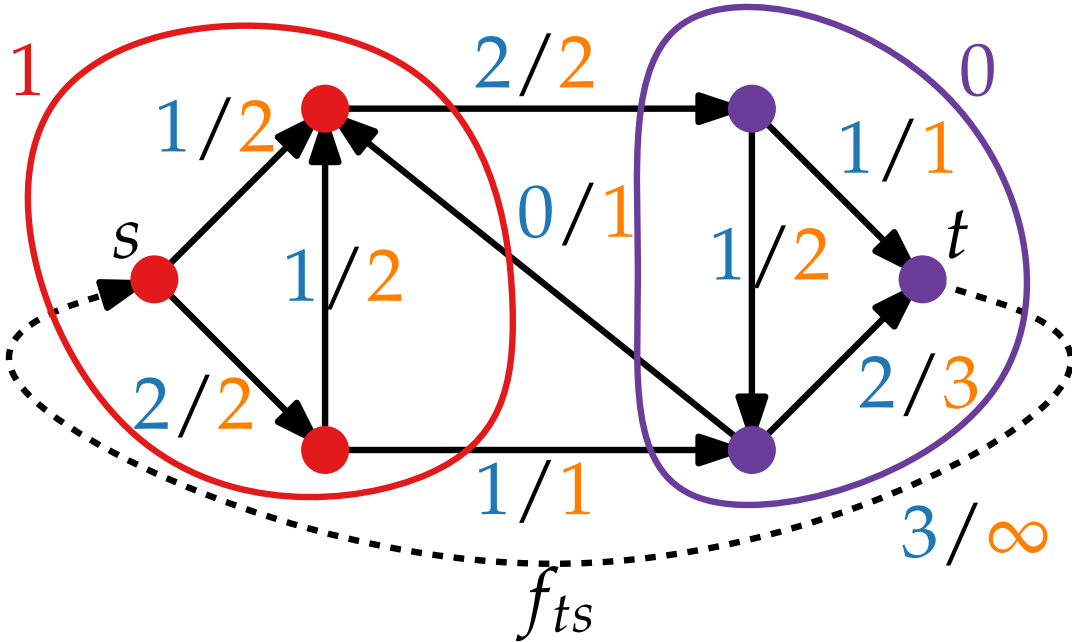
$$\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,i+1} \geq \sum_{i=0}^{k-1} (p_i - p_{i+1})$$
$$= p_s - p_t$$



Duales LP – Komplementärer Schlupf

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$

minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$
	$p_u \geq 0$	$\forall u \in V$

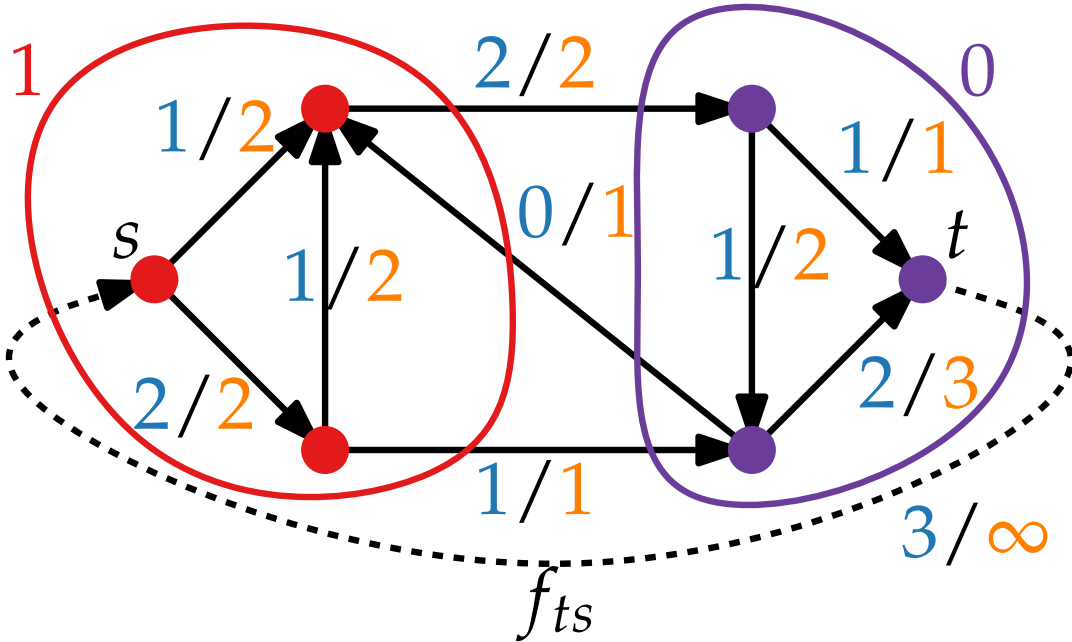


Duales LP – Komplementärer Schlupf

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$

minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$
	$p_u \geq 0$	$\forall u \in V$

Für einen maximalen Fluss und minimalen Schnitt gilt:



