Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Chair for
INFORMATICS I
Efficient Algorithms and
Knowledge-Based Systems

Institute for Informatics

Approximationsalgorithmen

Set Cover
und
Shortest SuperString

2. Vorlesung

Philipp Kindermann

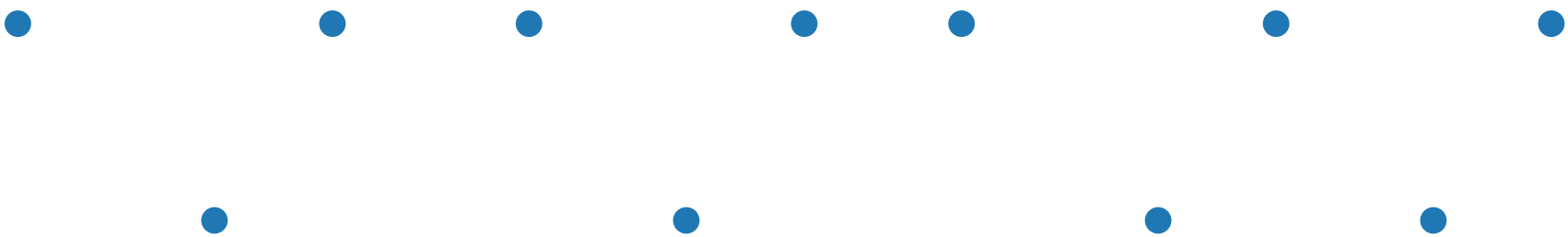
Wintersemester 2019/20

SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U

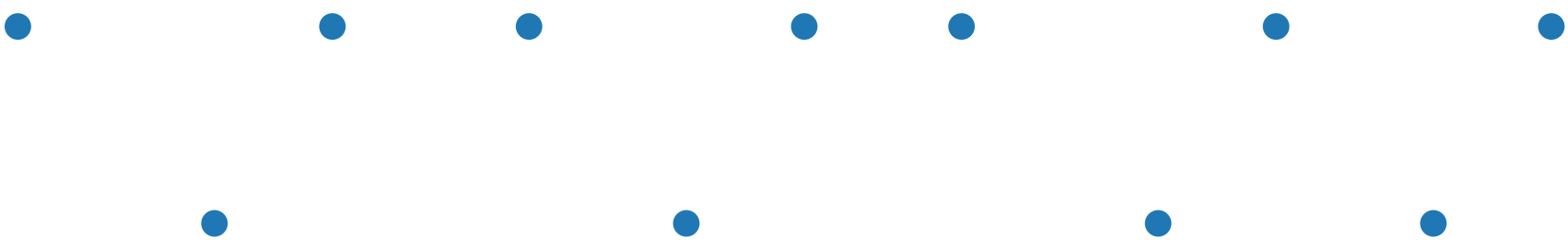
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U



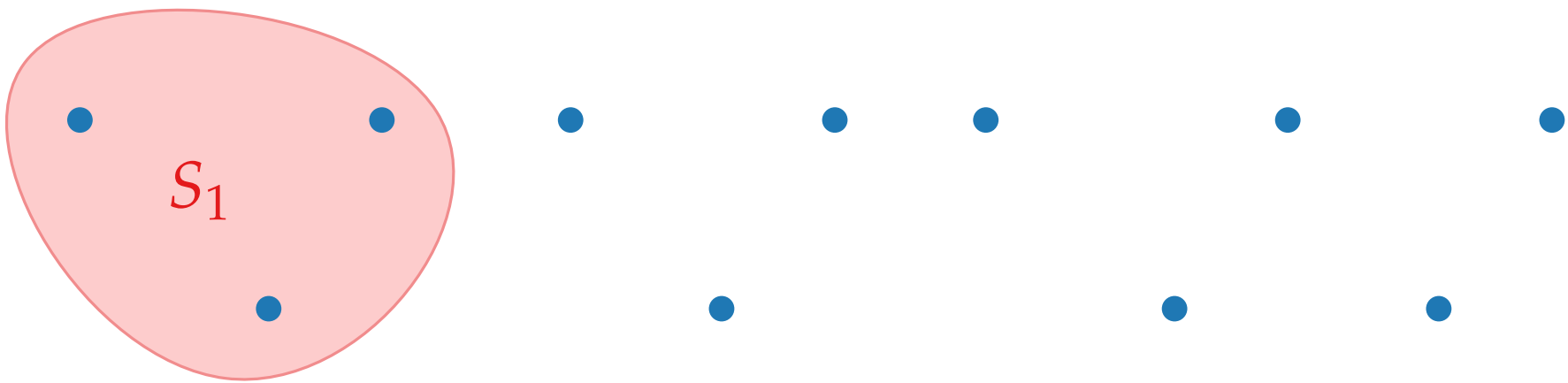
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U



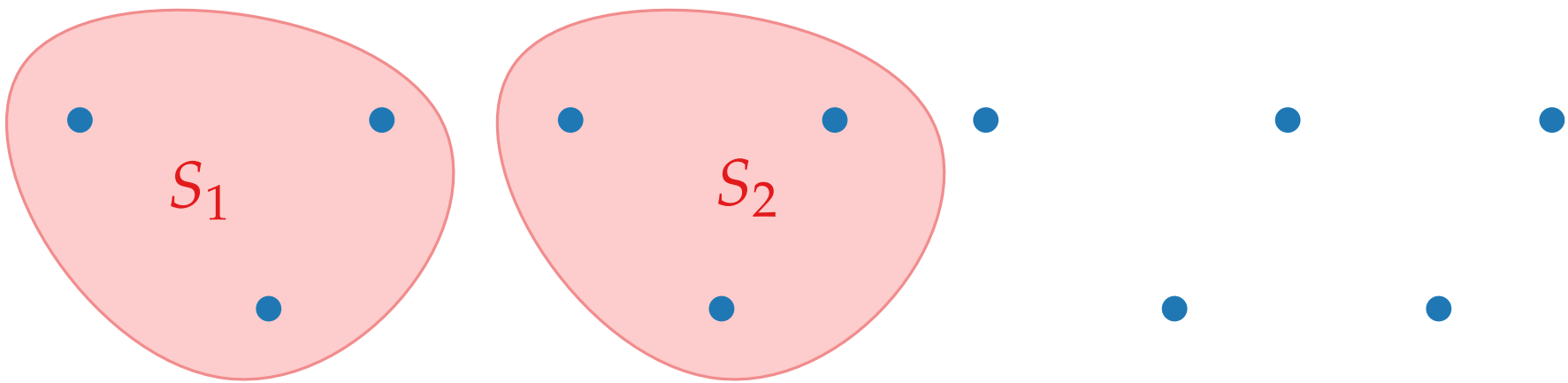
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U



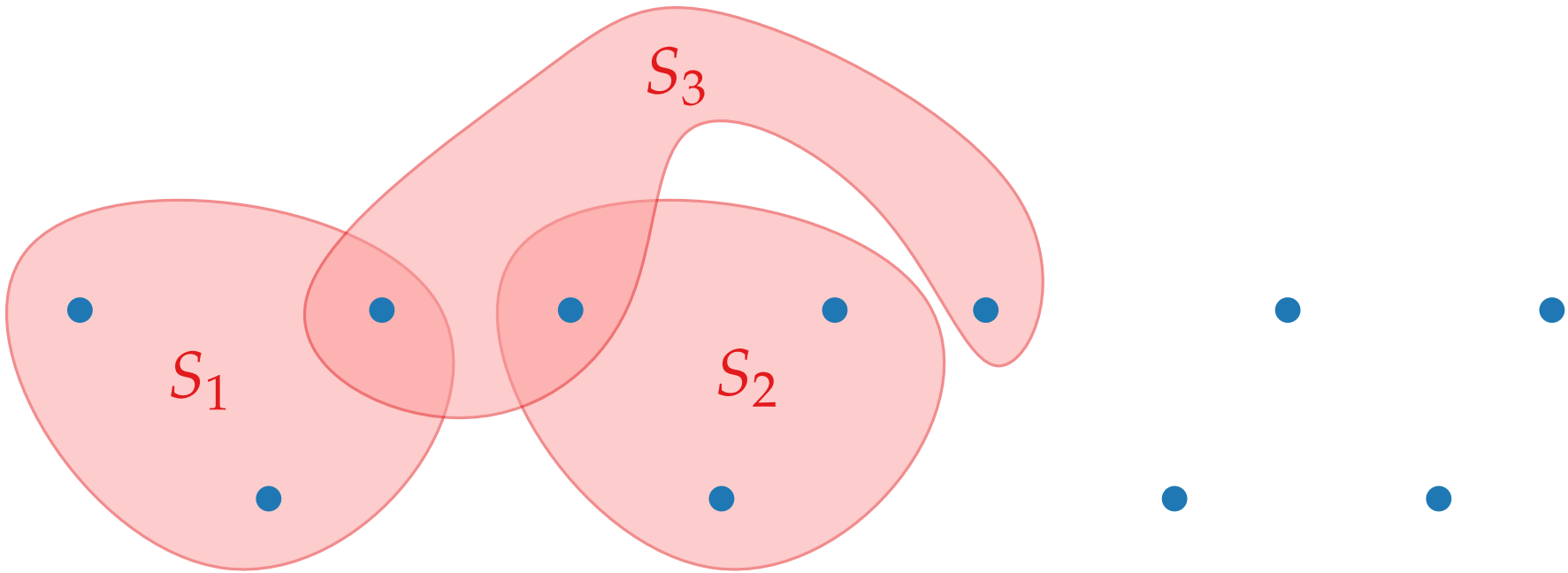
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U



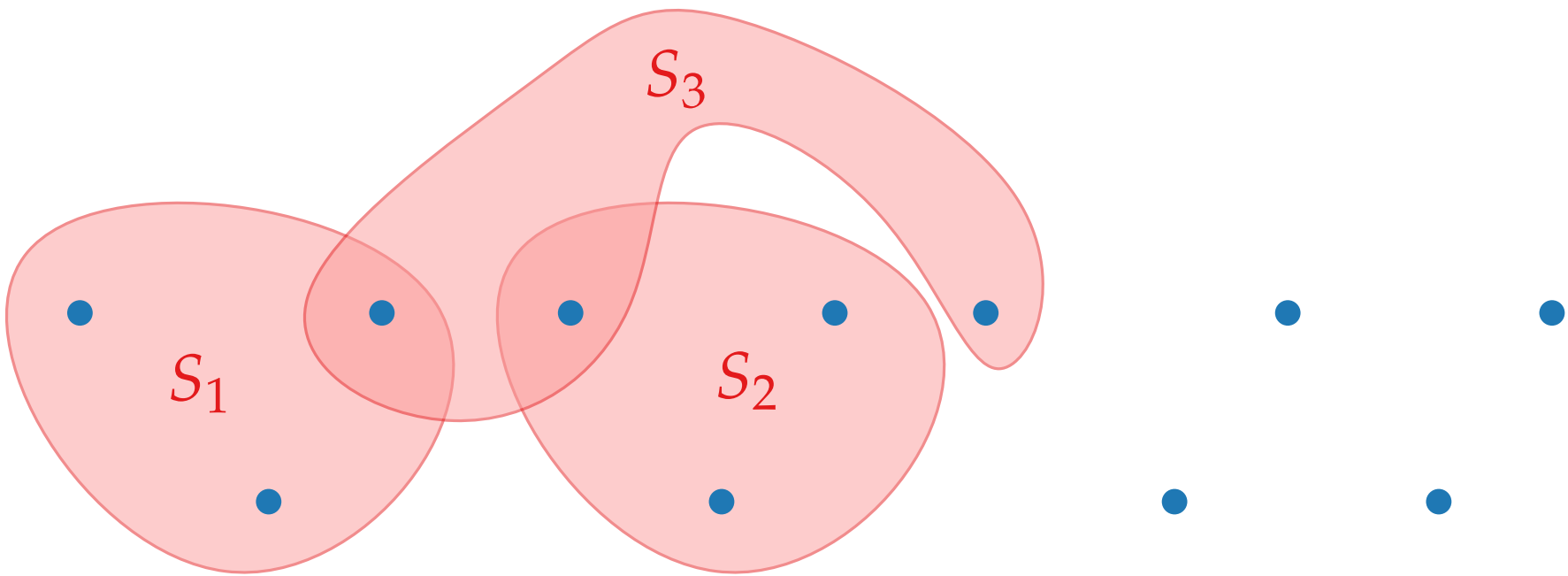
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U



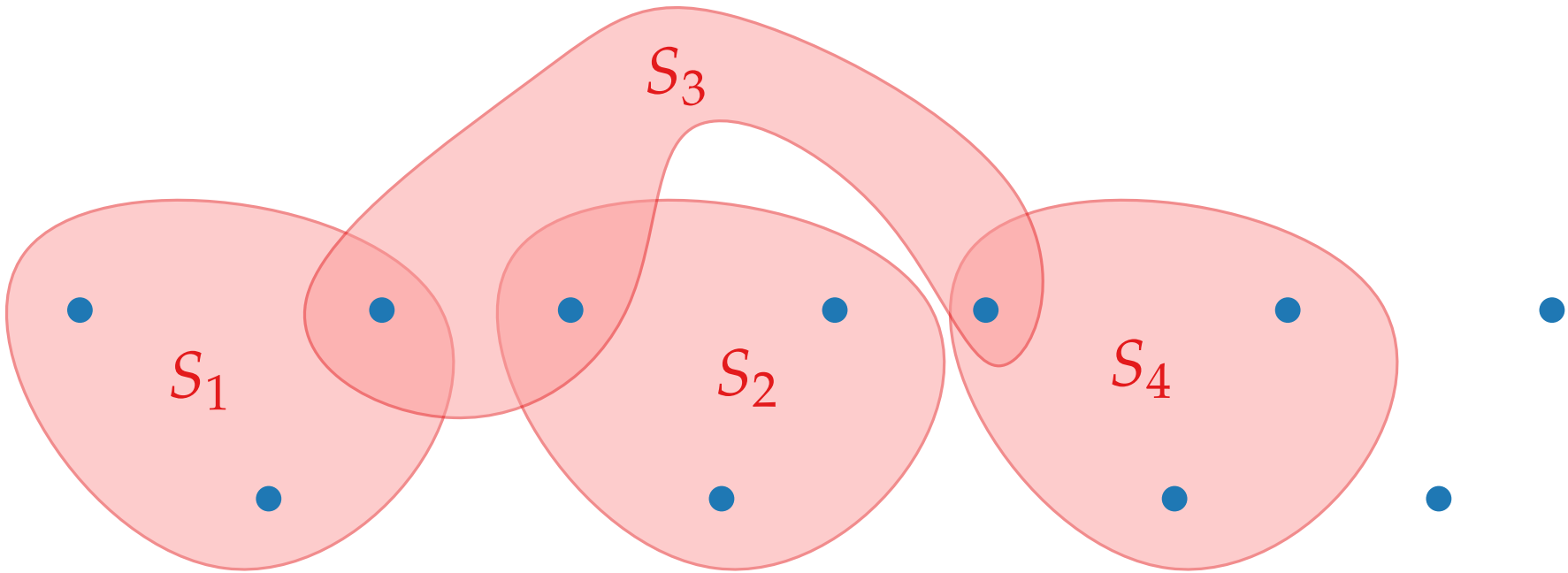
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.



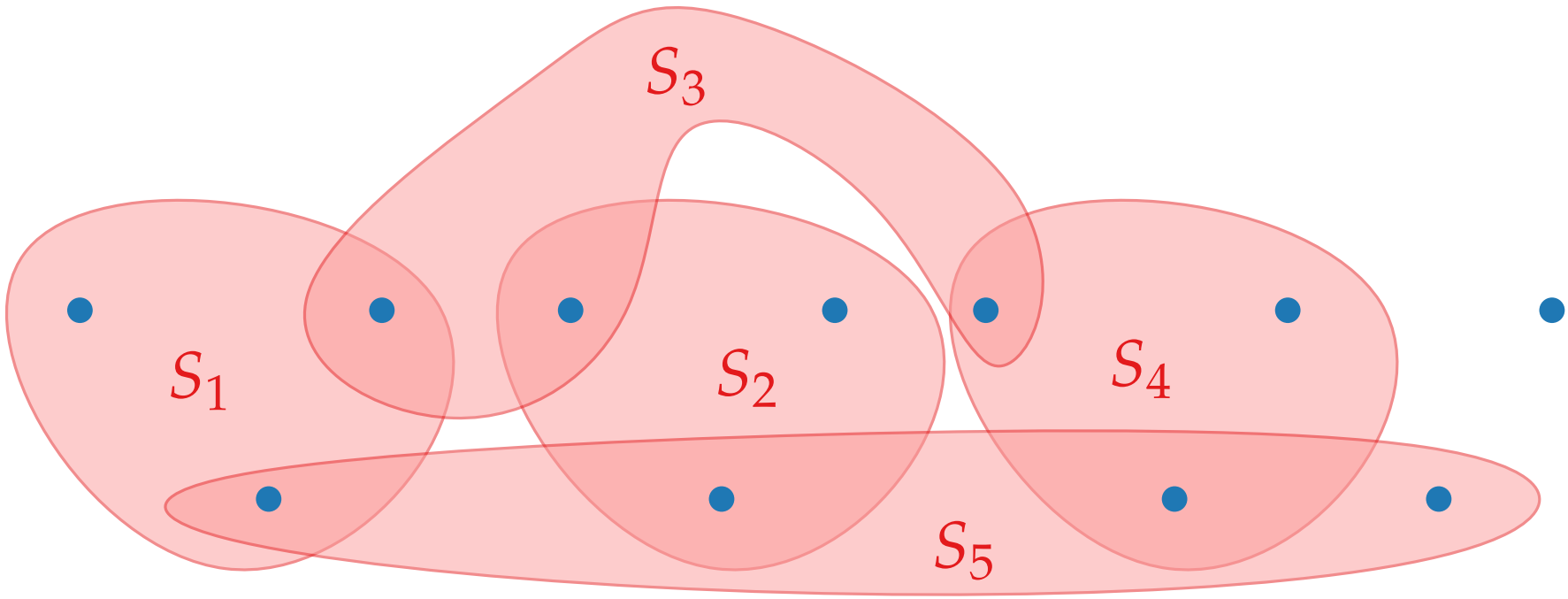
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.



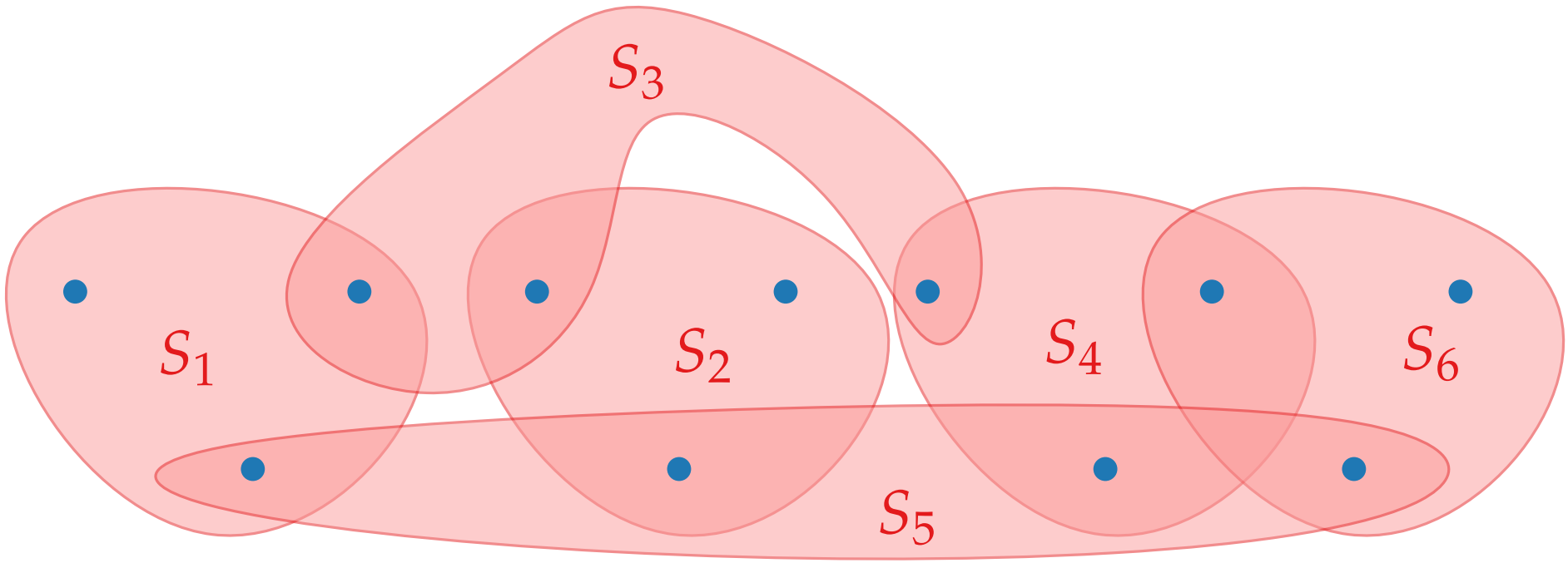
SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.



SetCover (card.)