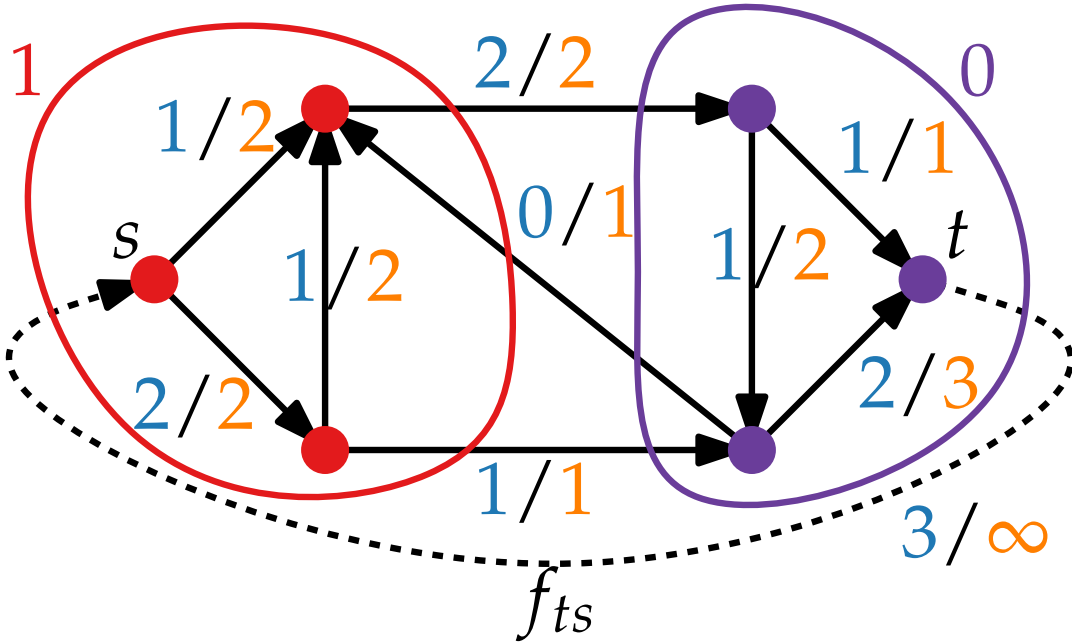
Duales LP – Komplementärer Schlupf

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$

minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$
	$p_u \geq 0$	$\forall u \in V$

Für einen maximalen Fluss und minimalen Schnitt gilt:

- Für Vorwärtskanten (u,v) des Schnitts gilt $f_{uv} = c_{uv}$.



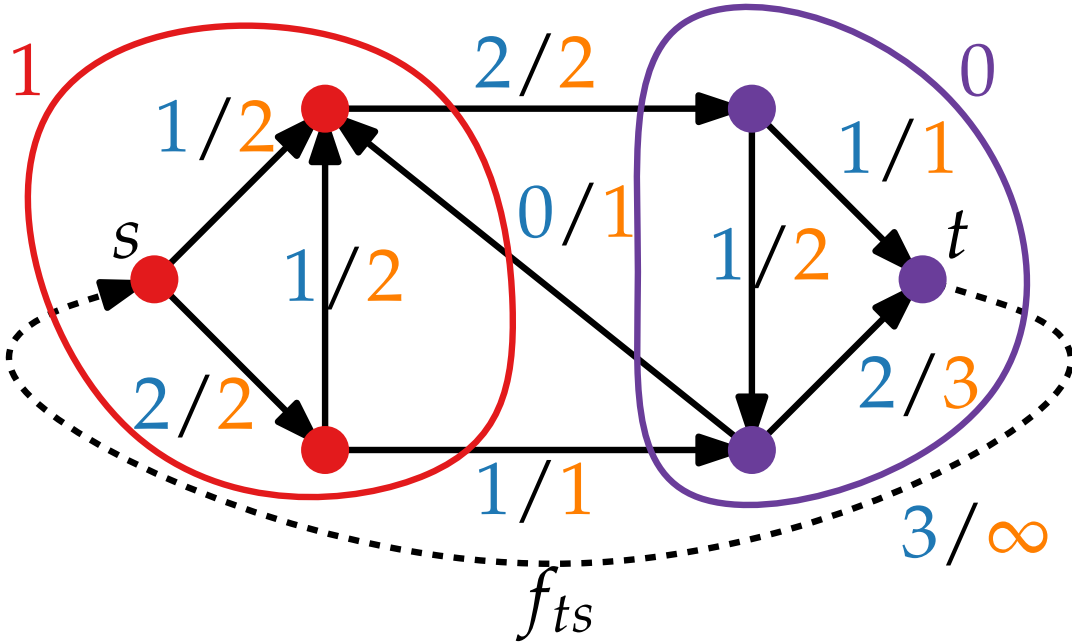
Duales LP – Komplementärer Schlupf

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$

minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$
	$p_u \geq 0$	$\forall u \in V$

Für einen maximalen Fluss und minimalen Schnitt gilt:

- Für Vorwärtskanten (u,v) des Schnitts gilt $f_{uv} = c_{uv}$.
  ($d_{uv} = 1$, also nach dualem KS: $f_{uv} = c_{uv}$.)



Duales LP – Komplementärer Schlupf

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$

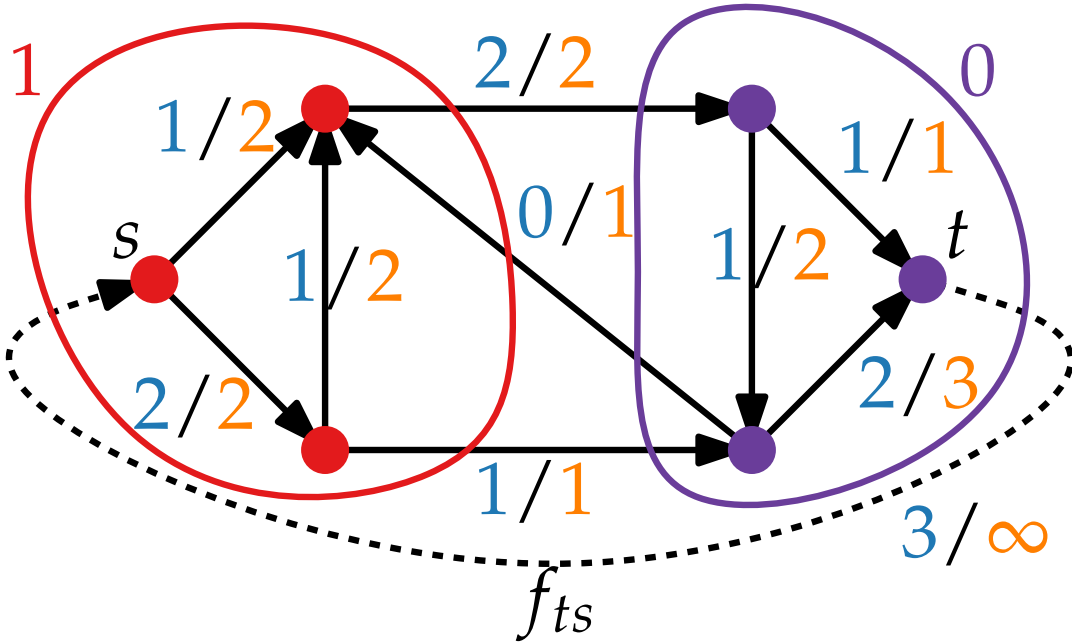
minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	
	$p_u \geq 0$	

Primaler KS:
$\forall j$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
$\forall i$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Für einen maximalen Fluss und minimalen Schnitt gilt:

- Für Vorwärtskanten (u,v) des Schnitts gilt $f_{uv} = c_{uv}$.
  ($d_{uv} = 1$, also nach dualem KS: $f_{uv} = c_{uv}$.)



Duales LP – Komplementärer Schlupf

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$

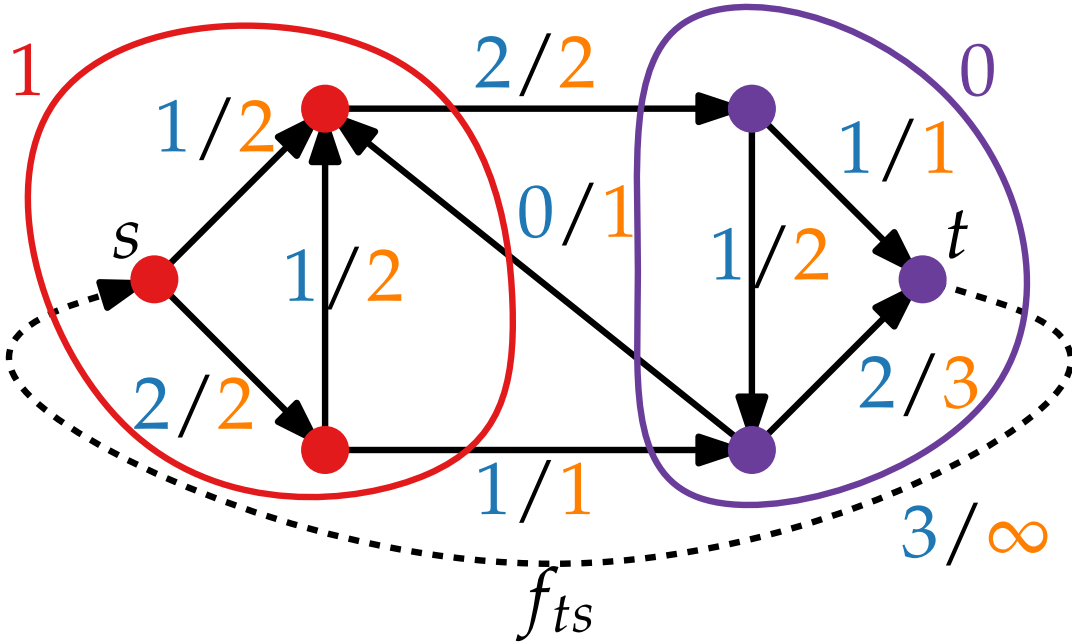
minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	
	$p_u \geq 0$	

Primaler KS:
$\forall j$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
$\forall i$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Für einen maximalen Fluss und minimalen Schnitt gilt:

- Für Vorwärtskanten (u,v) des Schnitts gilt $f_{uv} = c_{uv}$.
  ($d_{uv} = 1$, also nach dualem KS: $f_{uv} = c_{uv}$.)
- Für Rückwärtskanten (u,v) des Schnitts gilt $f_{uv} = 0$.



Duales LP – Komplementärer Schlupf

maximize	f_{ts}	
subject to	$f_{uv} \leq c_{uv}$	$\forall (u,v) \in E \setminus \{(t,s)\}$
	$\sum_{u\colon (u,v)\in E} f_{uv} - \sum_{z\colon (v,z)\in E} f_{vz} \leq 0$	$\forall v \in V$
	$f_{uv} \geq 0$	$\forall (u,v) \in E$

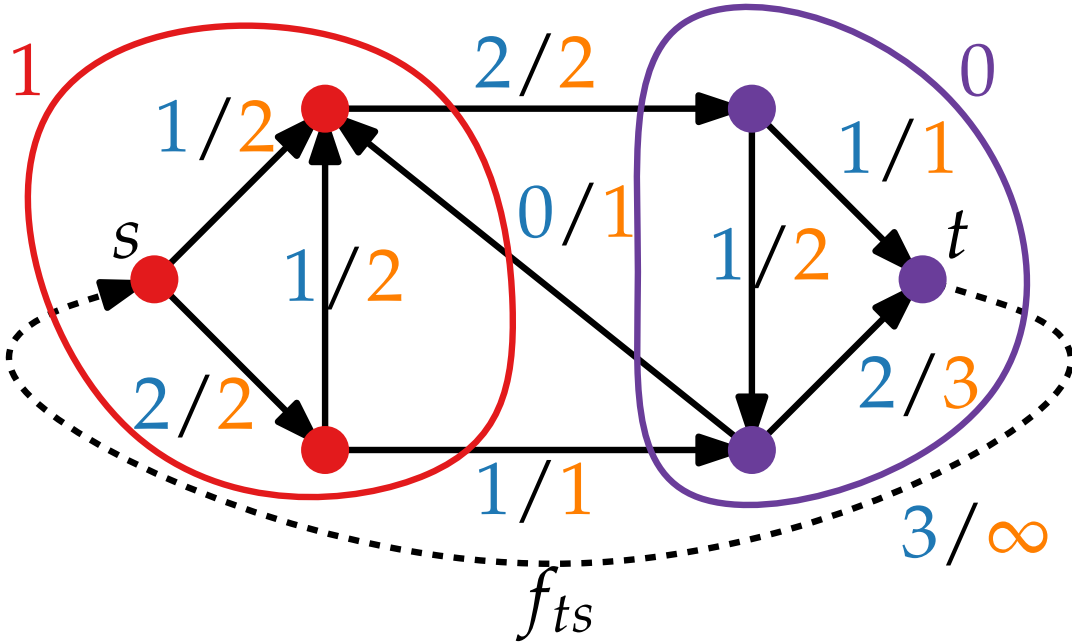
minimize	$\sum_{(u,v)\in E\setminus\{(t,s)\}} c_{uv} \cdot d_{uv}$	
subject to	$d_{uv} - p_u + p_v \geq 0$	
	$p_s - p_t \geq 1$	
	$d_{uv} \geq 0$	
	$p_u \geq 0$	