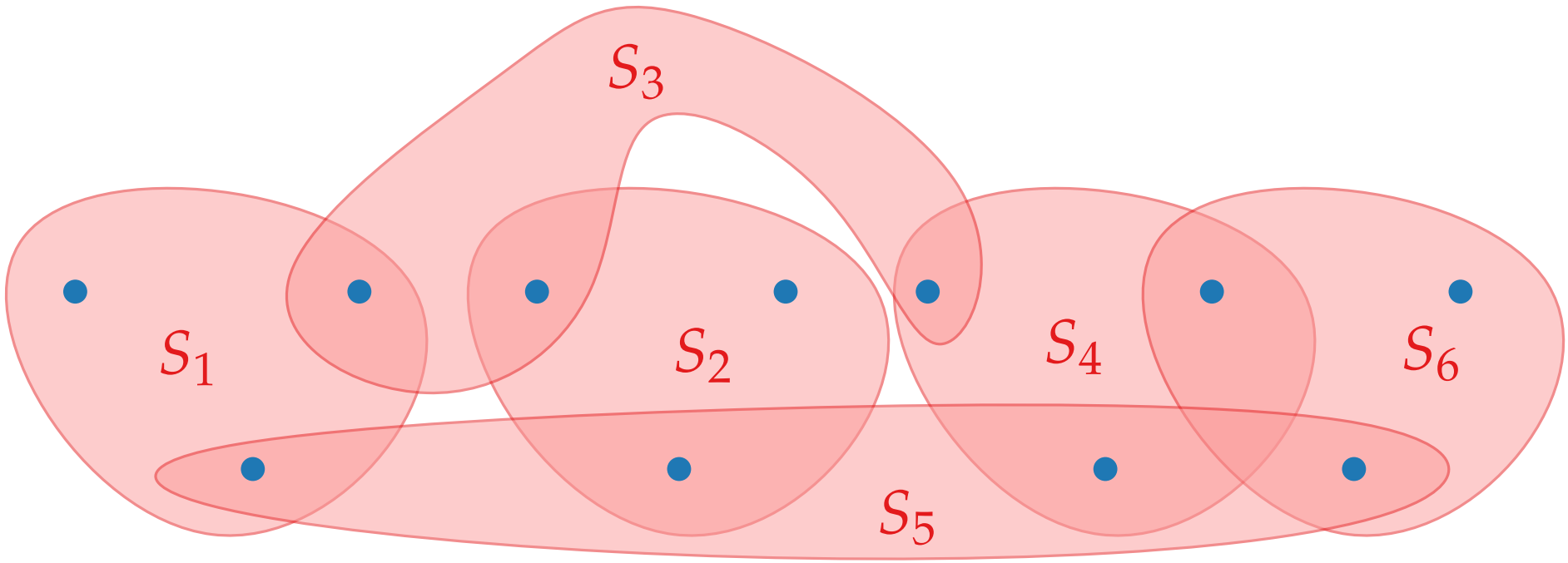
Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.



SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

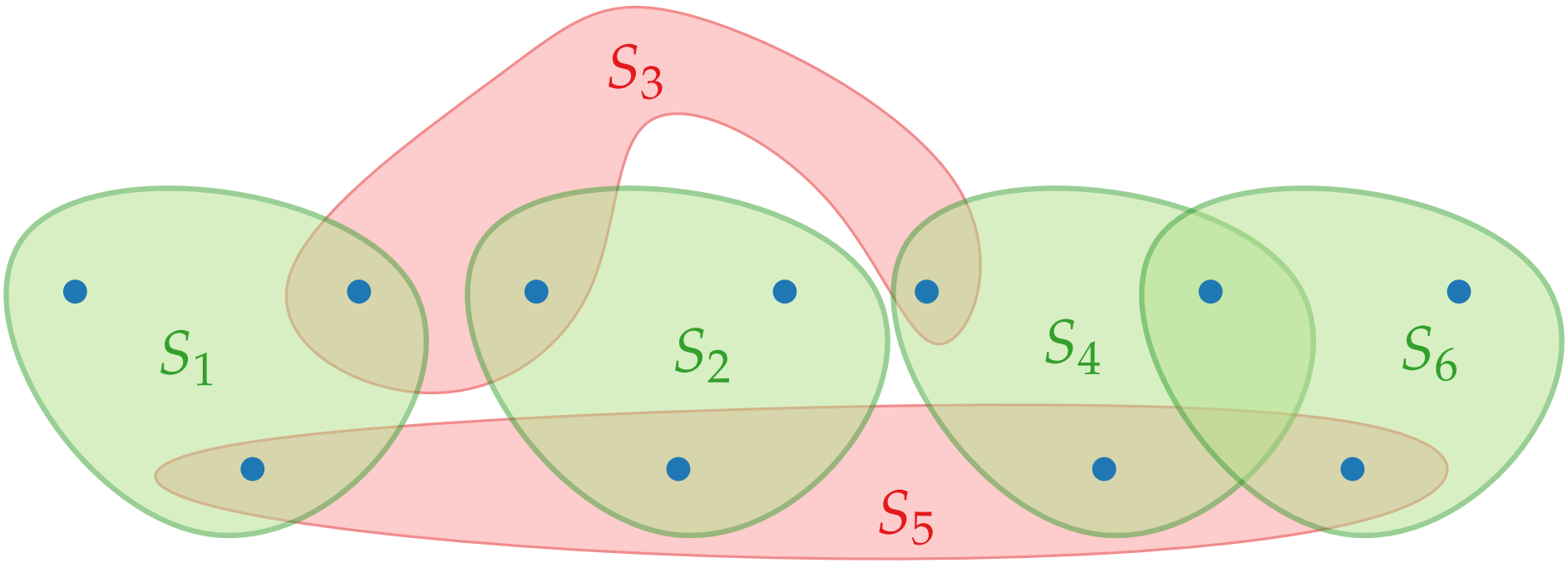
Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität.



SetCover (card.)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

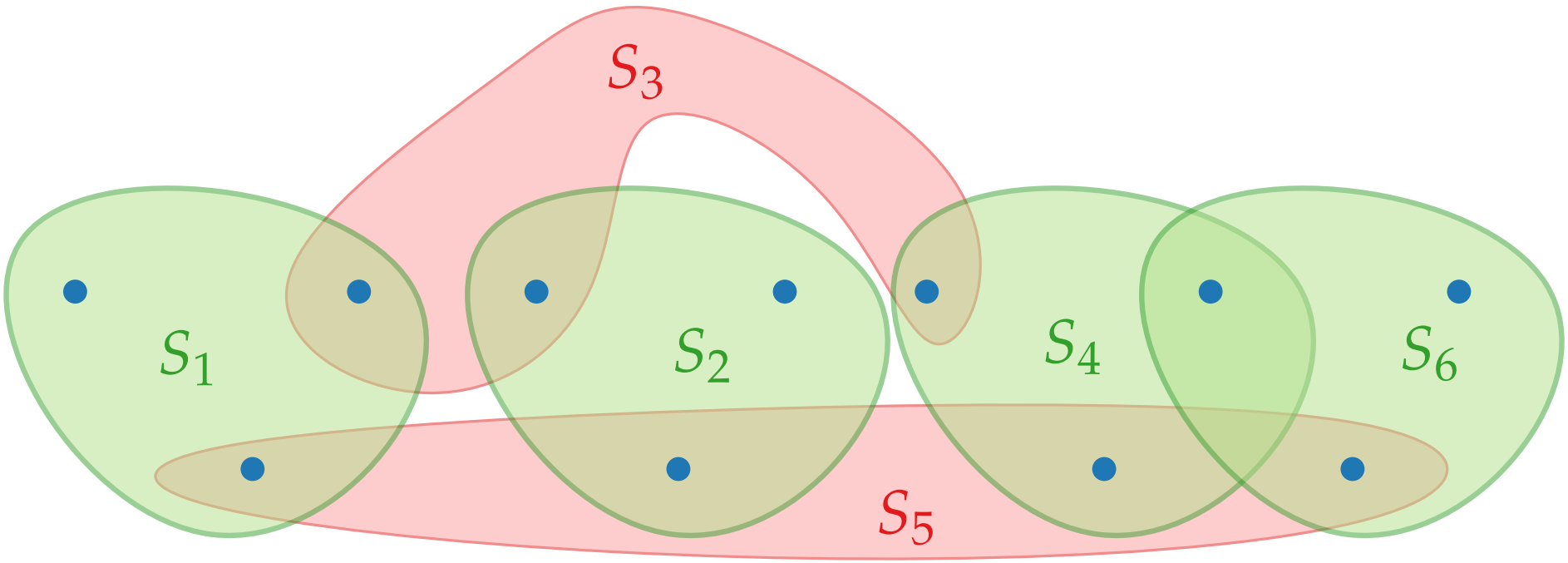
Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität.



SetCover (allgemein)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität.

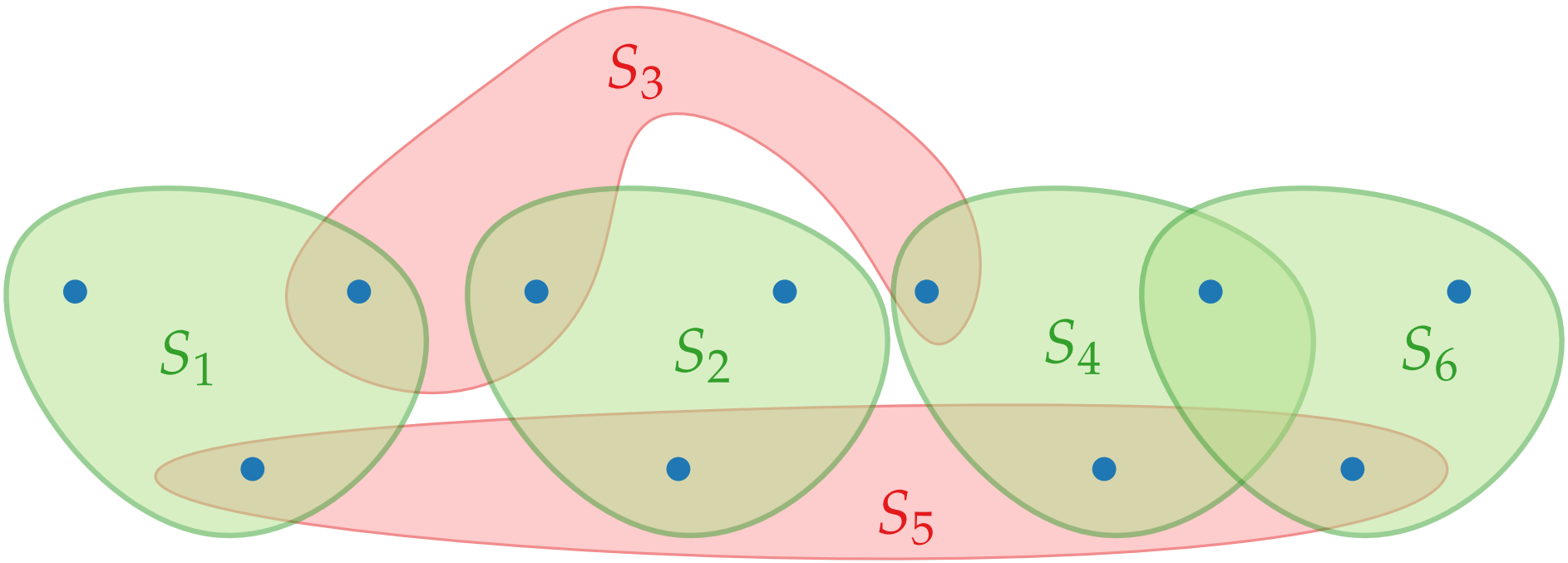


SetCover (allgemein)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Jedes $S \in \mathcal{S}$ hat Kosten $c(S) > 0$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler Kardinalität.



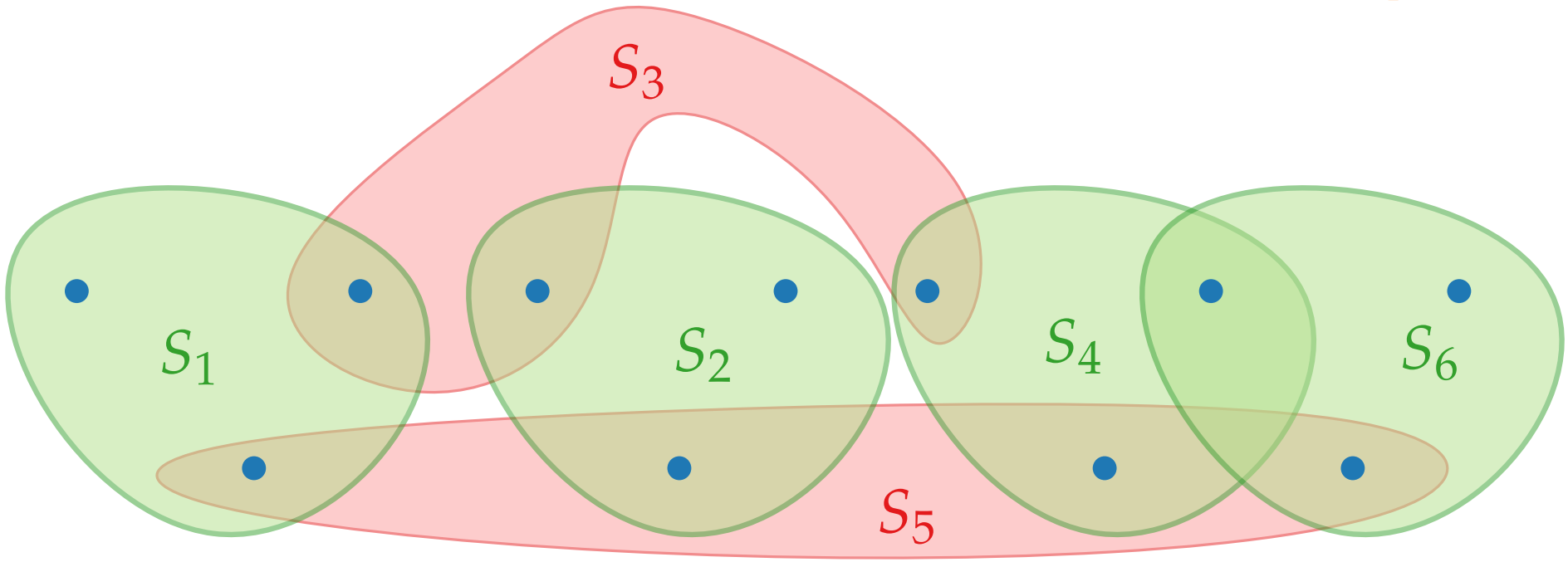
SetCover (allgemein)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Jedes $S \in \mathcal{S}$ hat Kosten $c(S) > 0$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler ~~Kardinalität~~.

Kosten $c(\mathcal{S}') := \sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S)$.



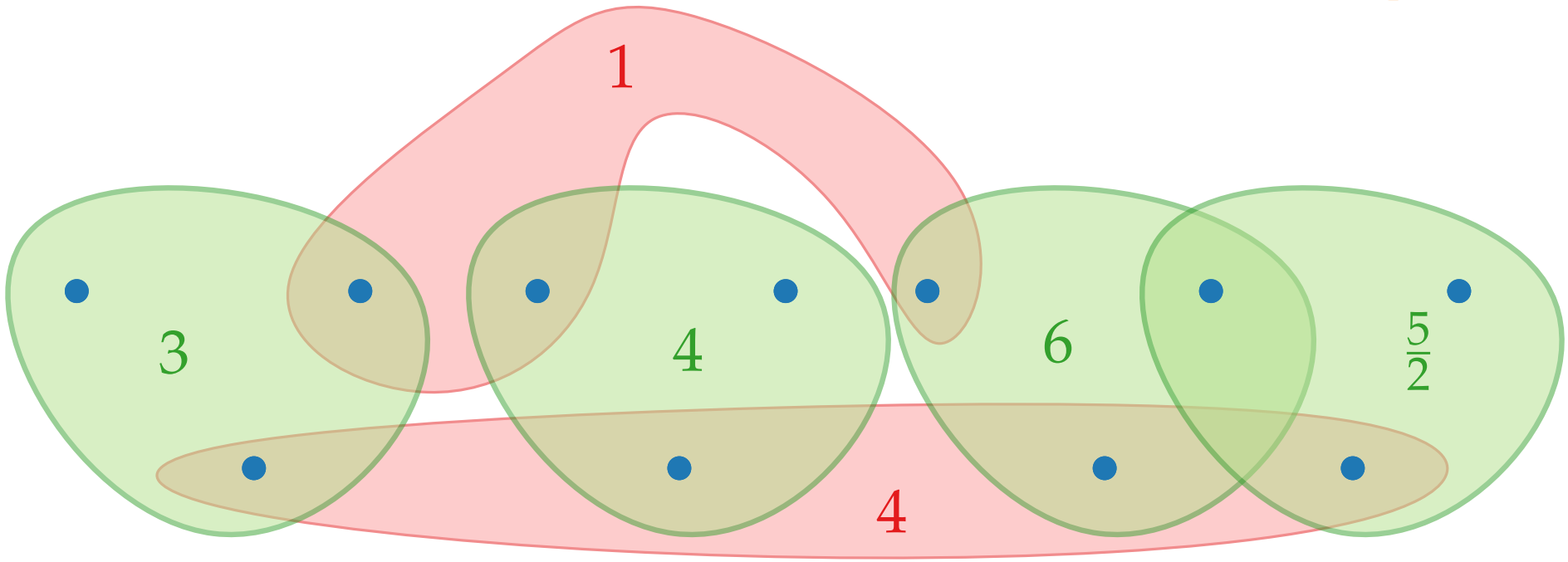
SetCover (allgemein)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Jedes $S \in \mathcal{S}$ hat Kosten $c(S) > 0$.

Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler ~~Kardinalität~~.

Kosten $c(\mathcal{S}') := \sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S)$.



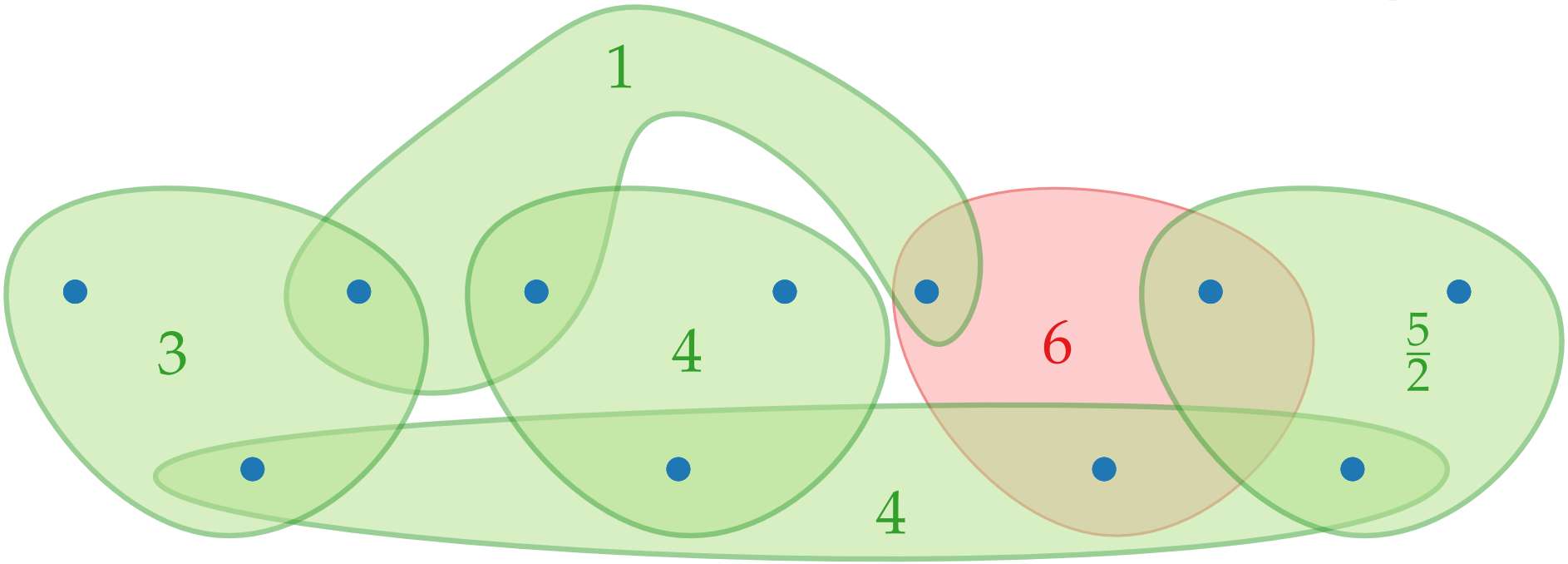
SetCover (allgemein)

Gegeben sei eine **Grundmenge** U und eine Familie $\mathcal{S}$ von **Teilmengen** von U mit $\bigcup \mathcal{S} = U$.

Jedes $S \in \mathcal{S}$ hat Kosten $c(S) > 0$.