Primaler KS:
$\forall j$: Entweder $x_j = 0$ oder $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$

Dualer KS:
$\forall i$: Entweder $y_i = 0$ oder $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

Für einen maximalen Fluss und minimalen Schnitt gilt:

- Für Vorwärtskanten (u,v) des Schnitts gilt $f_{uv} = c_{uv}$.
  ($d_{uv} = 1$, also nach dualem KS: $f_{uv} = c_{uv}$.)
- Für Rückwärtskanten (u,v) des Schnitts gilt $f_{uv} = 0$.
  (Sonst wäre nach primalem KS: $d_{uv} - 0 + 1 = 0$.)



Einführung Lineare Programmierung

Ein Großteil bekannter Approximationsalgorithmen basiert auf linearer Programmierung.

- Lineare Programmierung (LP) und LP-Dualität
- Min-Max-Beziehungen
- Techniken LP-basierten Algorithmendesigns

Einführung Lineare Programmierung

Ein Großteil bekannter Approximationsalgorithmen basiert auf linearer Programmierung.

- Lineare Programmierung (LP) und LP-Dualität
- Min-Max-Beziehungen
- Techniken LP-basierten Algorithmendesigns

I) LP-Runden

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form

I) LP-Runden

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form

Berechne Lösung der LP-Relaxierung

I) LP-Runden

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form

Berechne Lösung der LP-Relaxierung

Runde zu ganzzahliger Lösung für Π

I) LP-Runden

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form

Berechne Lösung der LP-Relaxierung

Runde zu ganzzahliger Lösung für Π

Schwierigkeit: **Zulässige** Lösung für Π

I) LP-Runden

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form

Berechne Lösung der LP-Relaxierung

Runde zu ganzzahliger Lösung für Π

Schwierigkeit: **Zulässige** Lösung für Π

Approximationsgüte $\mathrm{ALG}/\mathrm{OPT}_{\Pi} \leq \mathrm{ALG}/\mathrm{OPT}_{\mathrm{relax}} \leq \alpha$

II) Primal-Dual-Ansatz

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

II) Primal-Dual-Ansatz

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Starte mit (trivialer) zulässiger Duallösung und unzulässiger Primallösung (z.B. alle Variable $= 0$).

II) Primal-Dual-Ansatz

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Starte mit (trivialer) zulässiger Duallösung und unzulässiger Primallösung (z.B. alle Variable $= 0$).

Berechne **duale** Lösung s_{d} und ganzzahlige Lösung s_{Π} für Π iterativ:

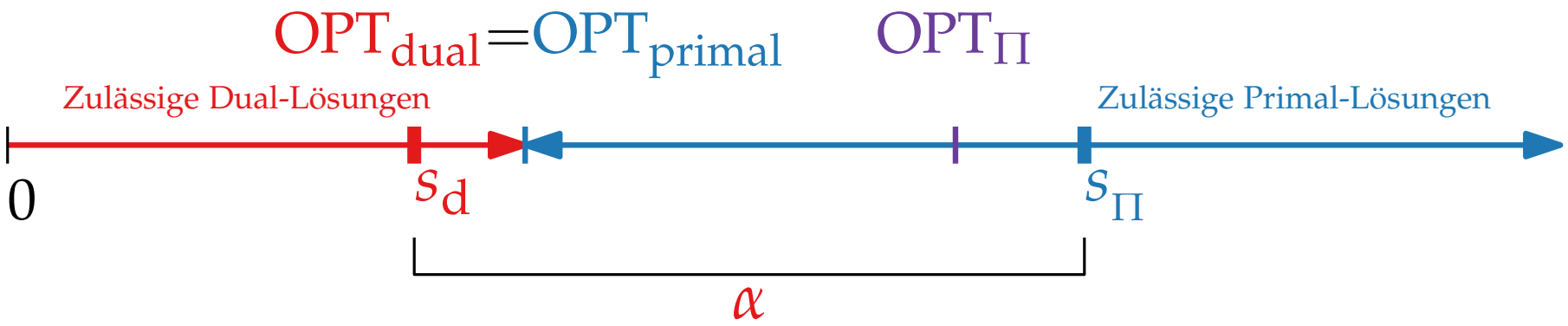
II) Primal-Dual-Ansatz

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Starte mit (trivialer) zulässiger Duallösung und unzulässiger Primallösung (z.B. alle Variable $= 0$).

Berechne **duale** Lösung s_{d} und ganzzahlige Lösung s_{Π} für Π
iterativ: erhöhe s_{d} entspr. KS und mache s_{Π} „ganzzahliger“.