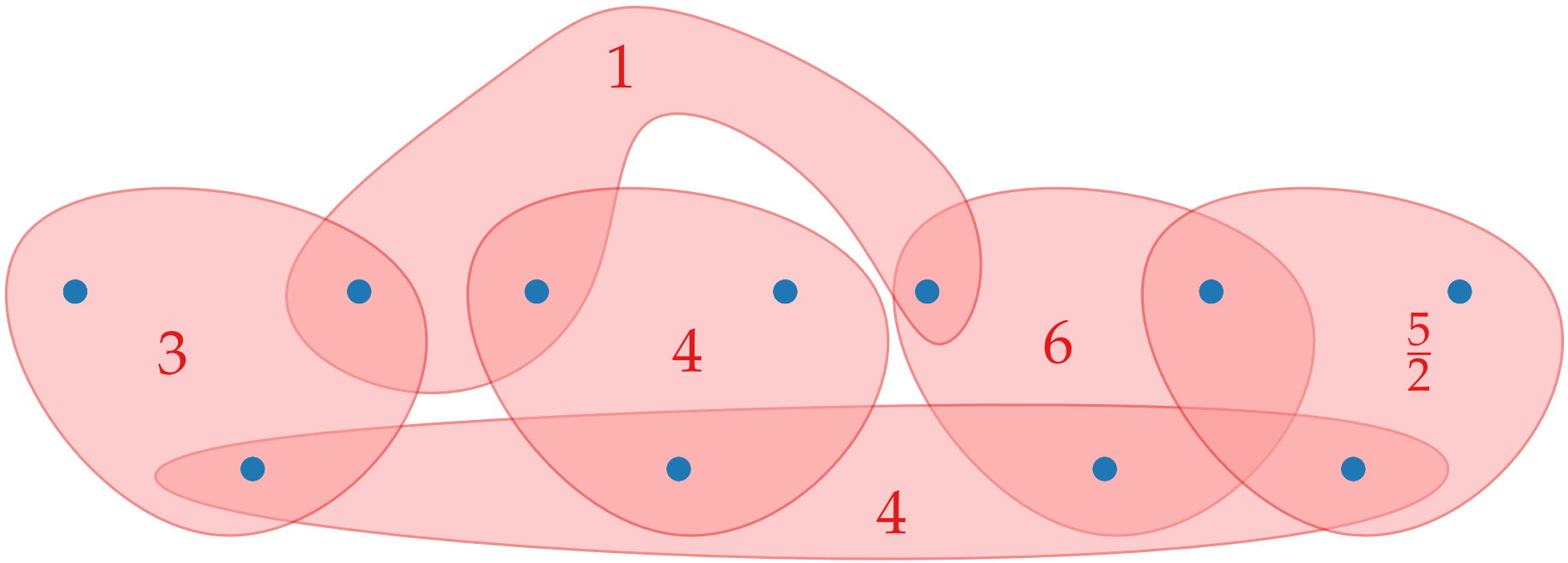
Gesucht ist eine **Überdeckung** $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ von U (d.h. $\bigcup \mathcal{S}' = U$) minimaler ~~Kardinalität~~.

Kosten $c(\mathcal{S}') := \sum_{S \in \mathcal{S}'} c(S)$.



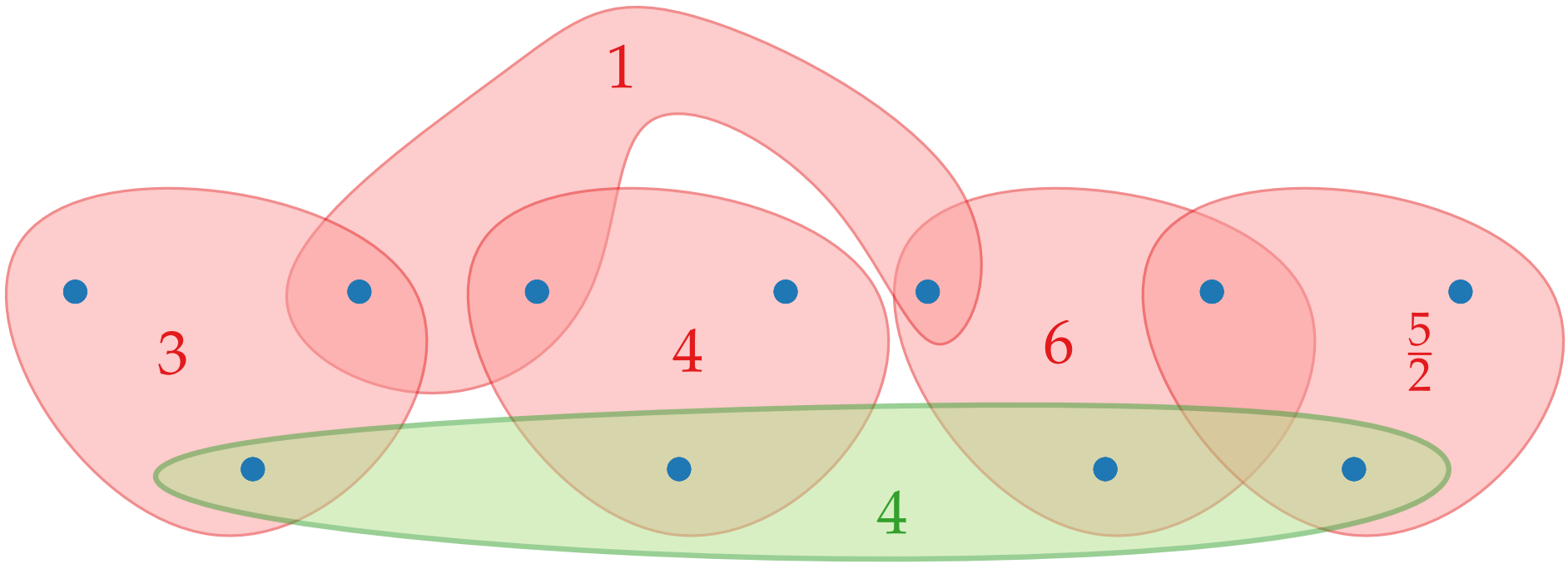
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?



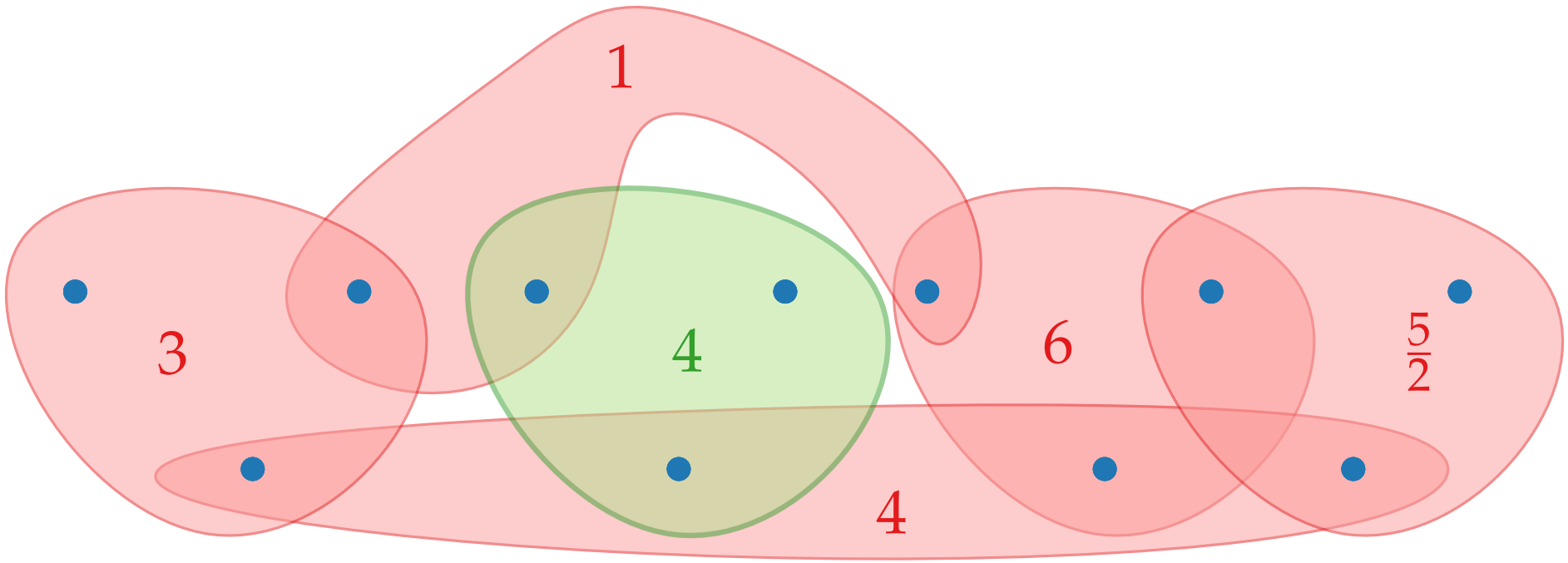
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

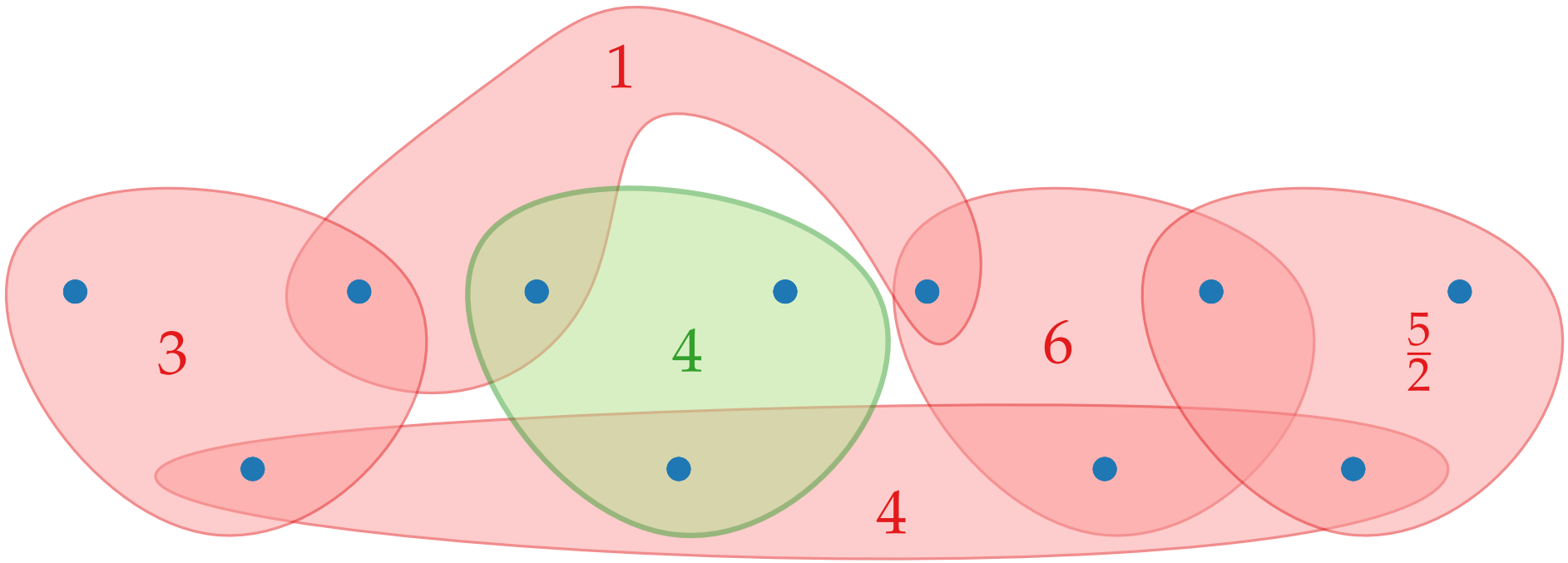
Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

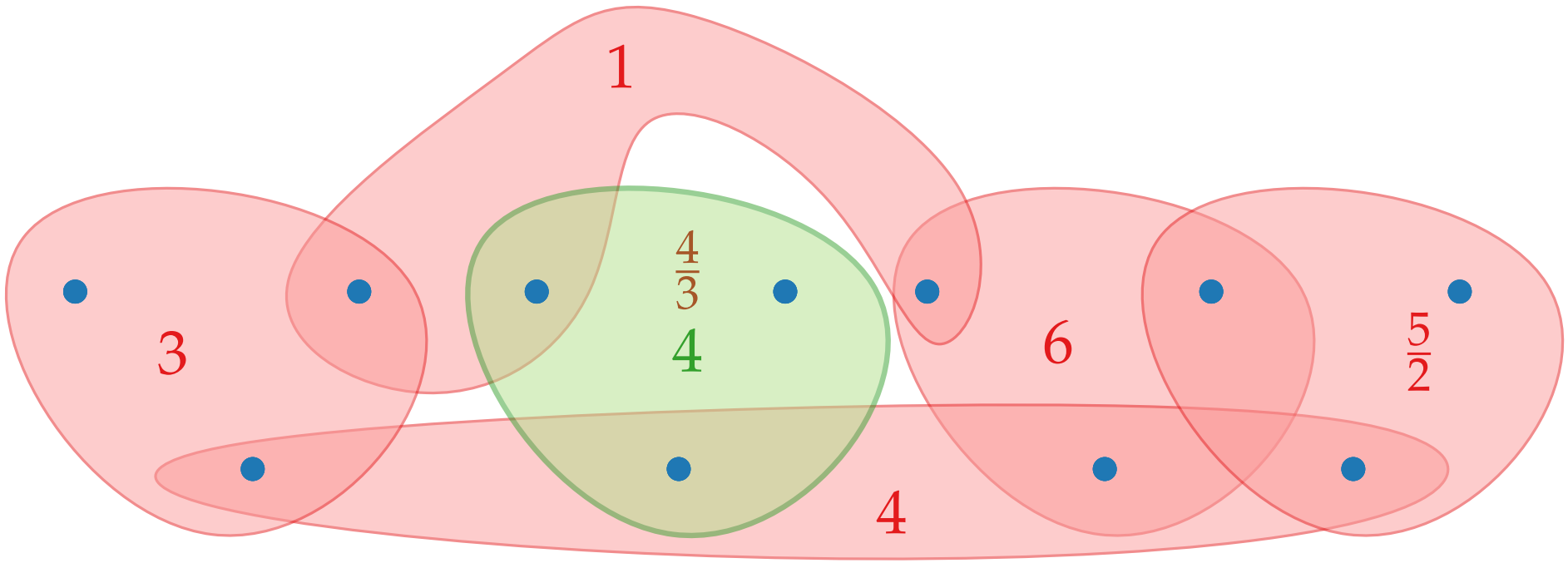
Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

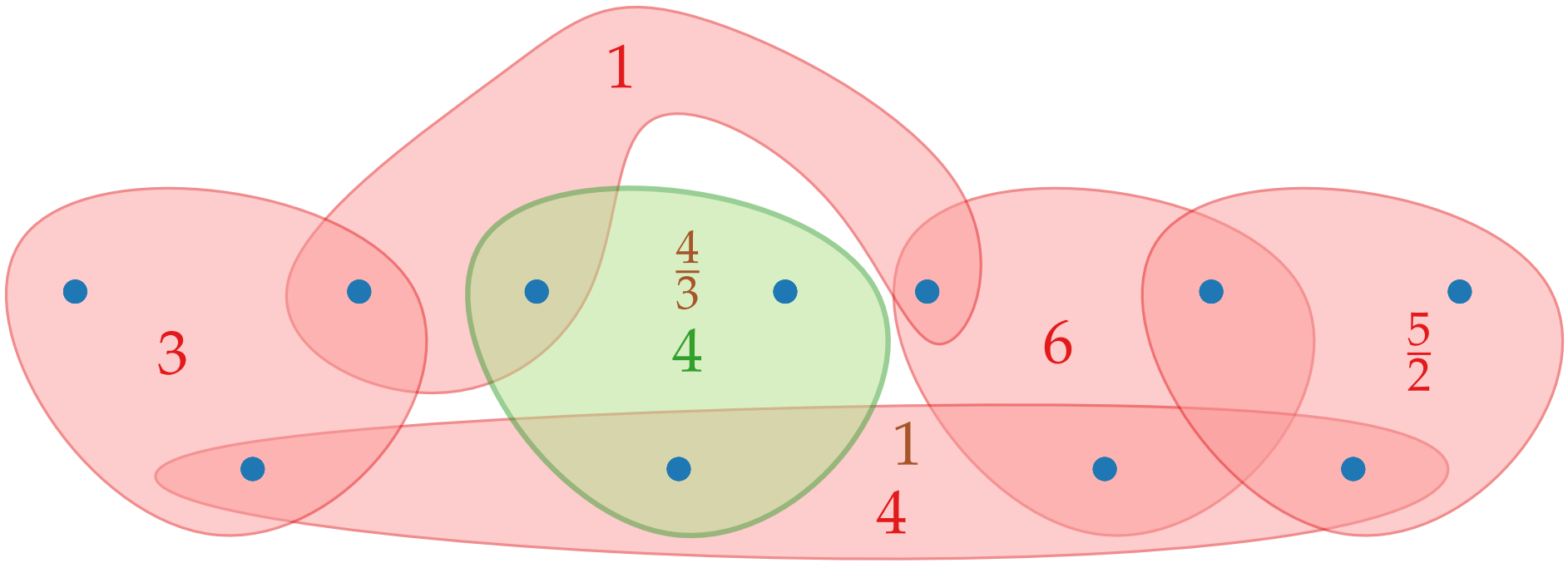
Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

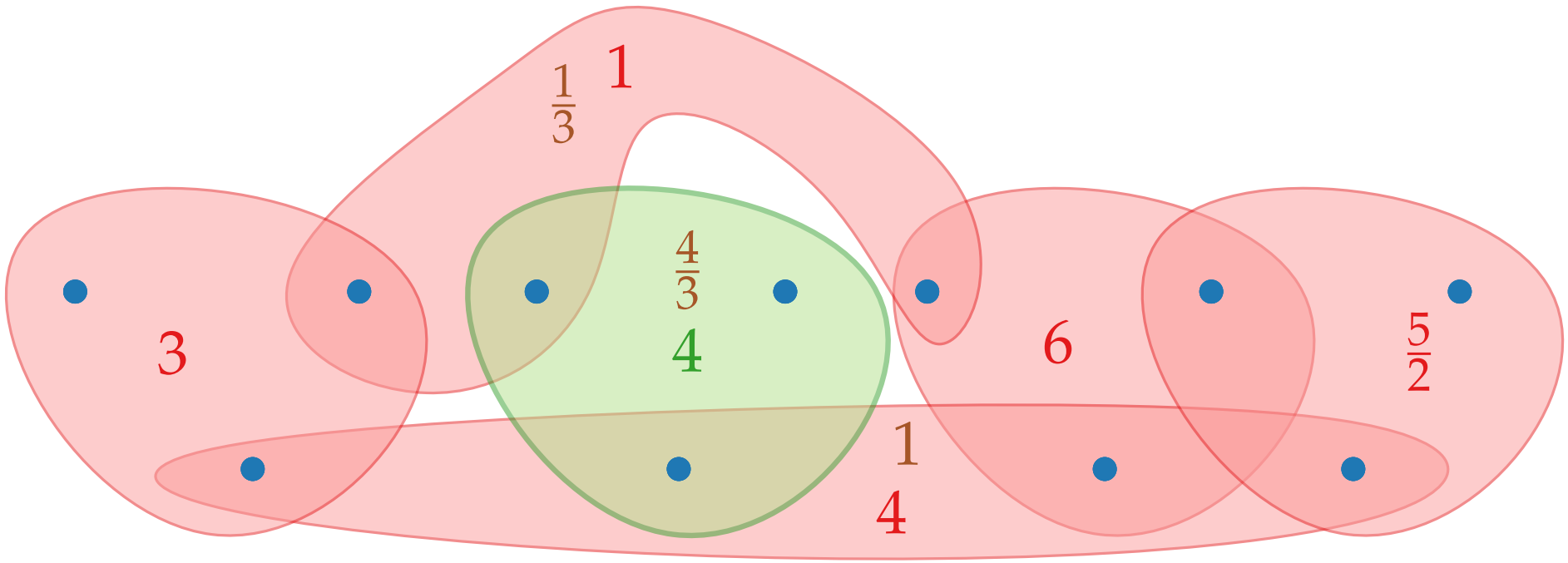
Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

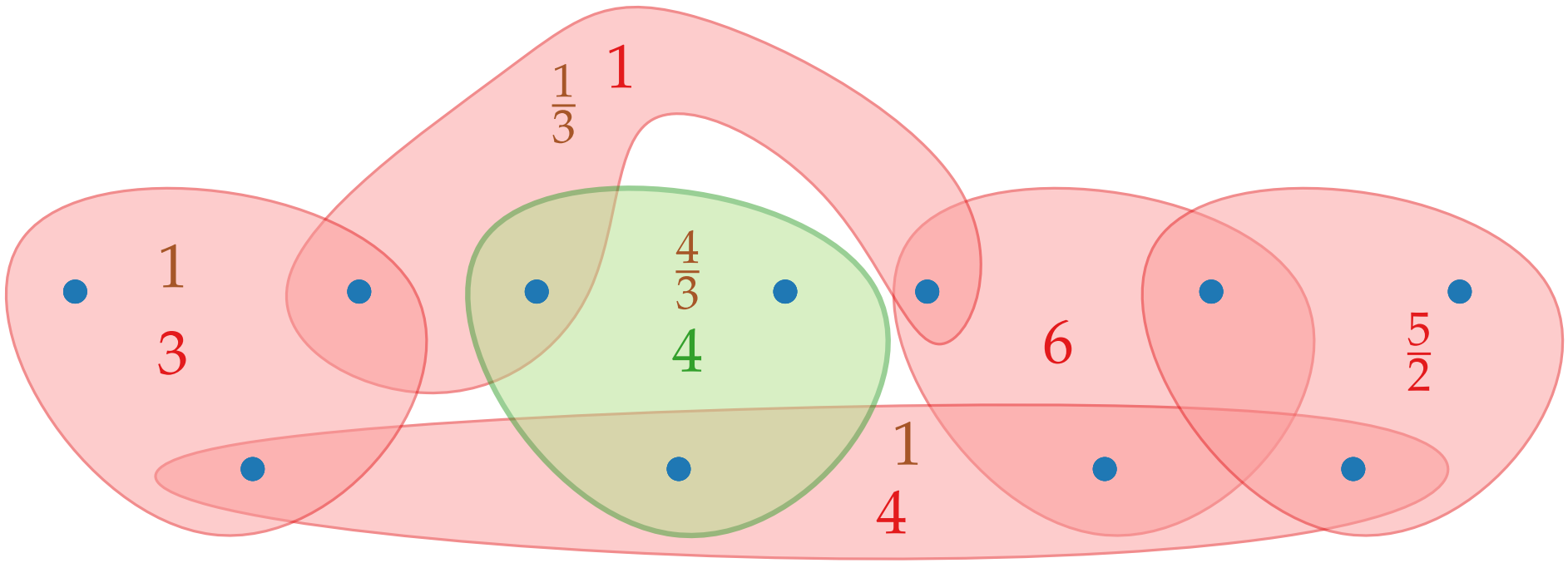
Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