II) Primal-Dual-Ansatz

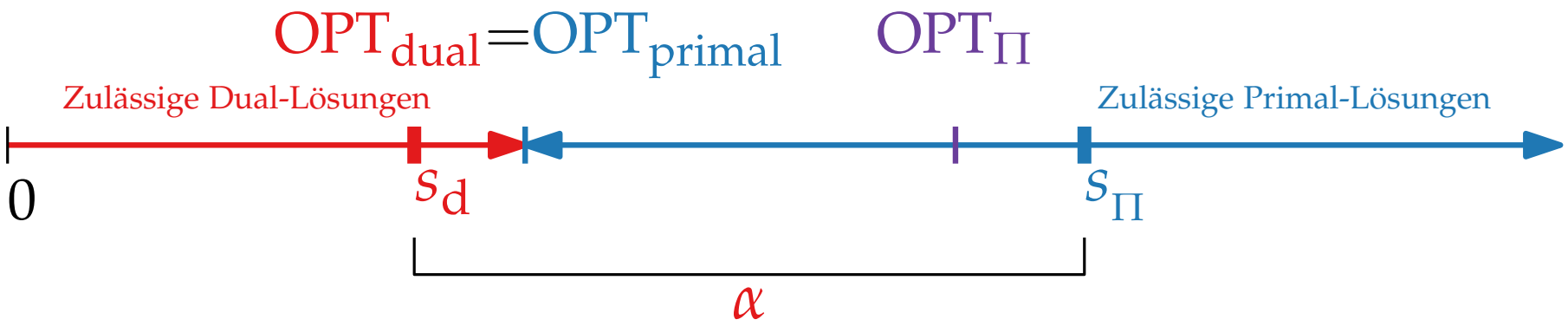


Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Starte mit (trivialer) zulässiger Duallösung und unzulässiger Primallösung (z.B. alle Variable $= 0$).

Berechne **duale** Lösung s_{d} und ganzzahlige Lösung s_{Π} für Π
iterativ: erhöhe s_{d} entspr. KS und mache s_{Π} „ganzzahliger“.

II) Primal-Dual-Ansatz



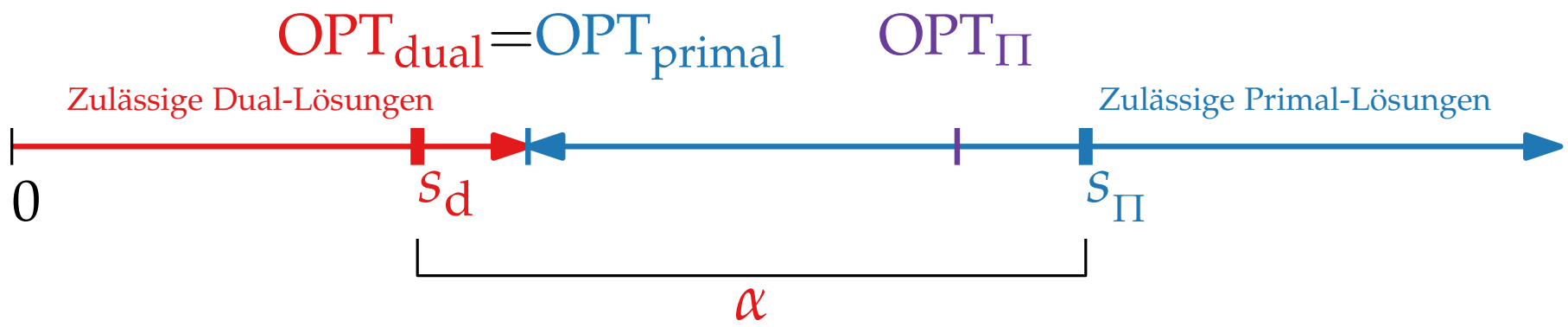
Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Starte mit (trivialer) zulässiger Duallösung und unzulässiger Primallösung (z.B. alle Variable $= 0$).

Berechne **duale** Lösung s_{d} und ganzzahlige Lösung s_{Π} für Π
iterativ: erhöhe s_{d} entspr. KS und mache s_{Π} „ganzzahliger“.

Approximationsgüte $\leq \mathrm{obj}(s_{\Pi}) / \mathrm{obj}(s_{\mathrm{d}})$

II) Primal-Dual-Ansatz



Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Starte mit (trivialer) zulässiger Duallösung und unzulässiger Primallösung (z.B. alle Variable $= 0$).

Berechne **duale** Lösung s_{d} und ganzzahlige Lösung s_{Π} für Π
iterativ: erhöhe s_{d} entspr. KS und mache s_{Π} „ganzzahliger“.

Approximationsgüte $\leq \mathrm{obj}(s_{\Pi}) / \mathrm{obj}(s_{\mathrm{d}})$

Vorteil:
Kommt ohne LP-„Maschinerie“ aus; ggf. schneller, flexibler.

III) Dual Fitting

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

III) Dual Fitting

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Kombinatorischer Algorithmus berechnet zul. Lösung s_{Π} und „unzulässige“ Duallösung s_{d}, die s_{Π} „voll auszahlt“,

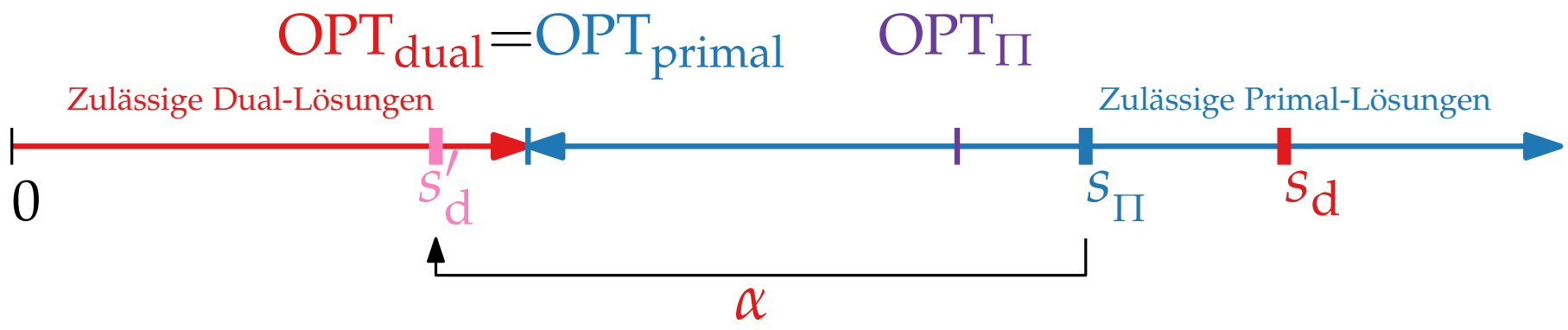
III) Dual Fitting

Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Kombinatorischer Algorithmus berechnet zul. Lösung s_{Π} und „unzulässige“ Duallösung s_{d}, die s_{Π} „voll auszahlt“,

d.h. $\mathrm{obj}(s_{\Pi}) \leq \mathrm{obj}(s_{\mathrm{d}})$.

III) Dual Fitting



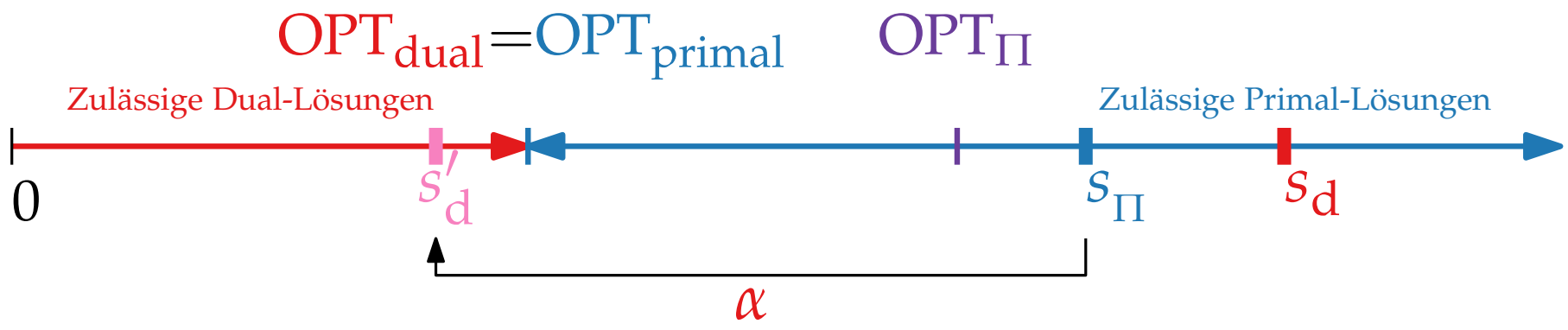
Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Kombinatorischer Algorithmus berechnet zul. Lösung s_{Π} und „unzulässige“ Duallösung s_{d}, die s_{Π} „voll auszahlt“,

d.h. $\mathrm{obj}(s_{\Pi}) \leq \mathrm{obj}(s_{\mathrm{d}})$.

Skaliere Dualvariablen, so dass neue Duallösung s'_{d} *zulässig*.

III) Dual Fitting



Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

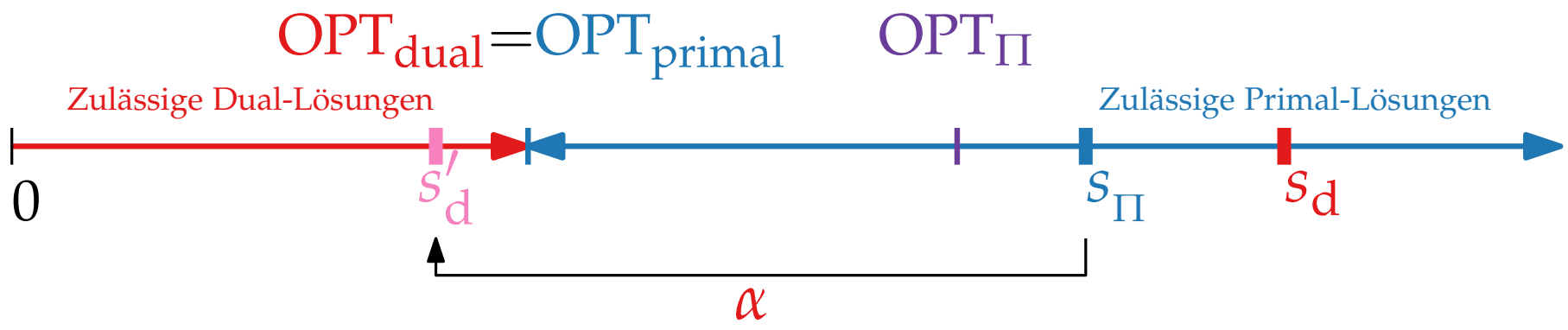
Kombinatorischer Algorithmus berechnet zul. Lösung s_{Π} und „unzulässige“ Duallösung s_{d}, die s_{Π} „voll auszahlt“,

d.h. $\mathrm{obj}(s_{\Pi}) \leq \mathrm{obj}(s_{\mathrm{d}})$.

Skaliere Dualvariablen, so dass neue Duallösung s'_{d} *zulässig*.