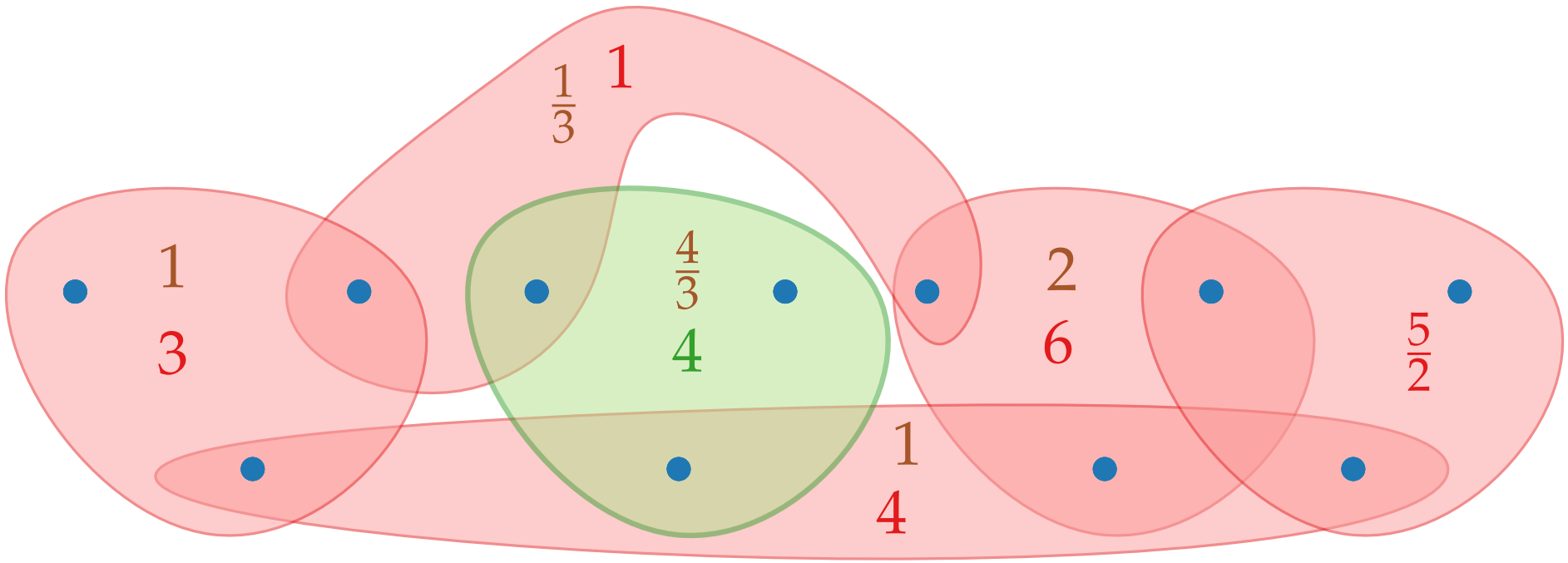
Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

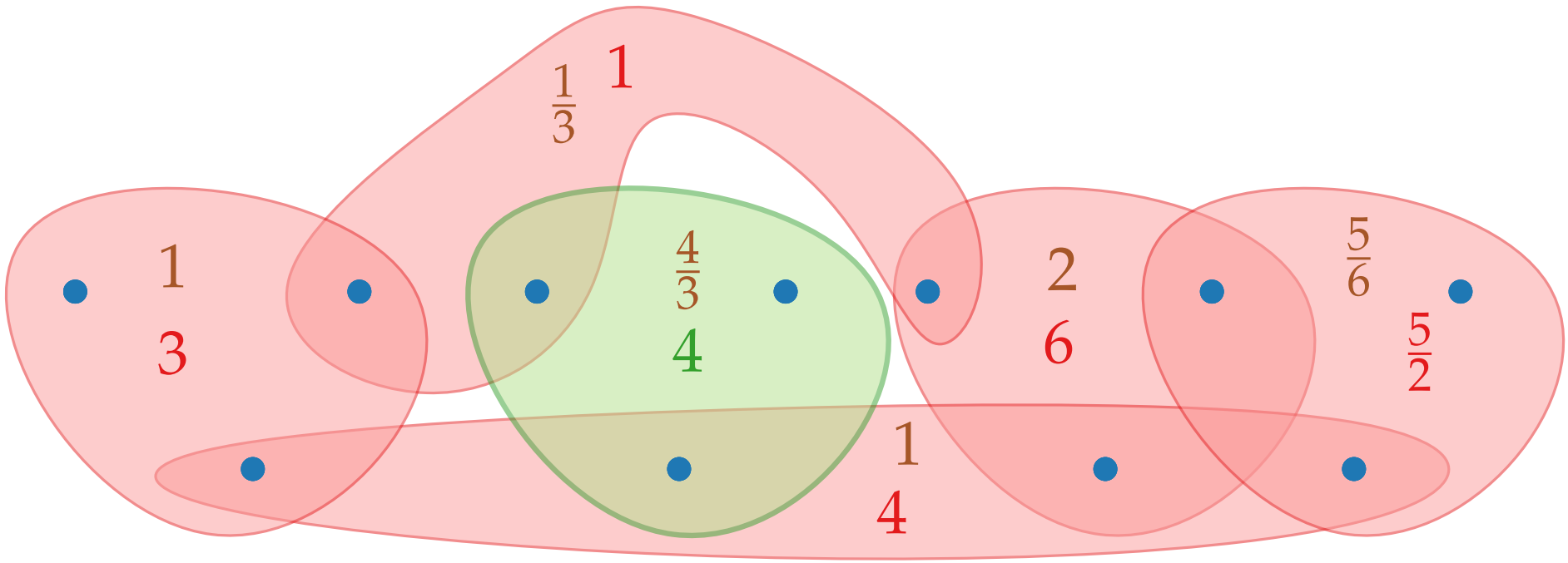
Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

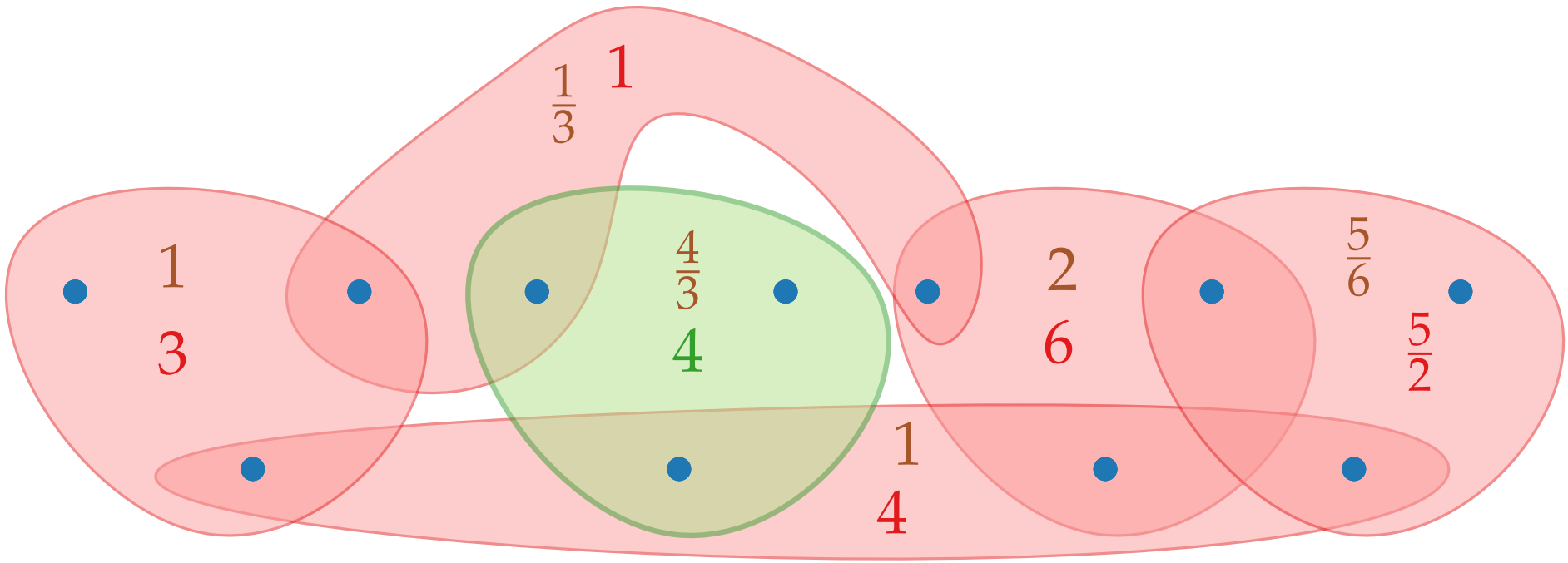


Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?



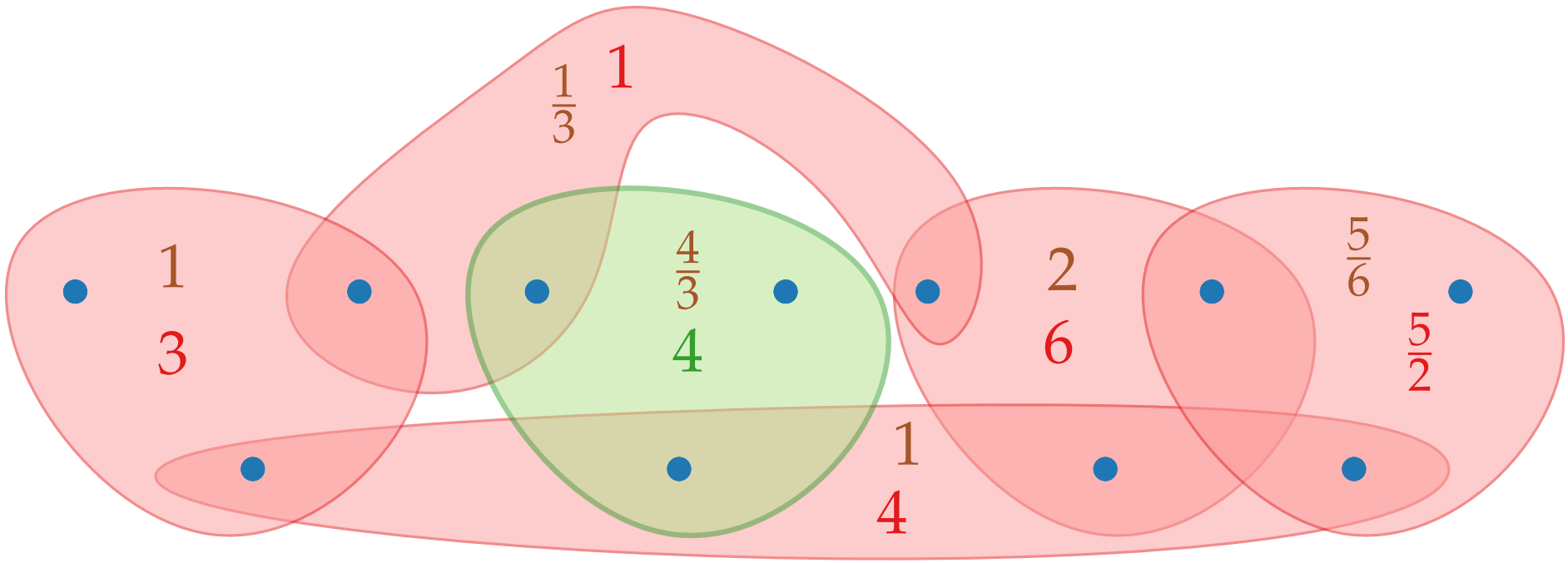
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



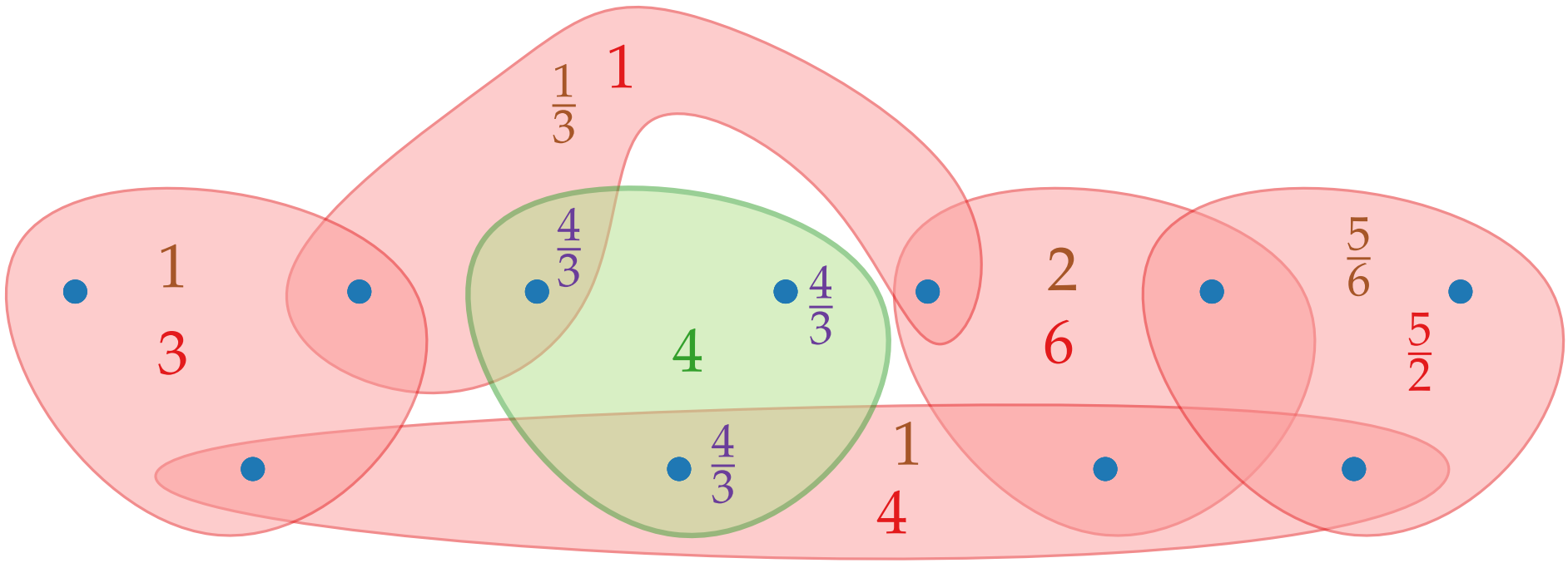
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



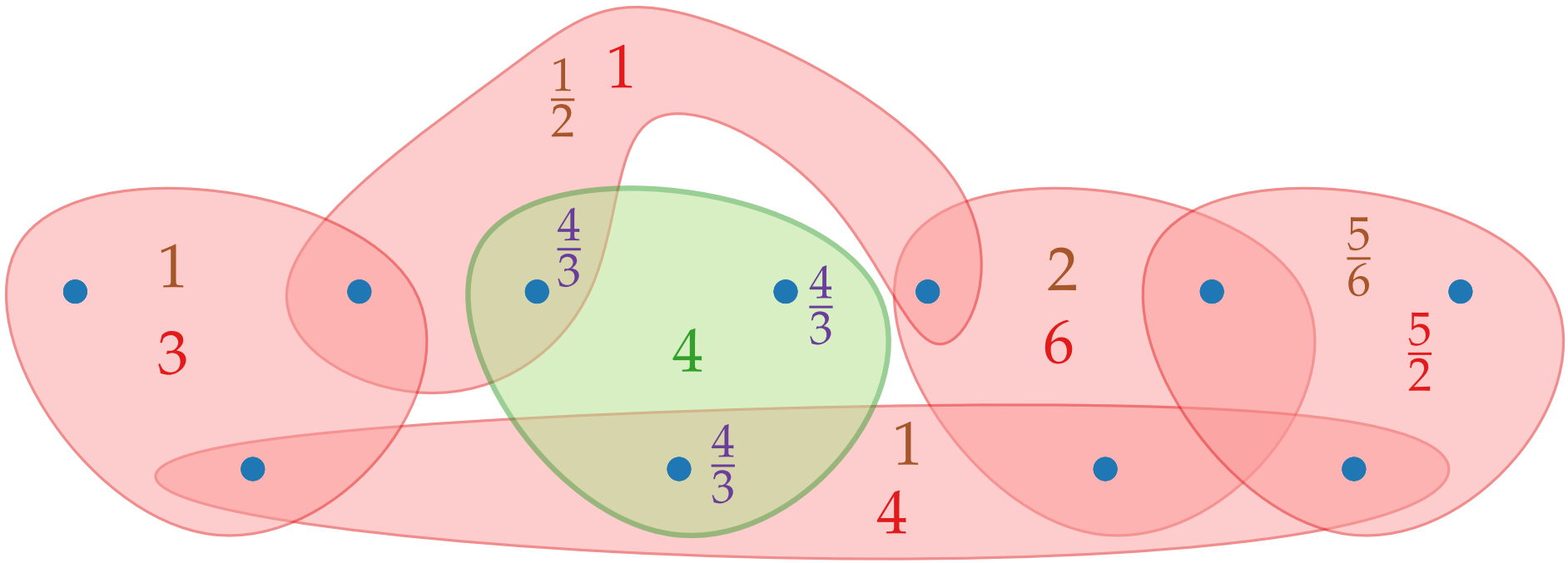
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



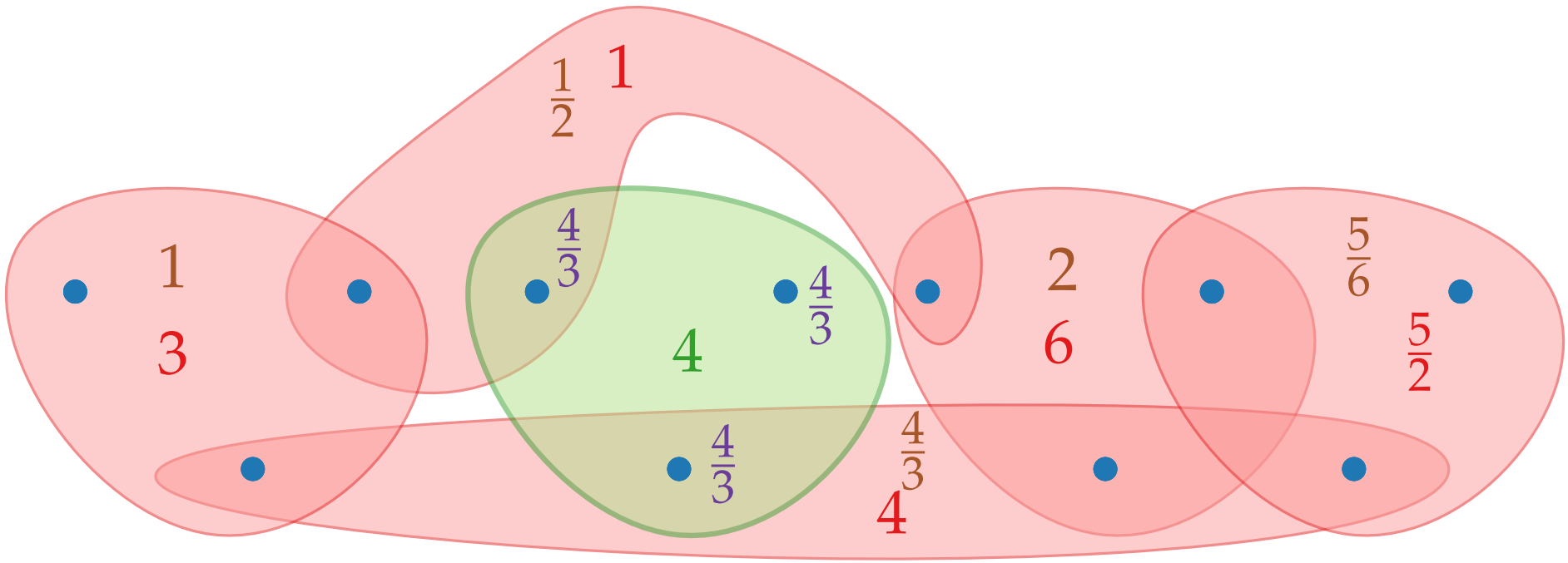
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