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{obj}(s'_{\mathrm{d}}) \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{dual}} \leq \mathrm{OPT}_{\Pi}$$

III) Dual Fitting



Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

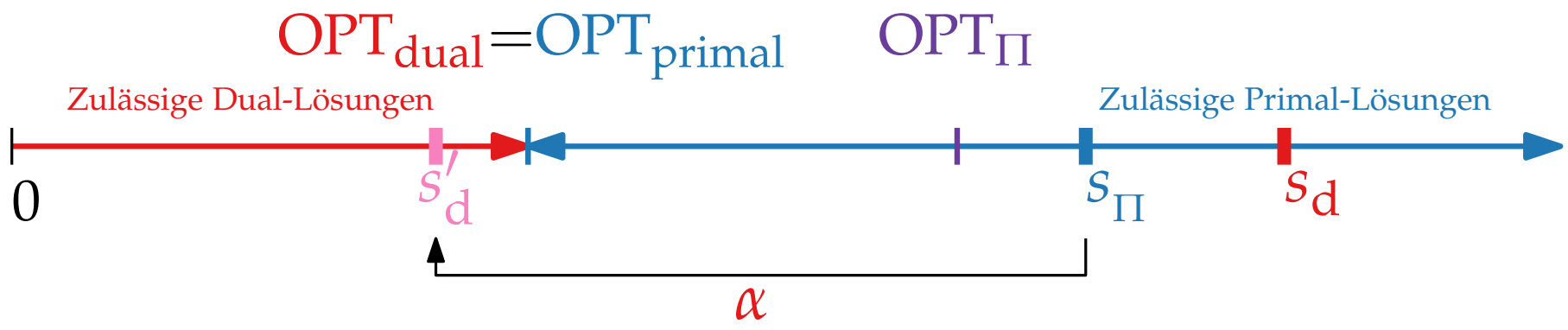
Kombinatorischer Algorithmus berechnet zul. Lösung s_{Π} und „unzulässige“ Duallösung s_{d}, die s_{Π} „voll auszahlt“,

d.h. $\mathrm{obj}(s_{\Pi}) \leq \mathrm{obj}(s_{\mathrm{d}})$.

Skaliere Dualvariablen, so dass neue Duallösung s'_{d} *zulässig*.

$$\Rightarrow \mathrm{obj}(s_{\Pi})/\alpha = \mathrm{obj}(s'_{\mathrm{d}}) \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{dual}} \leq \mathrm{OPT}_{\Pi}$$

III) Dual Fitting



Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Kombinatorischer Algorithmus berechnet zul. Lösung s_{Π} und „unzulässige“ Duallösung s_{d}, die s_{Π} „voll auszahlt“,

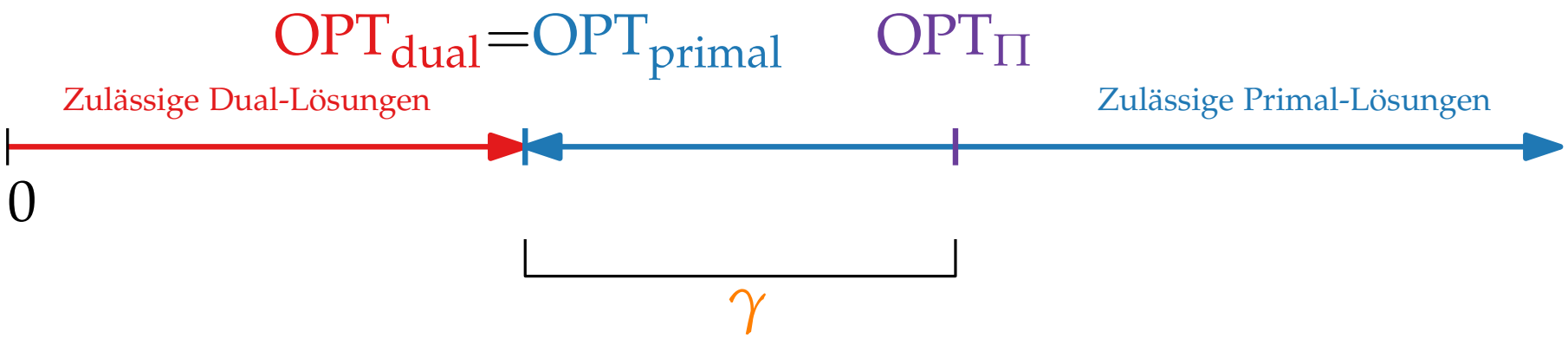
d.h. $\mathrm{obj}(s_{\Pi}) \leq \mathrm{obj}(s_{\mathrm{d}})$.

Skaliere Dualvariablen, so dass neue Duallösung s'_{d} *zulässig*.

$\Rightarrow \mathrm{obj}(s_{\Pi})/\alpha = \mathrm{obj}(s'_{\mathrm{d}}) \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{dual}} \leq \mathrm{OPT}_{\Pi}$

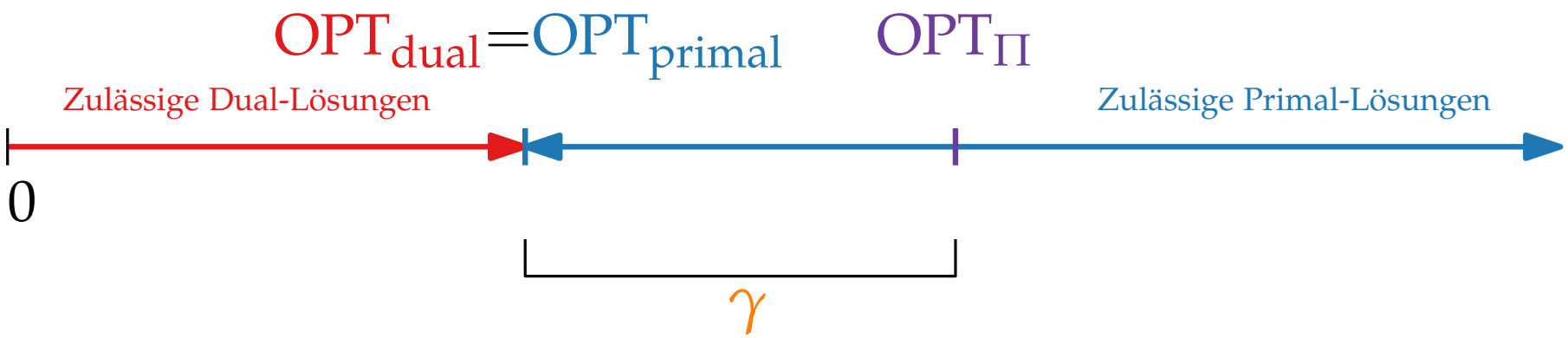
$\Rightarrow$ Skalierungsfaktor α ist Approximationsfaktor.

Wichtig: Integrality Gap



Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

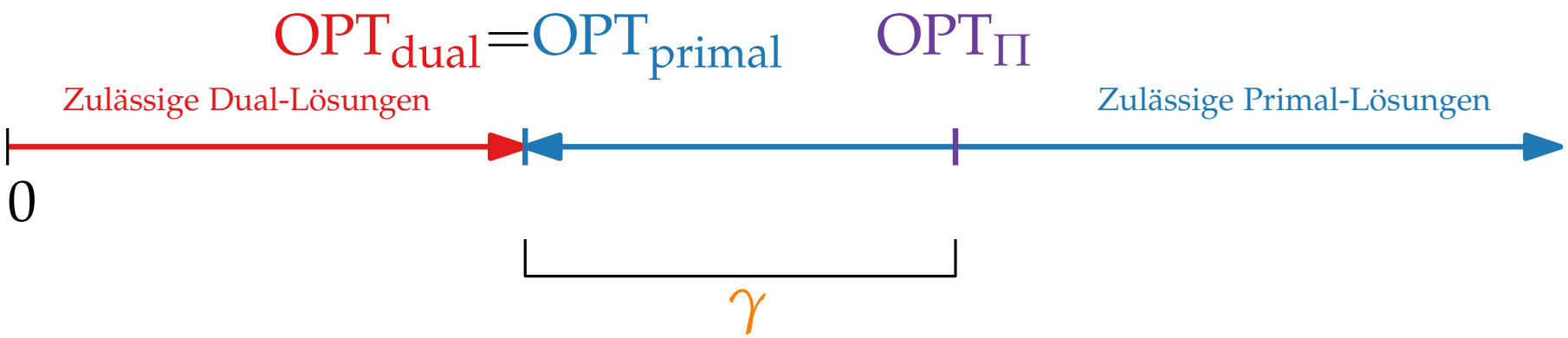
Wichtig: Integrality Gap



Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Ohne Ausnutzung weiterer Eigenschaften sind alle diese Methoden höchstens so gut wie das *Integrality Gap* der LP-Relaxierung:

Wichtig: Integrality Gap

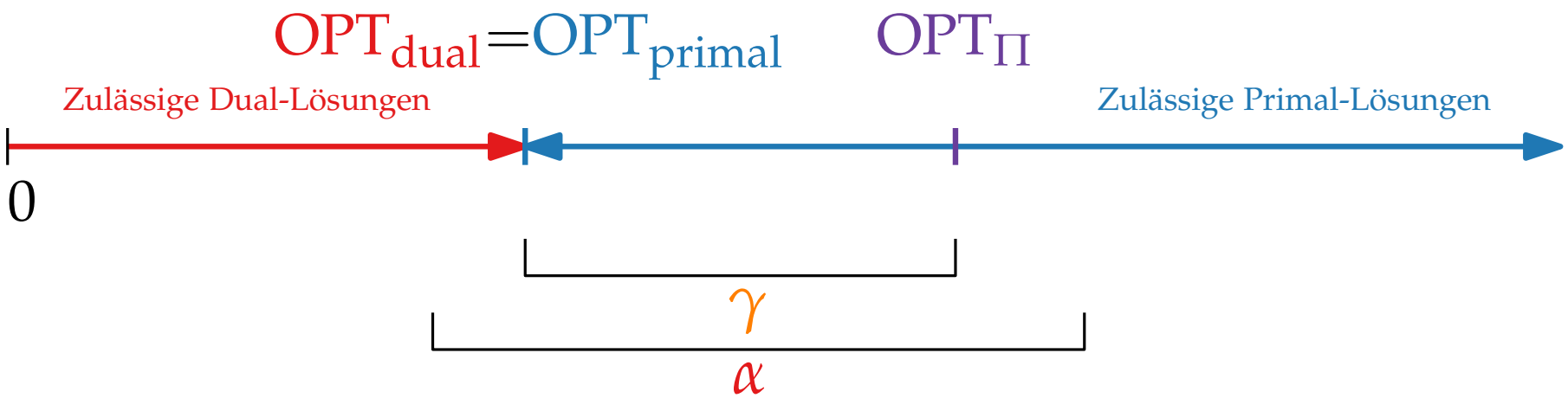


Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Ohne Ausnutzung weiterer Eigenschaften sind alle diese Methoden höchstens so gut wie das *Integrality Gap* der LP-Relaxierung:

$$\gamma = \sup_{I} \frac{\mathrm{OPT}_{\Pi}(I)}{\mathrm{OPT}_{\mathrm{primal}}(}$$

Wichtig: Integrality Gap



Betrachte Minimierungsproblem Π in ILP-Form.

Ohne Ausnutzung weiterer Eigenschaften sind alle diese Methoden höchstens so gut wie das *Integrality Gap* der LP-Relaxierung:

$$\alpha \geq \gamma = \sup_{I} \frac{\mathrm{OPT}_{\Pi}(I)}{\mathrm{OPT}_{\mathrm{primal}}(}$$