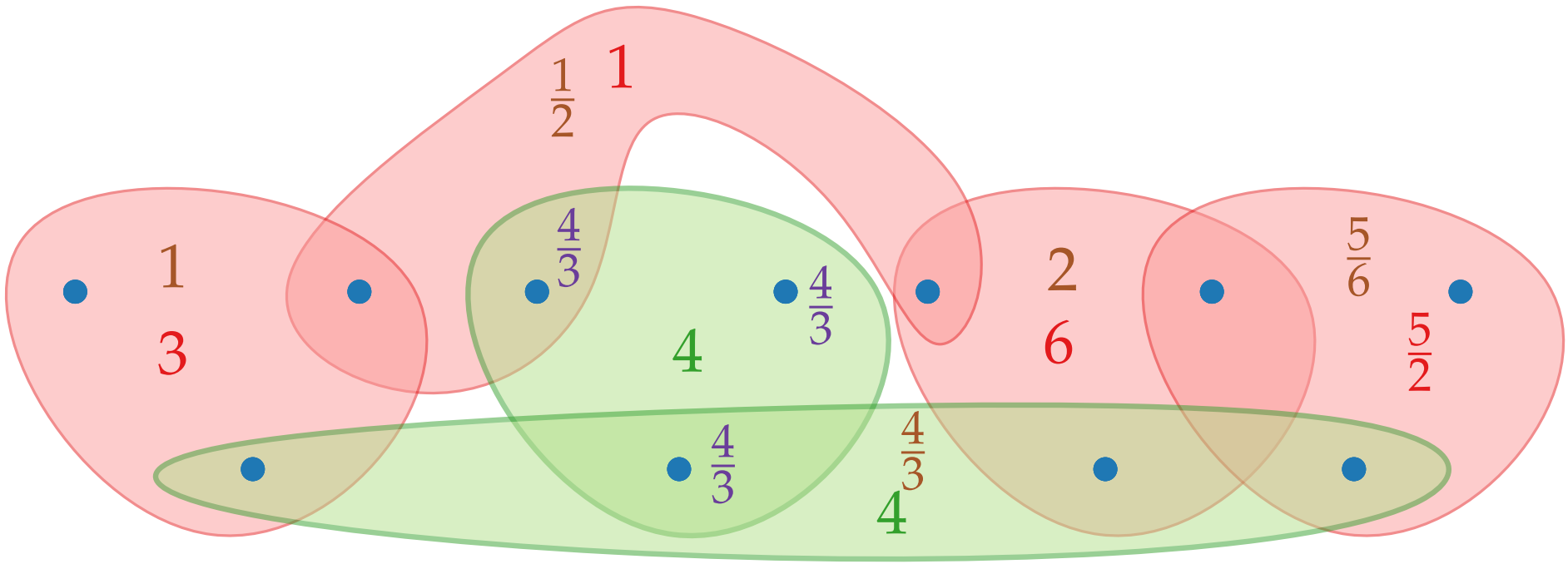
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



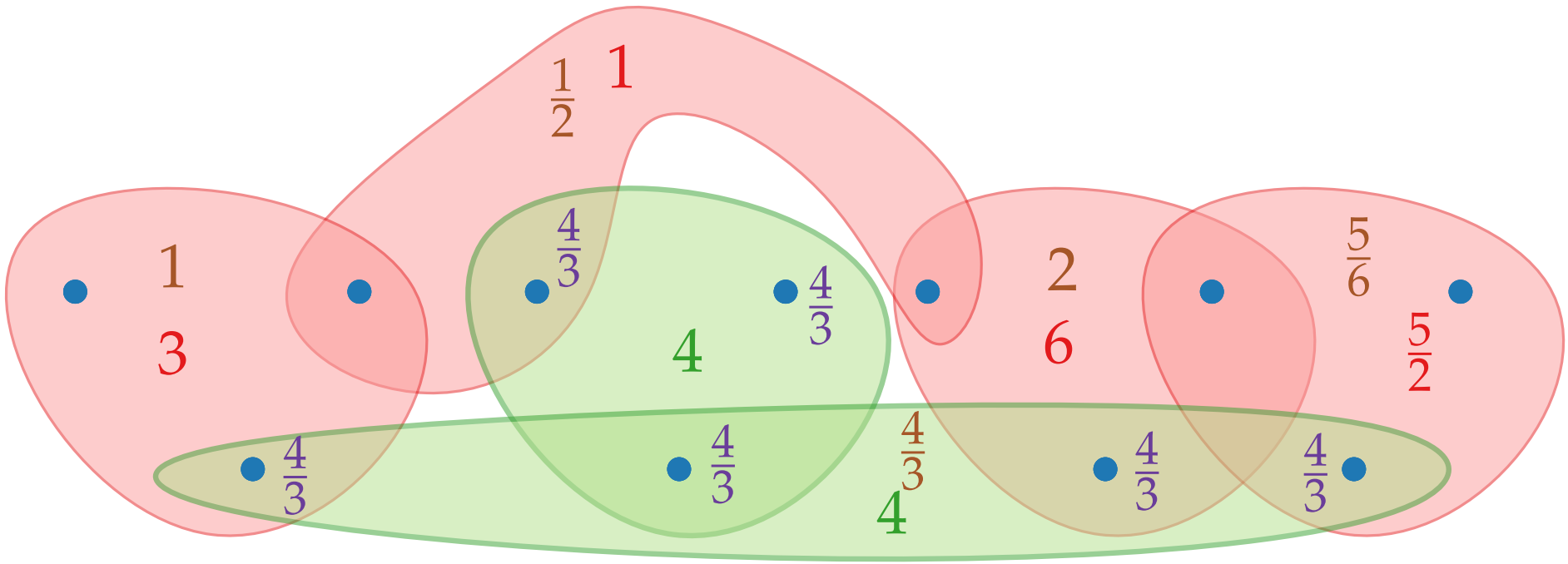
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



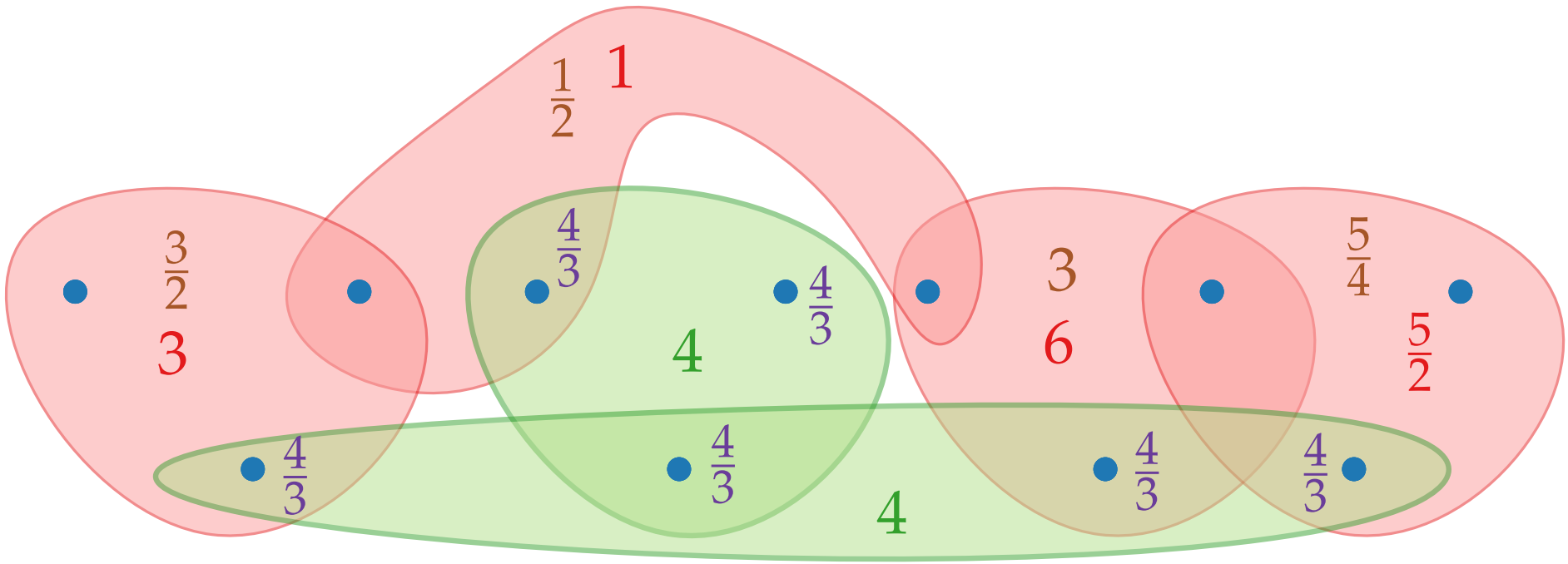
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



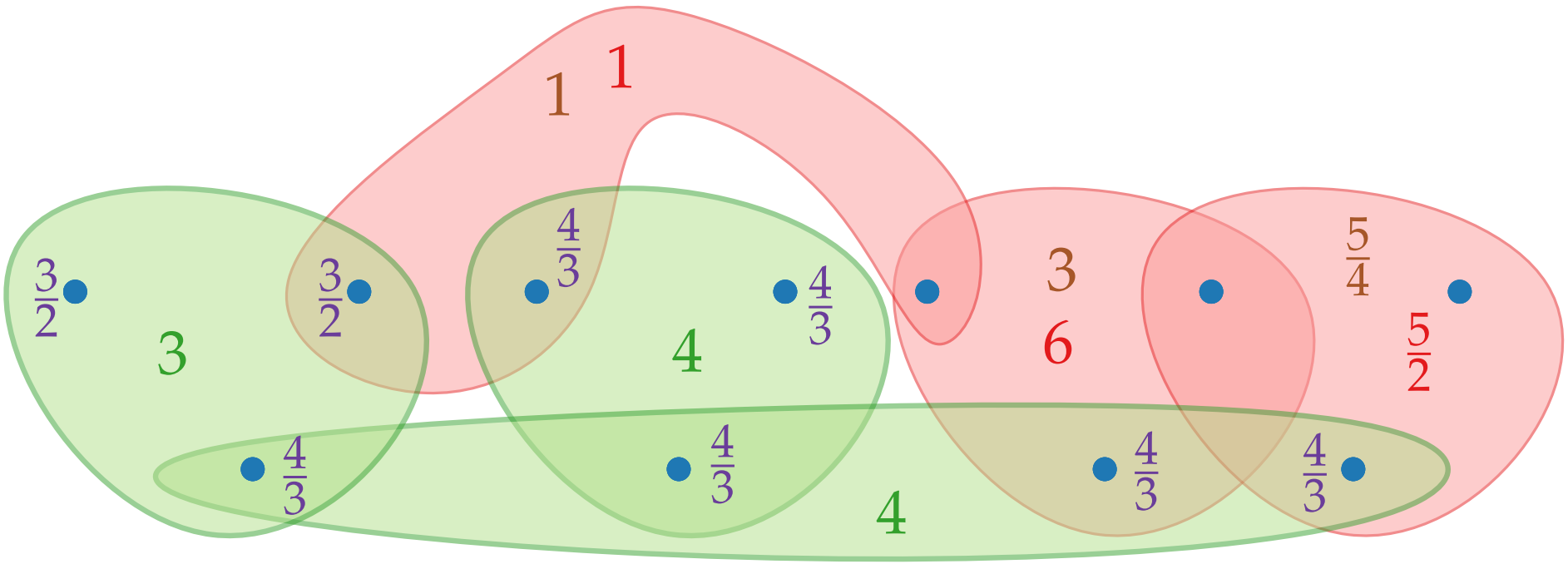
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



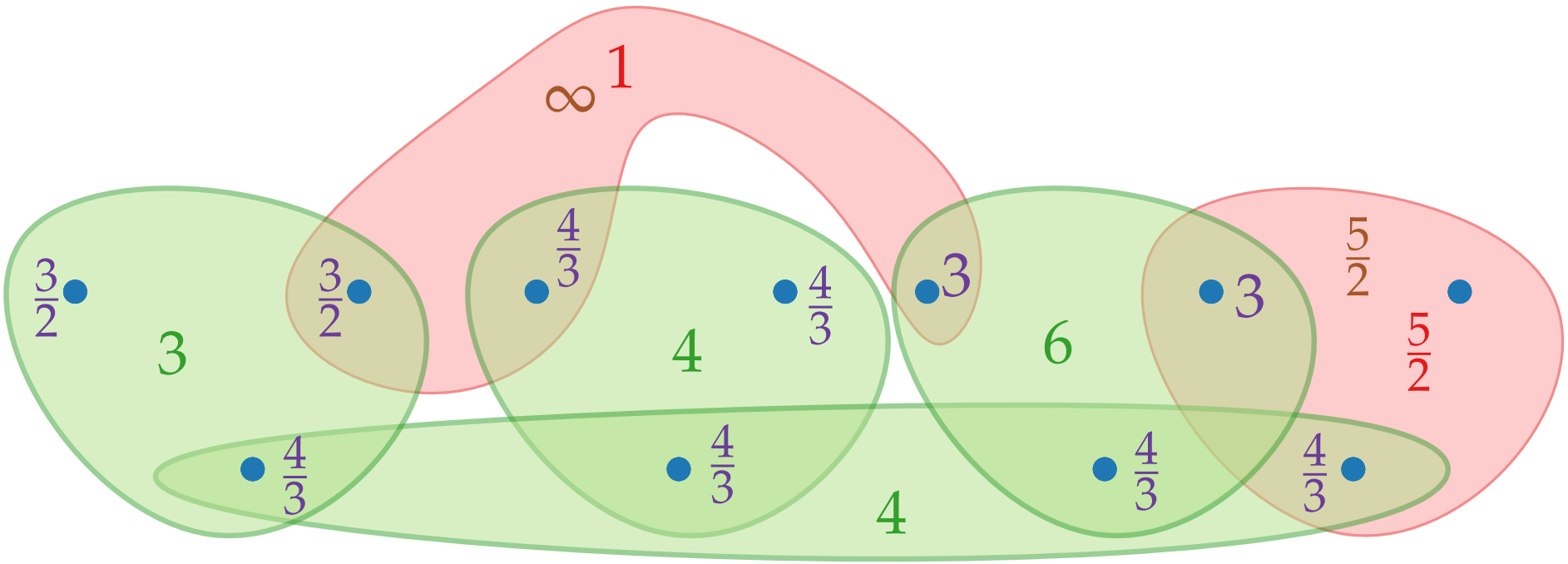
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



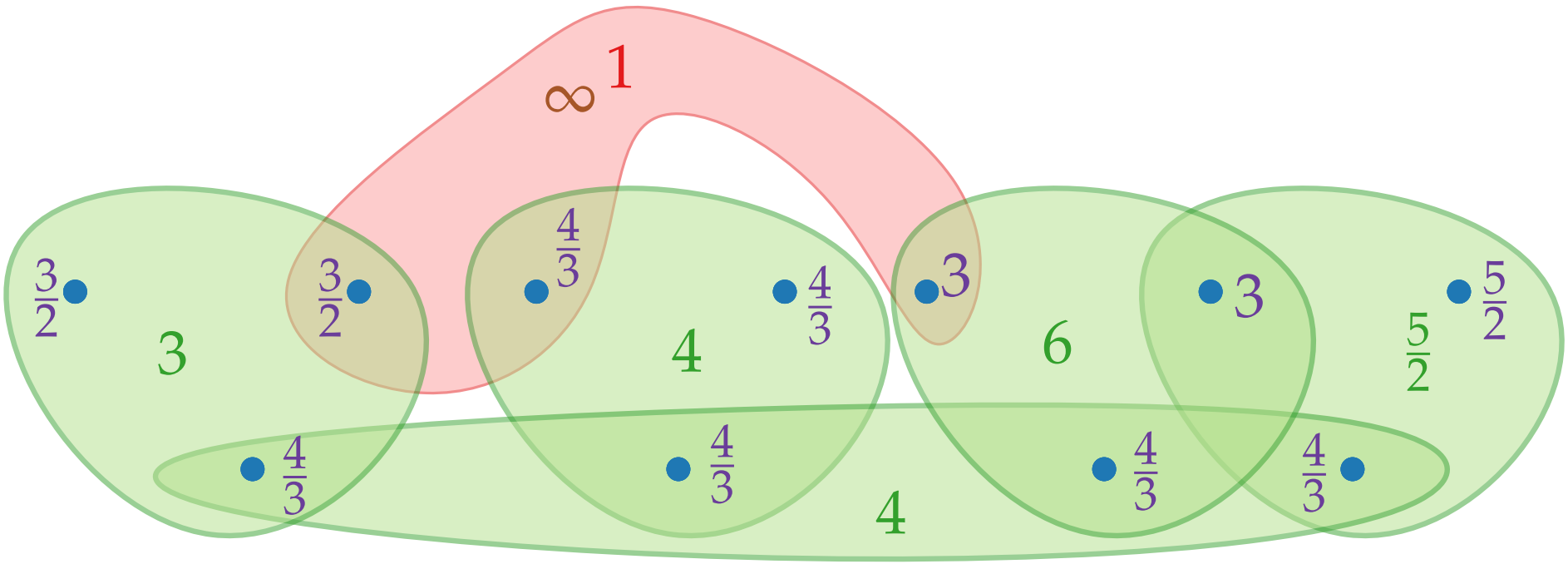
Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

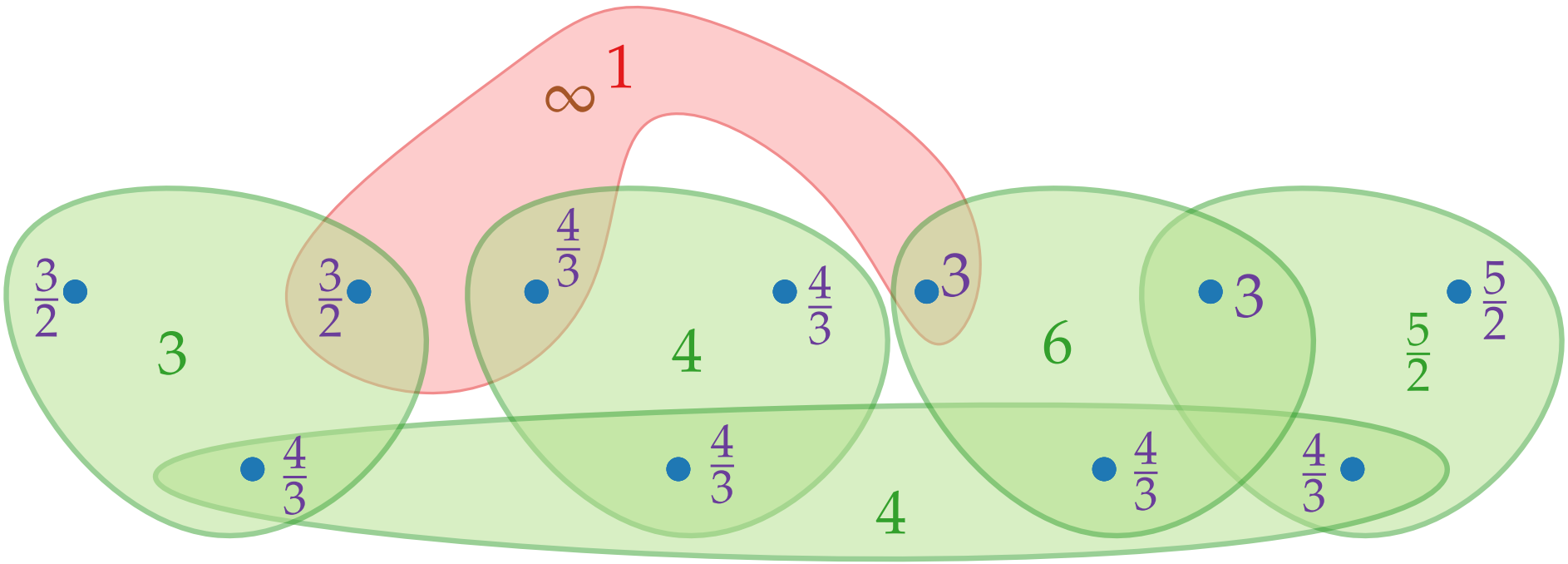
Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.

Gesamtkosten: $\sum_{u \in U} \text{preis}(u)$



Iteratives „Einkaufen“ von Elementen

Was sind die wirklichen Kosten für eine Menge?

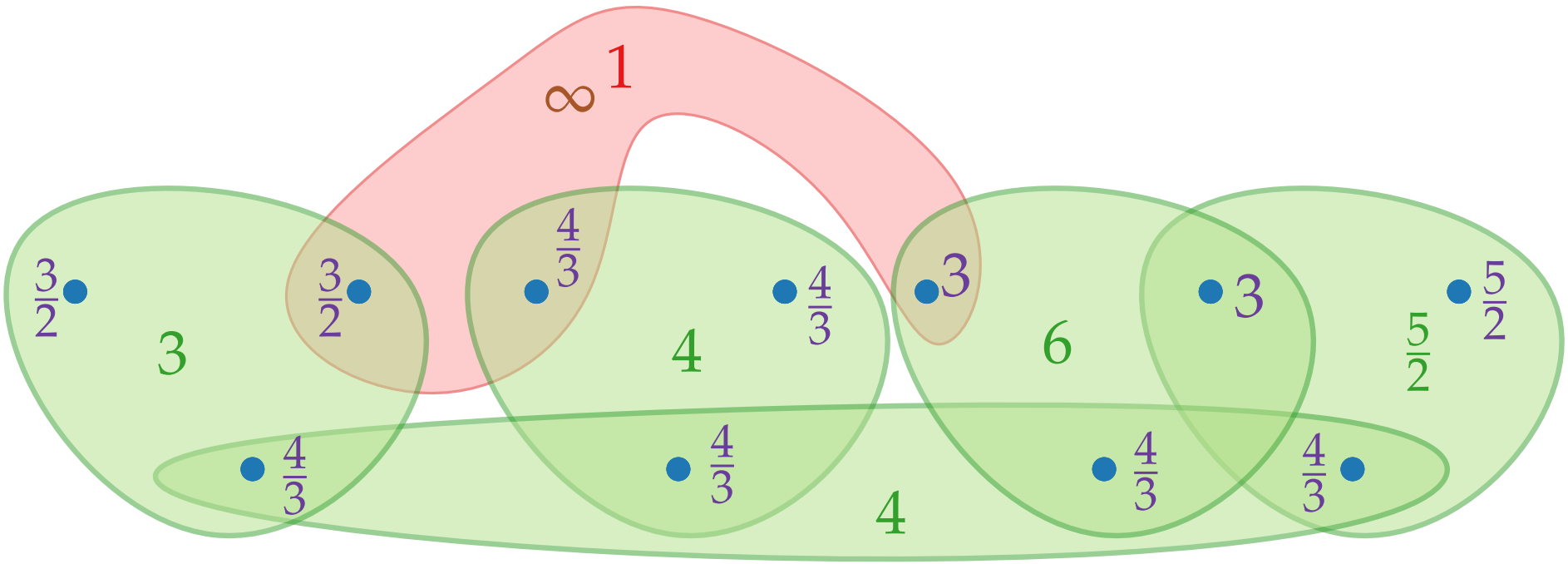
Menge mit k Elementen und Kosten c hat Einheitspreis $\frac{c}{k}$.

Was passiert, wenn wir eine Menge kaufen?

Fixiere Preis der gekauften Elemente und berechne Einheitspreise neu.

Gesamtkosten: $\sum_{u \in U} \text{preis}(u)$

Greedy: Wähle immer Menge mit kleinstem Einheitspreis.



Greedy für SetCover

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$

return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Greedy für SetCover

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$

while $C \neq U$ **do**

return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Greedy für SetCover

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$

while $C \neq U$ **do**

  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert

return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Greedy für SetCover

GreedySetCover($U, \mathcal{S}, c$)

$C \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$

while $C \neq U$ **do**

  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert

  foreach $u \in S \setminus C$ **do**

return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Greedy für SetCover

GreedySetCover$(U, \mathcal{S}, c)$

$C \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$

while $C \neq U$ **do**

  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert

  foreach $u \in S \setminus C$ **do**

    $\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$

return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Greedy für SetCover

GreedySetCover$(U, \mathcal{S}, c)$

$C \leftarrow \emptyset$

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$

while $C \neq U$ **do**

  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert

  foreach $u \in S \setminus C$ **do**

    $\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$

  $C \leftarrow C \cup S$

return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Greedy für SetCover

GreedySetCover$(U, \mathcal{S}, c)$

$C \leftarrow \emptyset$
$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$
while $C \neq U$ **do**
  $S \leftarrow$ Menge aus $\mathcal{S}$, die $\frac{c(S)}{|S \setminus C|}$ minimiert
  foreach $u \in S \setminus C$ **do**
    $\text{preis}(u) \leftarrow \frac{c(S)}{|S \setminus C|}$
  $C \leftarrow C \cup S$
  $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \{S\}$
return $\mathcal{S}'$ // Überdeckung von U

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq$.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq$.

Beweis.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq$.

Beweis. Alg. wählt $u_j \Rightarrow$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq$.

Beweis. Alg. wählt $u_j \Rightarrow$

- $j-1$ Elemente von S bereits gewählt

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq$.

Beweis. Alg. wählt $u_j \Rightarrow$

- $j-1$ Elemente von S bereits gewählt
- $\ell - j + 1$ Elemente von S noch nicht gewählt

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq$.

Beweis. Alg. wählt $u_j \Rightarrow$

- $j-1$ Elemente von S bereits gewählt
- $\ell - j + 1$ Elemente von S noch nicht gewählt
- Einheitskosten für S:

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq$.

Beweis. Alg. wählt $u_j \Rightarrow$

- $j-1$ Elemente von S bereits gewählt
- $\ell - j + 1$ Elemente von S noch nicht gewählt
- Einheitskosten für S: $c(S)/(\ell - j + 1)$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Beweis. Alg. wählt $u_j \Rightarrow$

- $j - 1$ Elemente von S bereits gewählt
- $\ell - j + 1$ Elemente von S noch nicht gewählt
- Einheitskosten für S: $c(S)/(\ell - j + 1)$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq$.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis. Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ optimale Lsg.

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis. Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ optimale Lsg. $\text{OPT} = \sum_{i=1}^{m} c(S_i)$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis. Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ optimale Lsg. $\text{OPT} = \sum_{i=1}^{m} c(S_i)$

$\text{preis}(U) =$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis. Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ optimale Lsg. $\text{OPT} = \sum_{i=1}^{m} c(S_i)$

$\text{preis}(U) = \sum_{u \in U} \text{preis}(u) \leq$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis. Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ optimale Lsg. $\text{OPT} = \sum_{i=1}^{m} c(S_i)$

$\text{preis}(U) = \sum_{u \in U} \text{preis}(u) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{preis}(S_i)$

$\leq$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis. Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ optimale Lsg. $\text{OPT} = \sum_{i=1}^{m} c(S_i)$

$$\begin{aligned} \text{preis}(U) &= \sum_{u \in U} \text{preis}(u) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{preis}(S_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} c(S_i) \cdot H_k = \end{aligned}$$

Analyse

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

Lemma. Sei $S \in \mathcal{S}$ und seien $u_1, \ldots, u_\ell$ die Elemente von S in der Reihenfolge, in der sie von GreedySetCover überdeckt („gekauft“) werden. Dann gilt $\text{preis}(u_j) \leq c(S)/(\ell - j + 1)$.

Lemma. $\text{preis}(S) := \sum_{i=1}^{\ell} \text{preis}(u_i) \leq c(S) \cdot H_\ell$.

Beweis. Sei $\{S_1, \ldots, S_m\}$ optimale Lsg. $\text{OPT} = \sum_{i=1}^{m} c(S_i)$

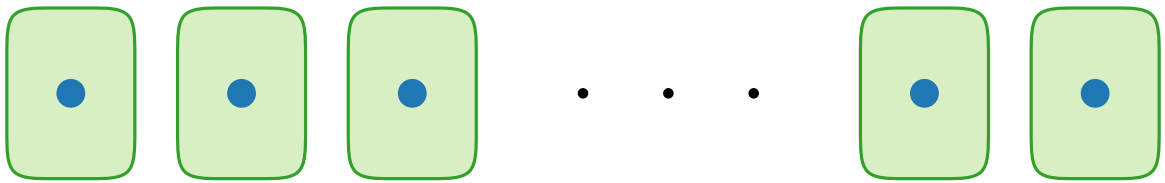
$$\begin{aligned} \text{preis}(U) &= \sum_{u \in U} \text{preis}(u) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{preis}(S_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} c(S_i) \cdot H_k = \text{OPT} \cdot H_k \end{aligned}$$

Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

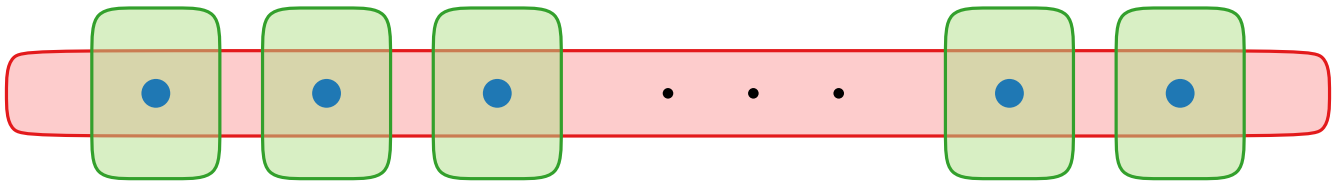
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



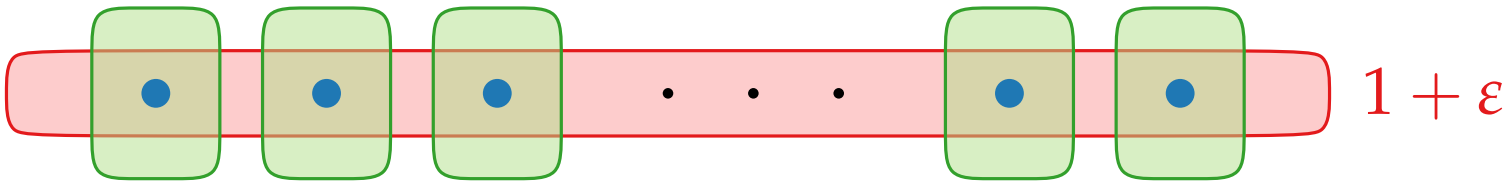
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



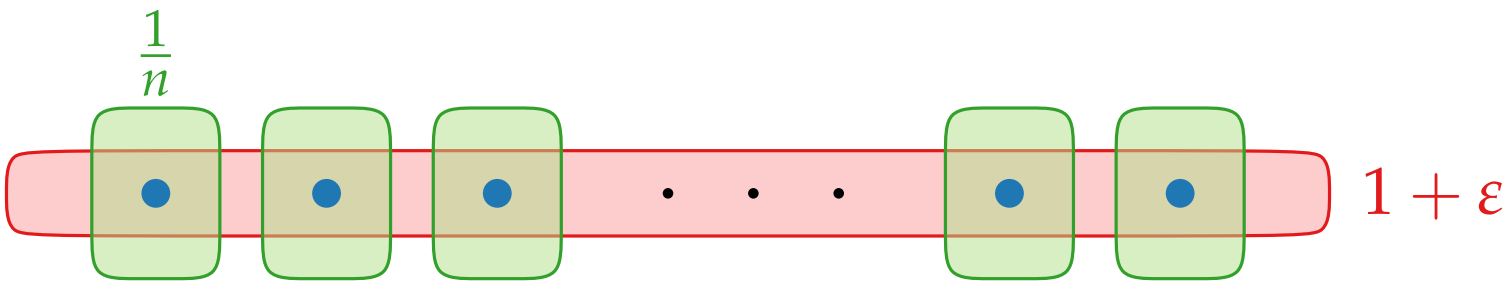
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



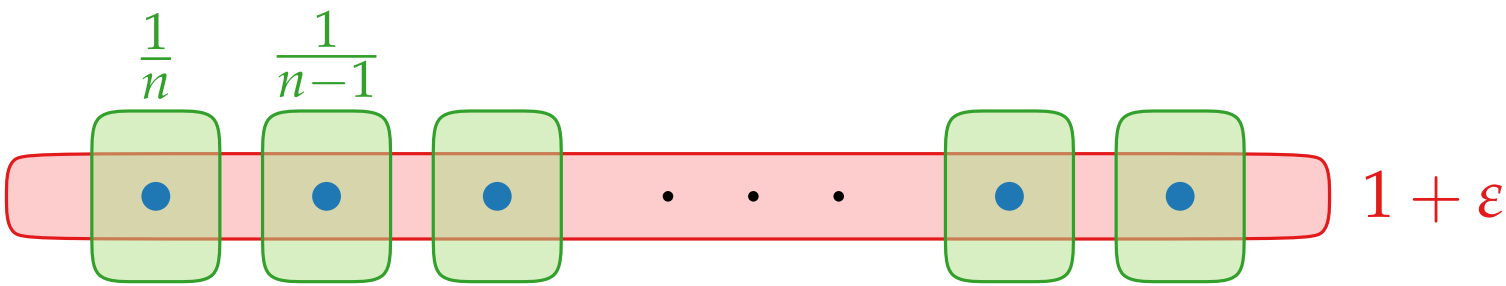
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



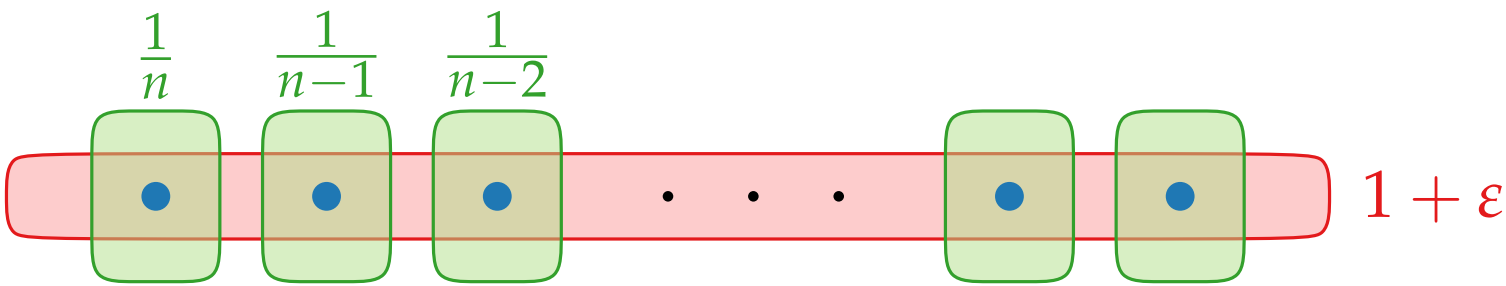
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



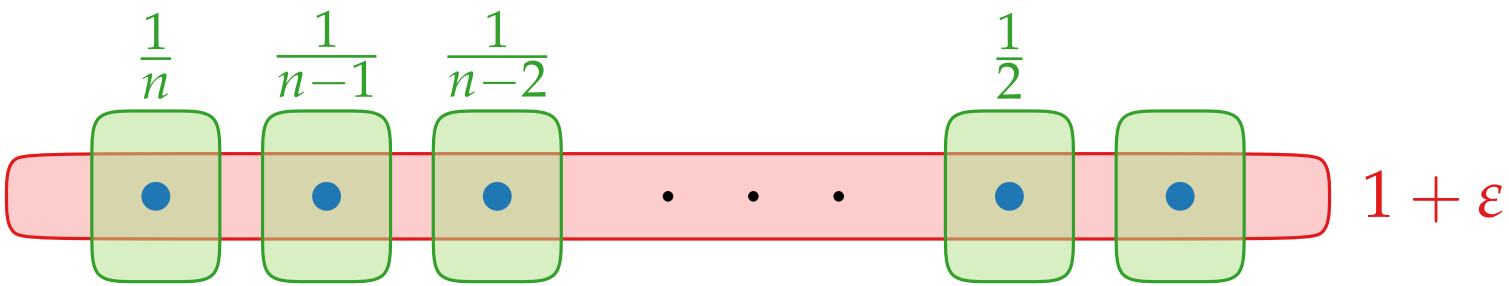
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



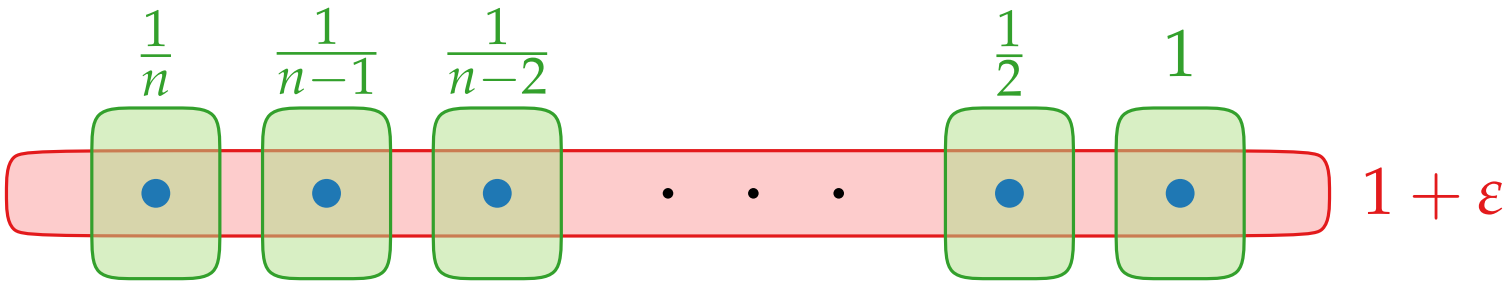
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



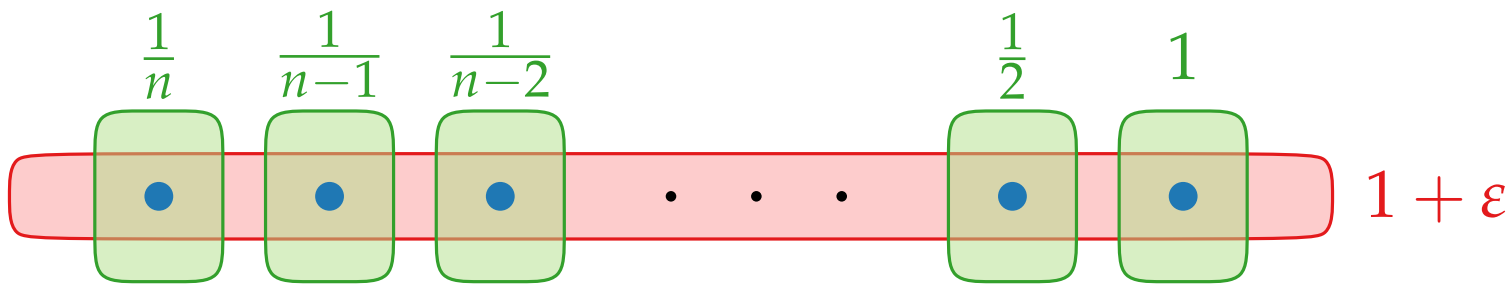
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



Analyse scharf?

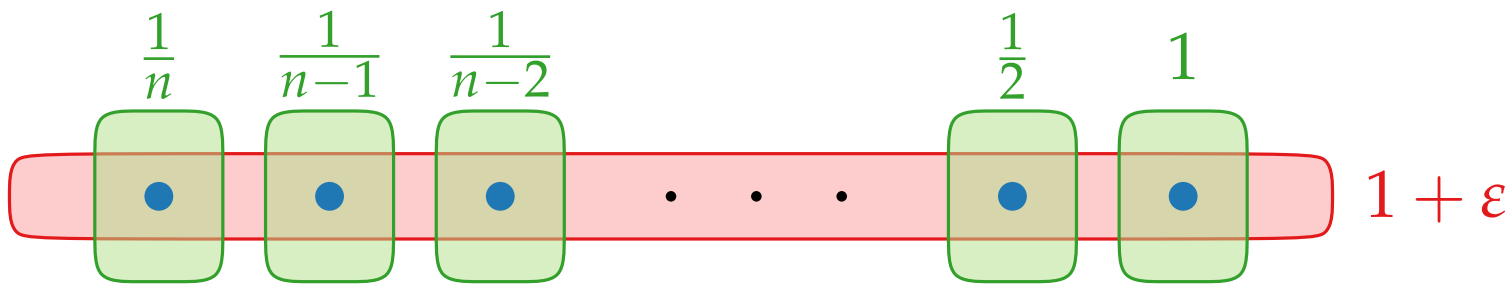
Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



$\text{preis}(U) = H_n$ $\qquad$ $\text{OPT} = 1 + \varepsilon$

Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

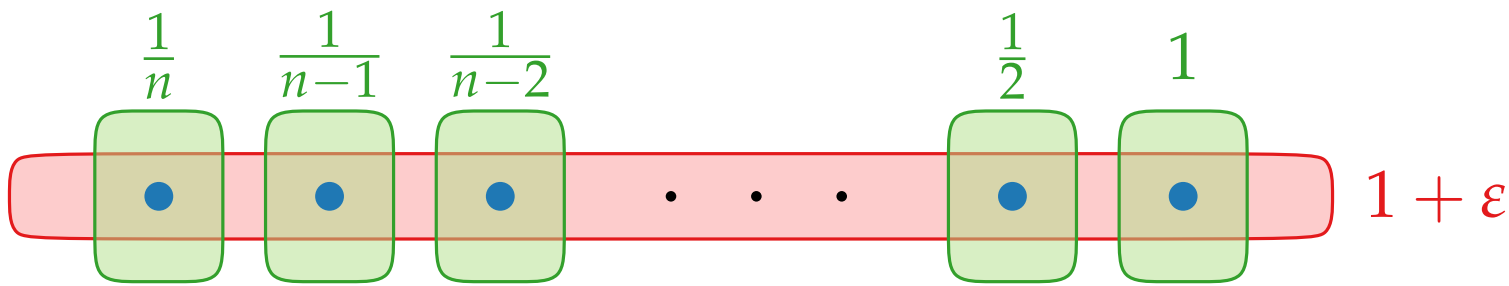


$\text{preis}(U) = H_n$ $\qquad$ $\text{OPT} = 1 + \varepsilon$

besser?

Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.



$\text{preis}(U) = H_n$ $\qquad$ $\text{OPT} = 1 + \varepsilon$

besser?

SetCover lässt sich nicht mit Faktor $(1 - o(1)) \cdot \log(n)$ approximieren (außer P=NP)

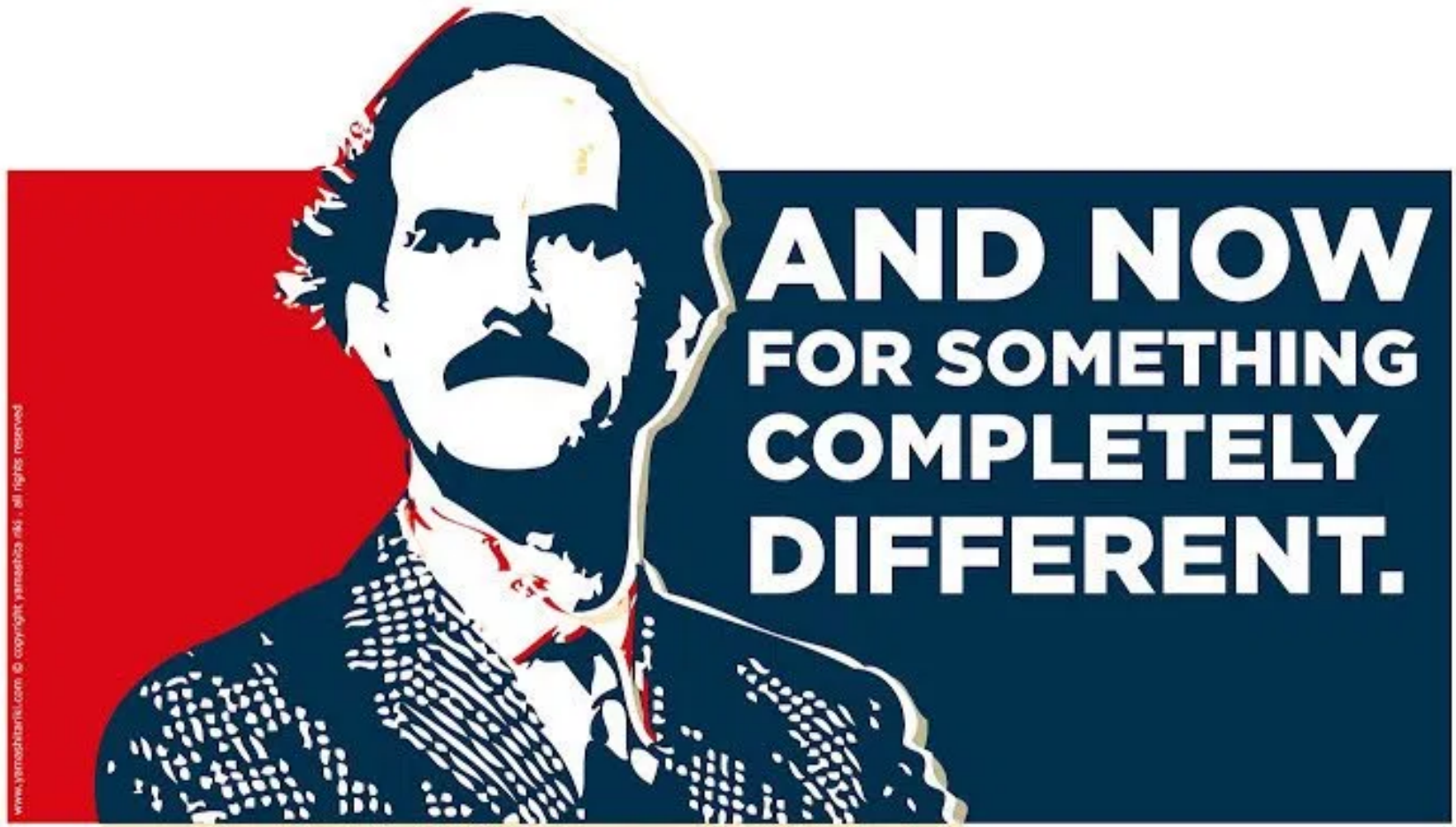
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

besse

SetC

$(1 -$



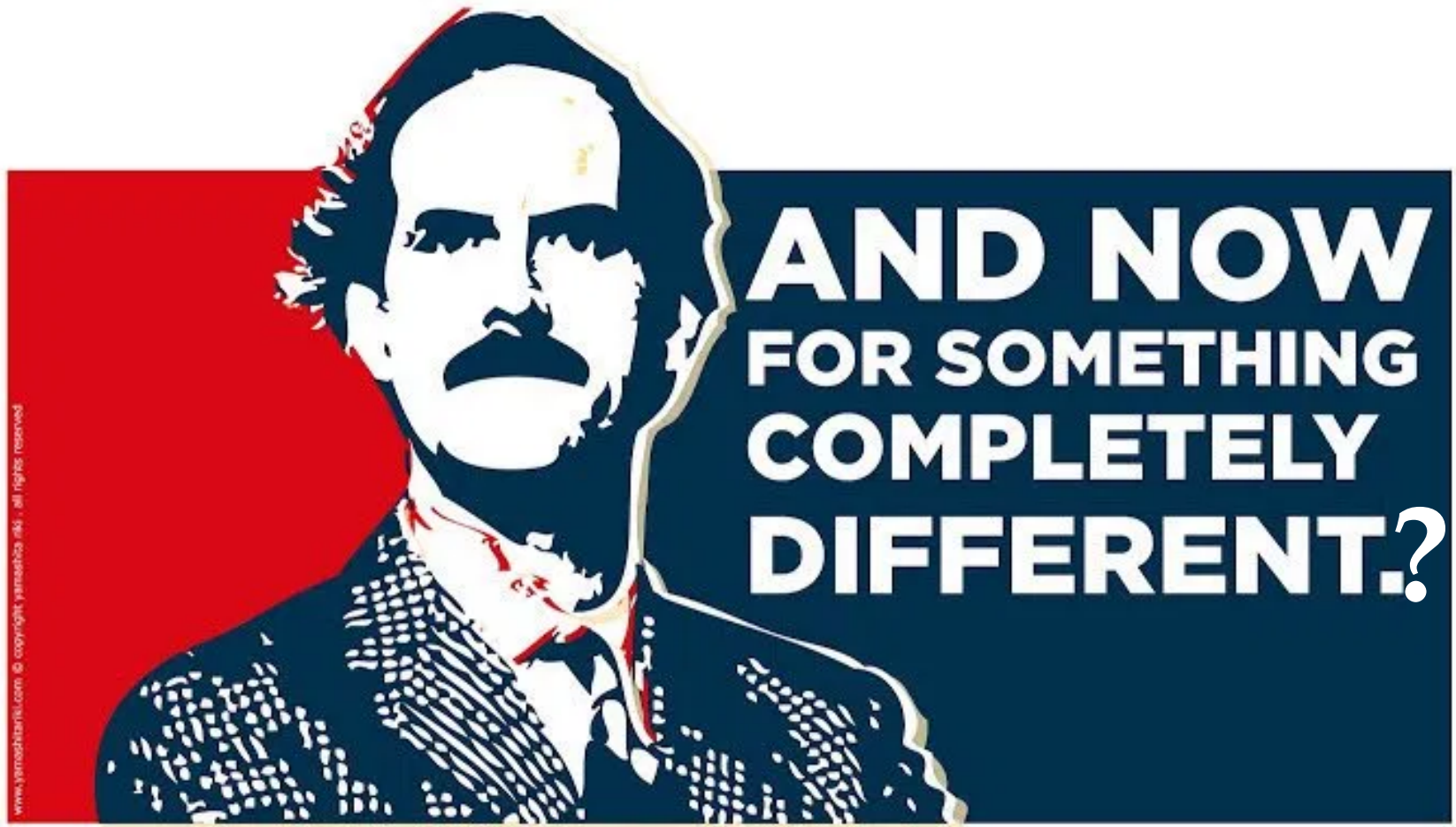
Analyse scharf?

Satz. GreedySetCover ist ein Faktor-H_k-Approximationsalg. für SetCover. Hierbei ist k die Kardinalität der größten Menge in $\mathcal{S}$ und $H_k := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} = O(\log k)$.

besse

SetC

$(1 -$



ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ.

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

Beispiel. $U := \{cbaa, abc, bcb\}$

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

Beispiel. $U := \{cbaa, abc, bcb\}$

abc

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

Beispiel. $U := \{cbaa, abc, bcb\}$

$$abc$$
$$\quad bcb$$

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

Beispiel. $U := \{cbaa, abc, bcb\}$

$$abc$$
$$bcb$$
$$cbaa$$

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

Beispiel. $U := \{cbaa, abc, bcb\}$

$abcbaa$

abc
bcb
$cbaa$

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

Beispiel. $U := \{cbaa, abc, bcb\}$

„überdeckt“ alle Strings aus U

$abcbaa$

abc
bcb
$cbaa$

ShortestSuperString (SSS)

Gegeben sei eine Menge $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq \Sigma^+$ von Strings über einem endlichen Alphabet Σ. Gesucht ist ein **kürzester String** s (*Superstring*), der jeden String s_i, $i = 1, \ldots, n$, als Teilstring enthält.

Beispiel. $U := \{cbaa, abc, bcb\}$

„überdeckt“ alle Strings aus U

Ohne Einschränkung: Kein String s_i ist Teilstring eines anderen Strings s_j

$abcbaa$

abc
bcb
$cbaa$

SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

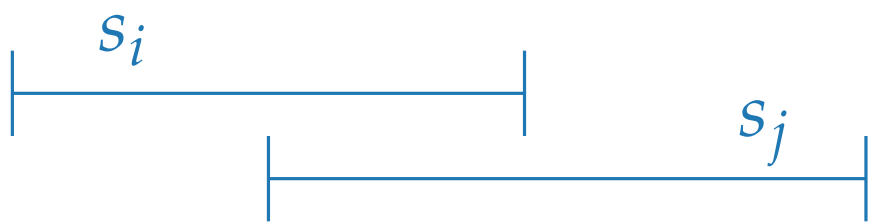
Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

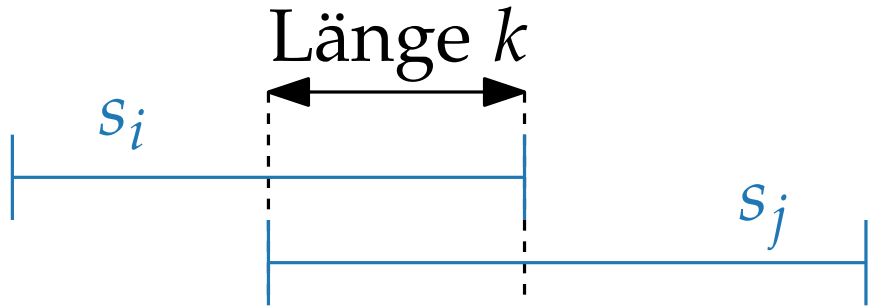


SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

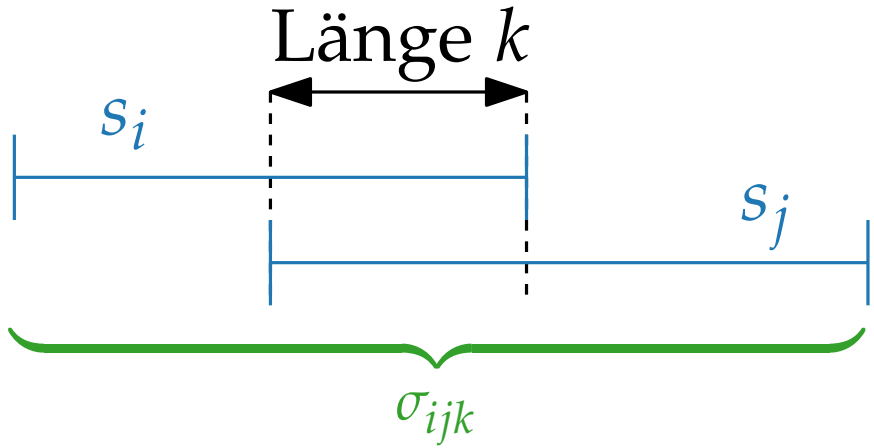


SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.



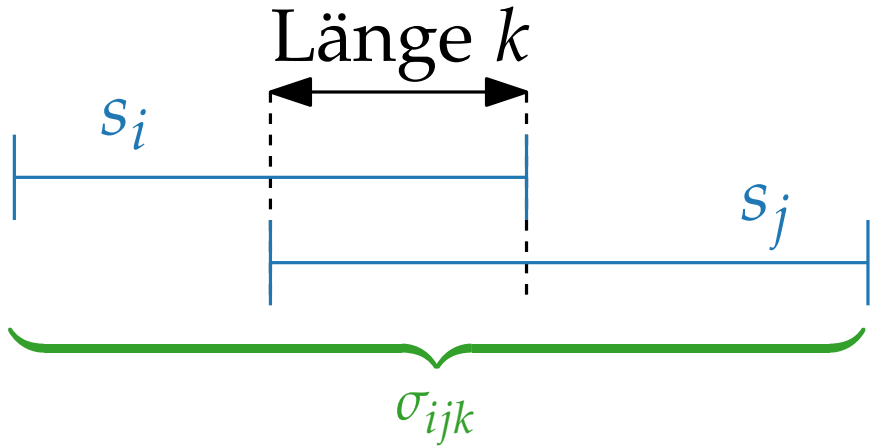
SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab $\quad s_j$: ababc



SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

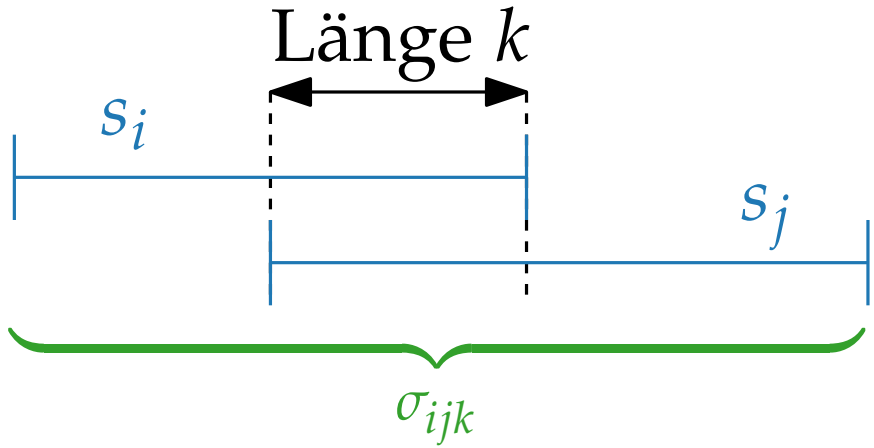
Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab $\quad s_j$: ababc

cabab

ababc



SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

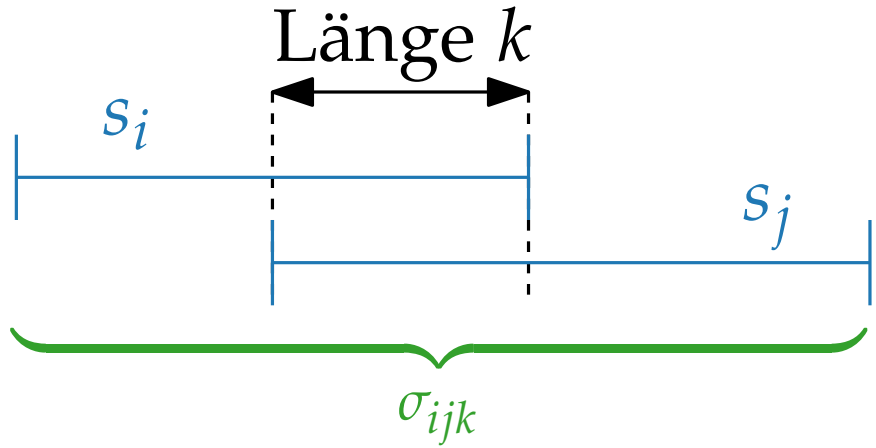
Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab s_j : ababc

cabab

ababc



SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

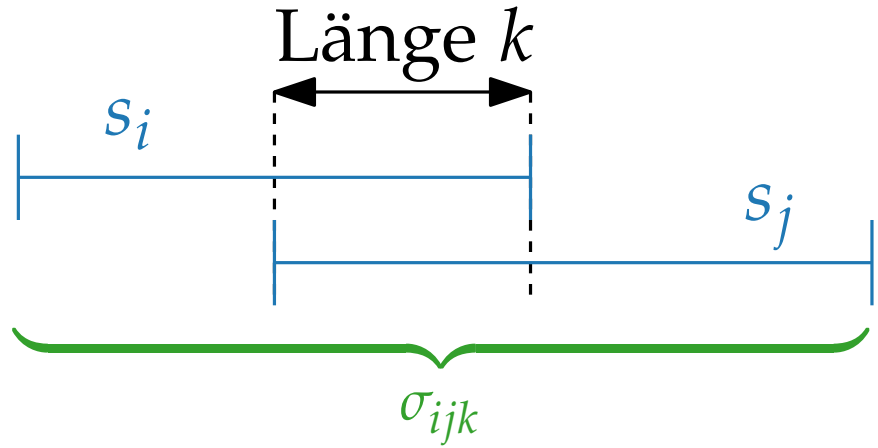
Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab s_j : ababc

cabab

ababc

σ_{ij2} : cababababc



SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

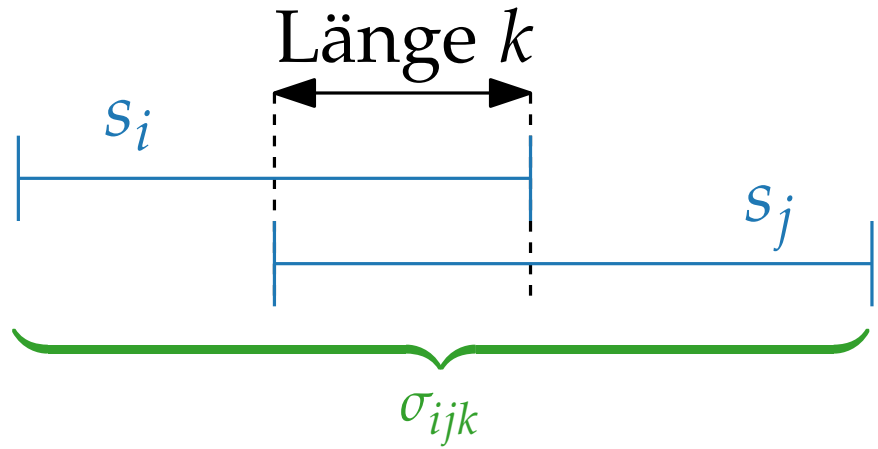
Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab $\quad s_j$: ababc

cabab cabab

ababc ababc

σ_{ij2} : cababababc



SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

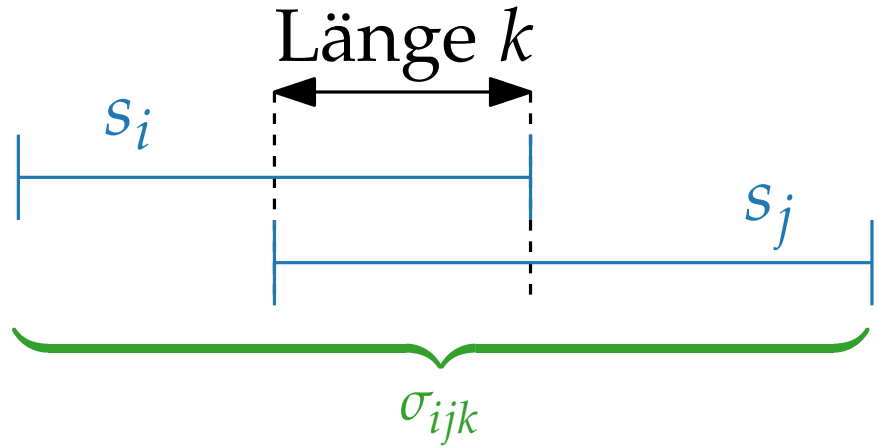
Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab s_j : ababc

cabab cabab

ababc ababc

σ_{ij2} : cababababc σ_{ij4} : cababc



SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

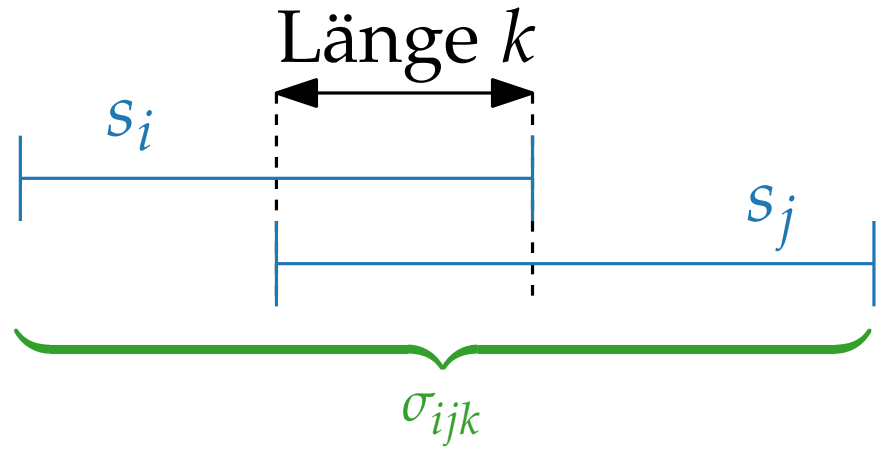
Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab $\quad s_j$: ababc

cabab
ababc
σ_{ij2} : cababababc

cabab
ababc
σ_{ij4} : cababc



$S(\sigma_{ijk}) = \{s \in U \mid s \text{ Teilstring von } \sigma_{ijk}\}$ enthält die Elemente der Grundmenge, die durch σ_{ijk} überdeckt werden.

SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

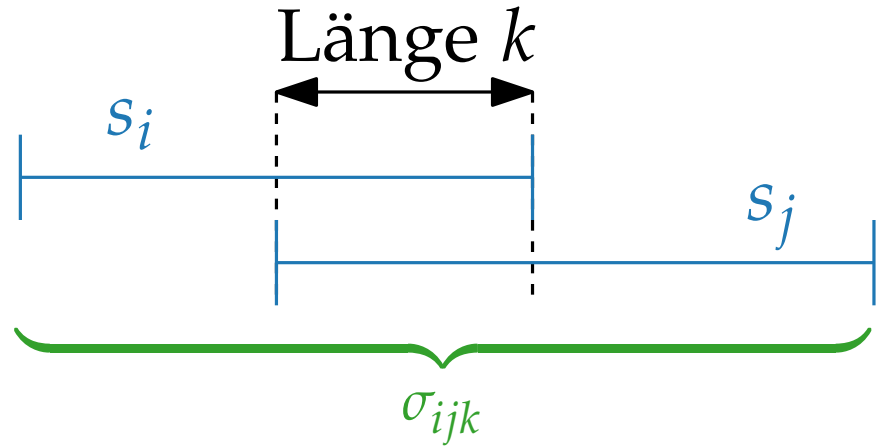
Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab $\quad$ s_j : ababc

cabab
ababc
σ_{ij2} : cababababc

cabab
ababc
σ_{ij4} : cababc



$S(\sigma_{ijk}) = \{s \in U \mid s \text{ Teilstring von } \sigma_{ijk}\}$ enthält die Elemente der Grundmenge, die durch σ_{ijk} überdeckt werden.

$c\left(S(\sigma_{ijk})\right) = |\sigma_{ijk}|$ (Anzahl der Zeichen in σ_{ijk})

SSS als SetCover Problem

SetCover Instanz: Grundmenge U, Teilmengen $\mathcal{S}$, Kosten c.

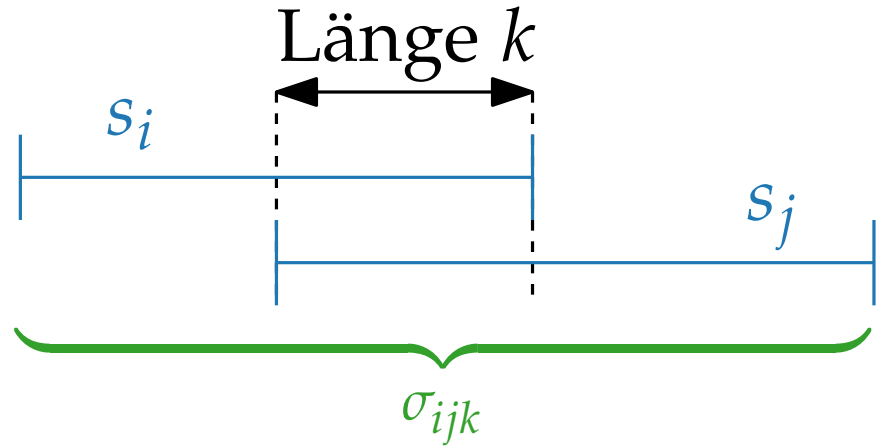
Grundmenge $U := \{s_1, \ldots, s_n\}$

Ein String σ_{ijk} hat Präfix s_i, Suffix s_j, wobei sich s_i und s_j in k Zeichen *überlappen*.

s_i : cabab $\quad$ s_j : ababc

cabab
ababc
σ_{ij2} : cababababc

cabab
ababc
σ_{ij4} : cababc



$S(\sigma_{ijk}) = \{s \in U \mid s \text{ Teilstring von } \sigma_{ijk}\}$ enthält die Elemente der Grundmenge, die durch σ_{ijk} überdeckt werden.

$c\left(S(\sigma_{ijk})\right) = |\sigma_{ijk}|$ (Anzahl der Zeichen in σ_{ijk})

$\mathcal{S} = \{S(\sigma_{ijk}) \mid k > 0\}$ ($i = j$ erlaubt)

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. Sei $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$ die Länge des kürzesten Superstring von U und $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$ die kleinsten Kosten der dazugehörigen SetCover Instanz. Dann gilt:

$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$$

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. Sei $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$ die Länge des kürzesten Superstring von U und $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$ die kleinsten Kosten der dazugehörigen SetCover Instanz. Dann gilt:

$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$$

Beweis.

Betrachte optimales Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ von U.

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. Sei $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$ die Länge des kürzesten Superstring von U und $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$ die kleinsten Kosten der dazugehörigen SetCover Instanz. Dann gilt:

$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$$

Beweis.

Betrachte optimales Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ von U.

$s := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ ist ein Superstring von U mit Länge

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. Sei $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$ die Länge des kürzesten Superstring von U und $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$ die kleinsten Kosten der dazugehörigen SetCover Instanz. Dann gilt:

$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$$

Beweis.

Betrachte optimales Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ von U.

$s := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ ist ein Superstring von U mit Länge $\sum_{i=1}^{k} |\pi_i| = \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. Sei $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$ die Länge des kürzesten Superstring von U und $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$ die kleinsten Kosten der dazugehörigen SetCover Instanz. Dann gilt:

$$\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}} \leq \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$$

Beweis.

Betrachte optimales Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ von U.

$s := \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ ist ein Superstring von U mit Länge $\sum_{i=1}^{k} |\pi_i| = \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$

Also $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}} \leq |s| = \mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}}$

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.

Beziehung SSS und SetCover

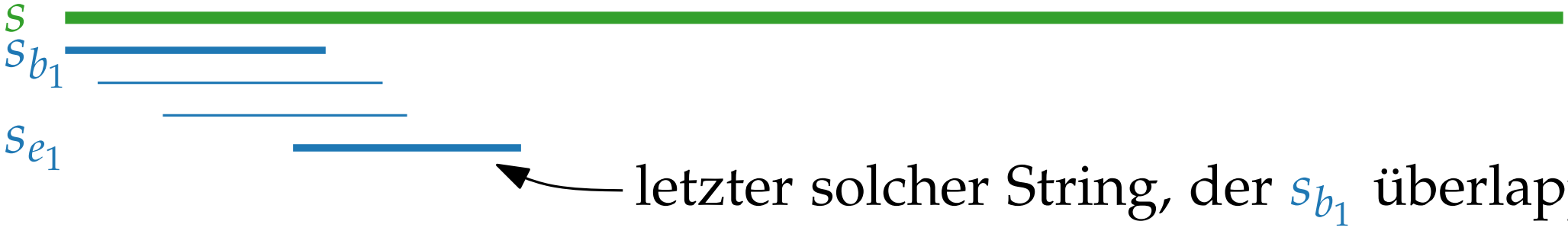
Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

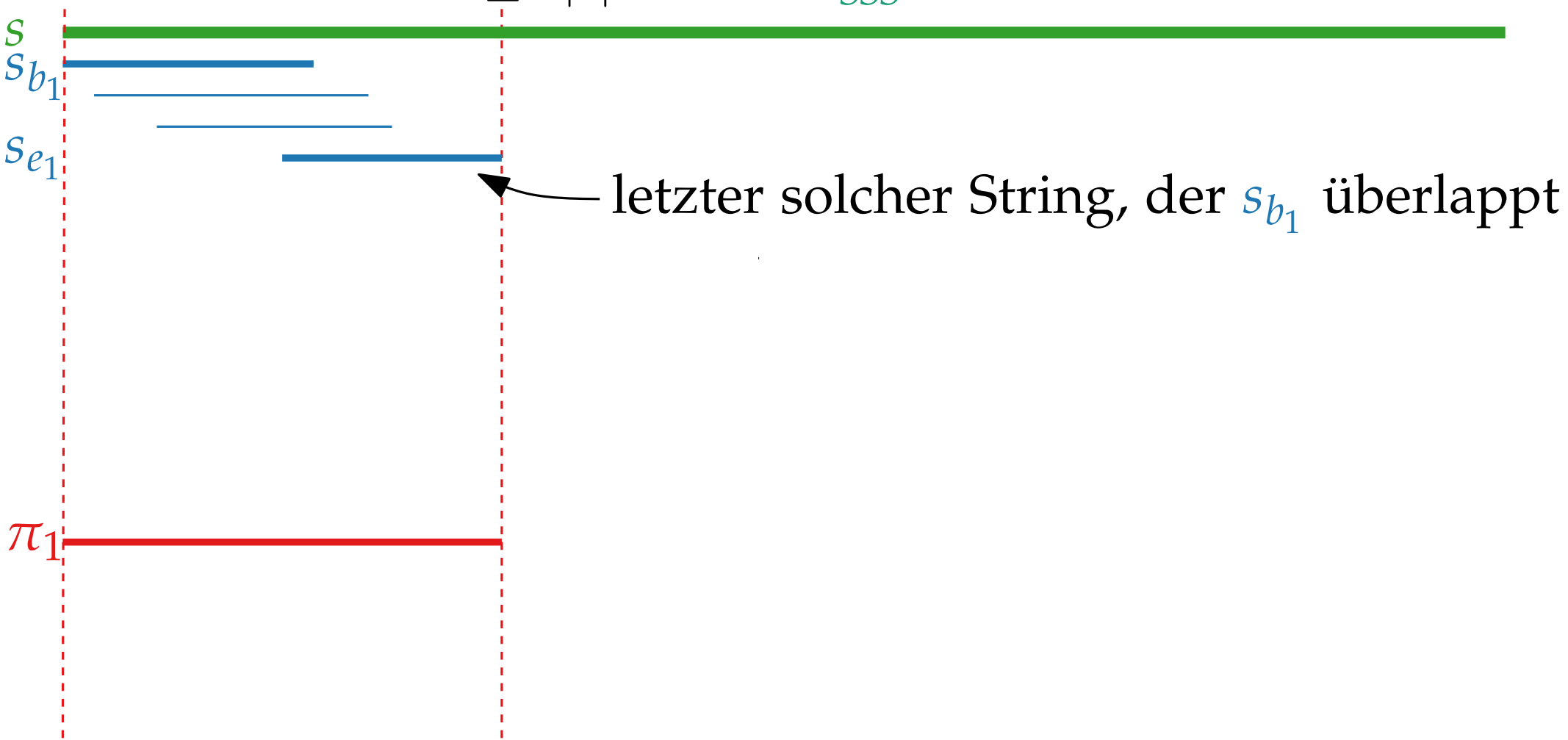
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

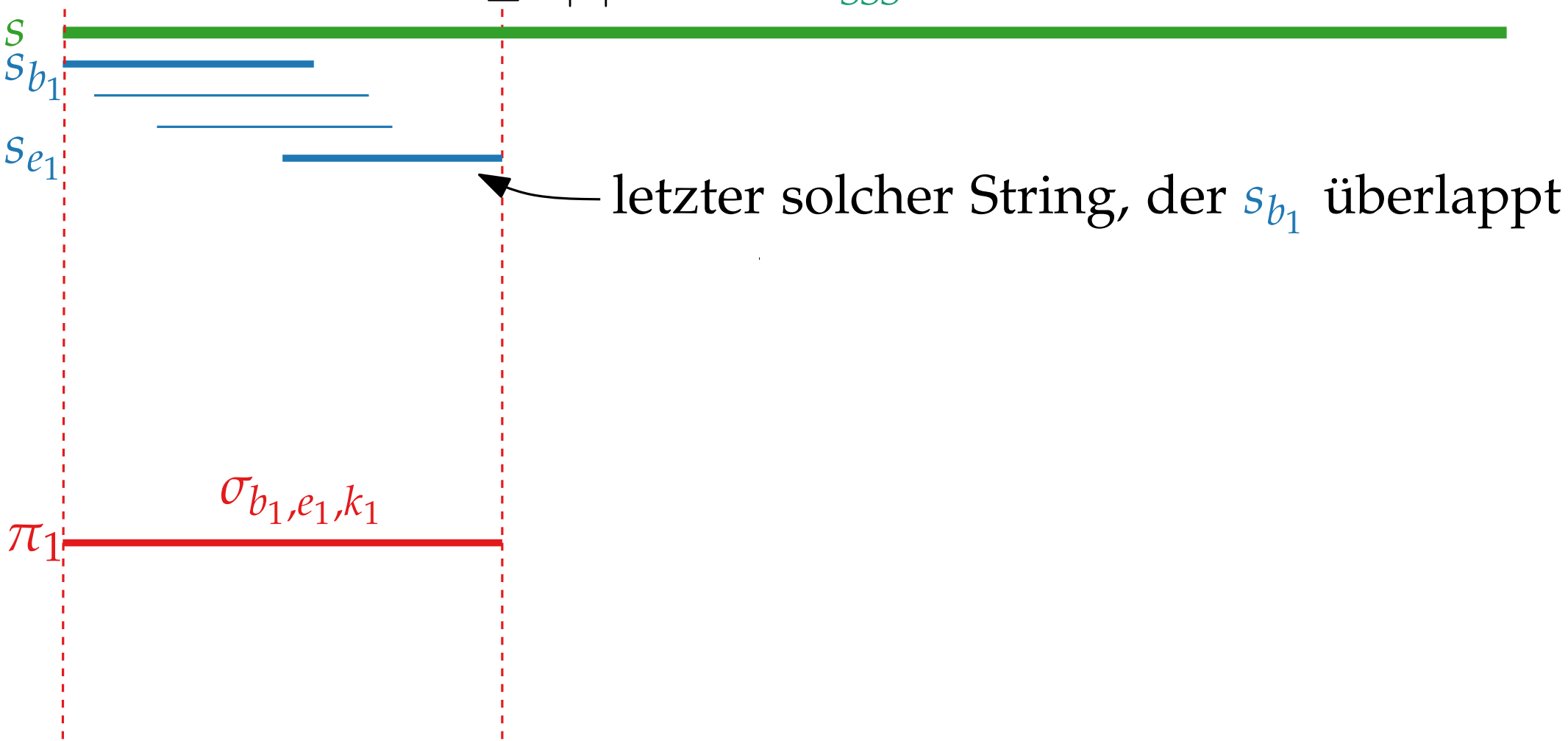
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

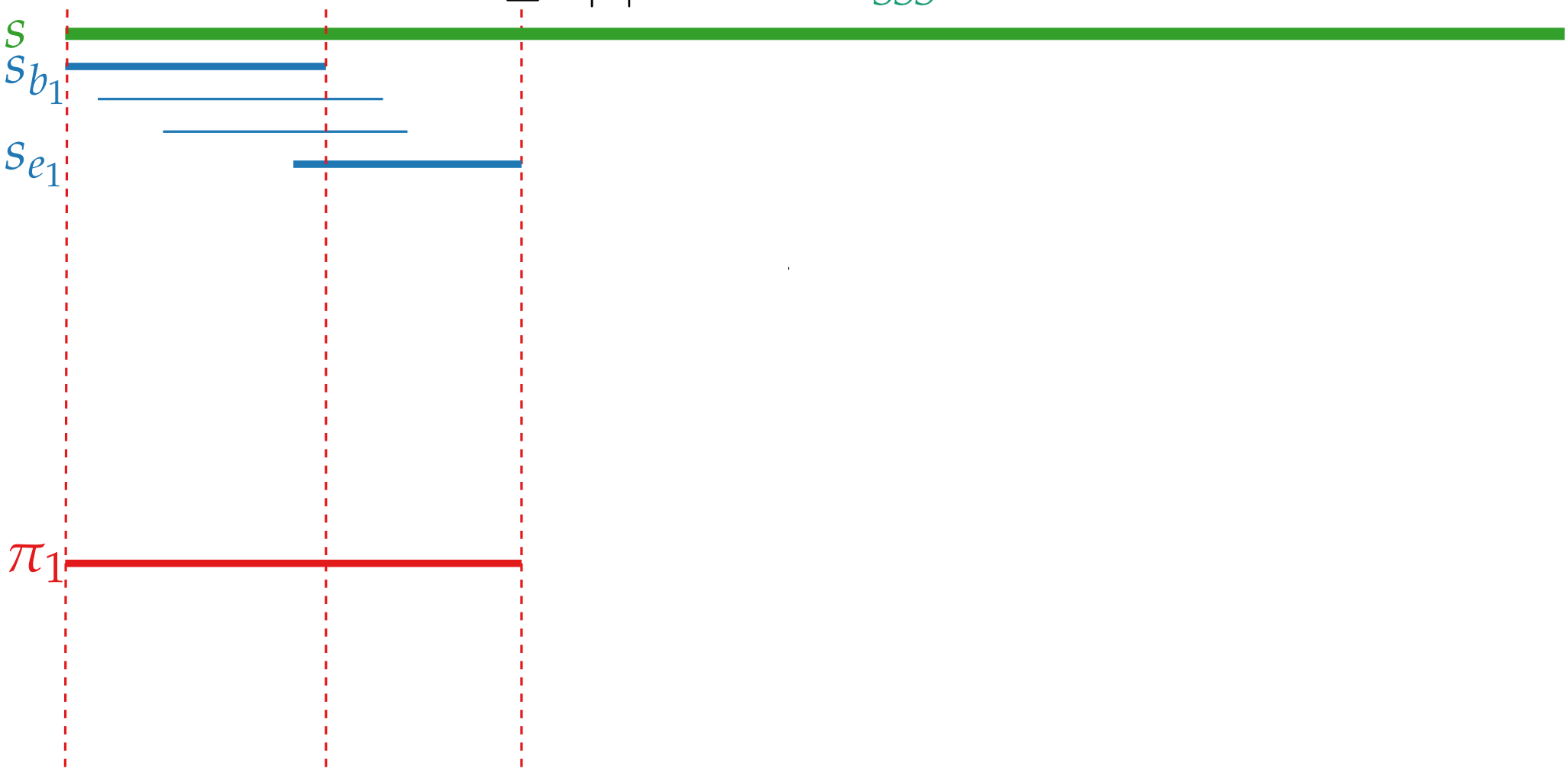
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

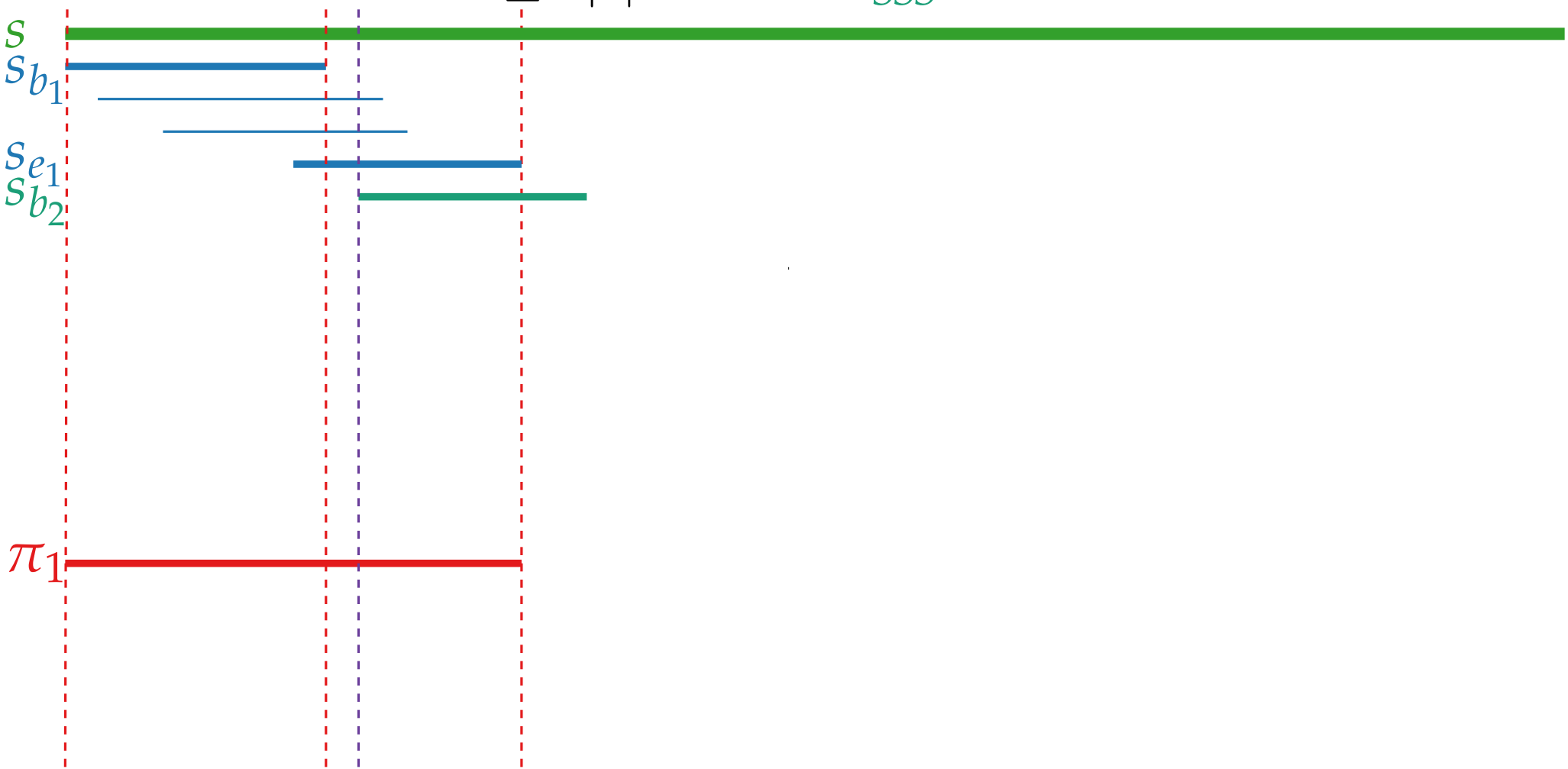
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

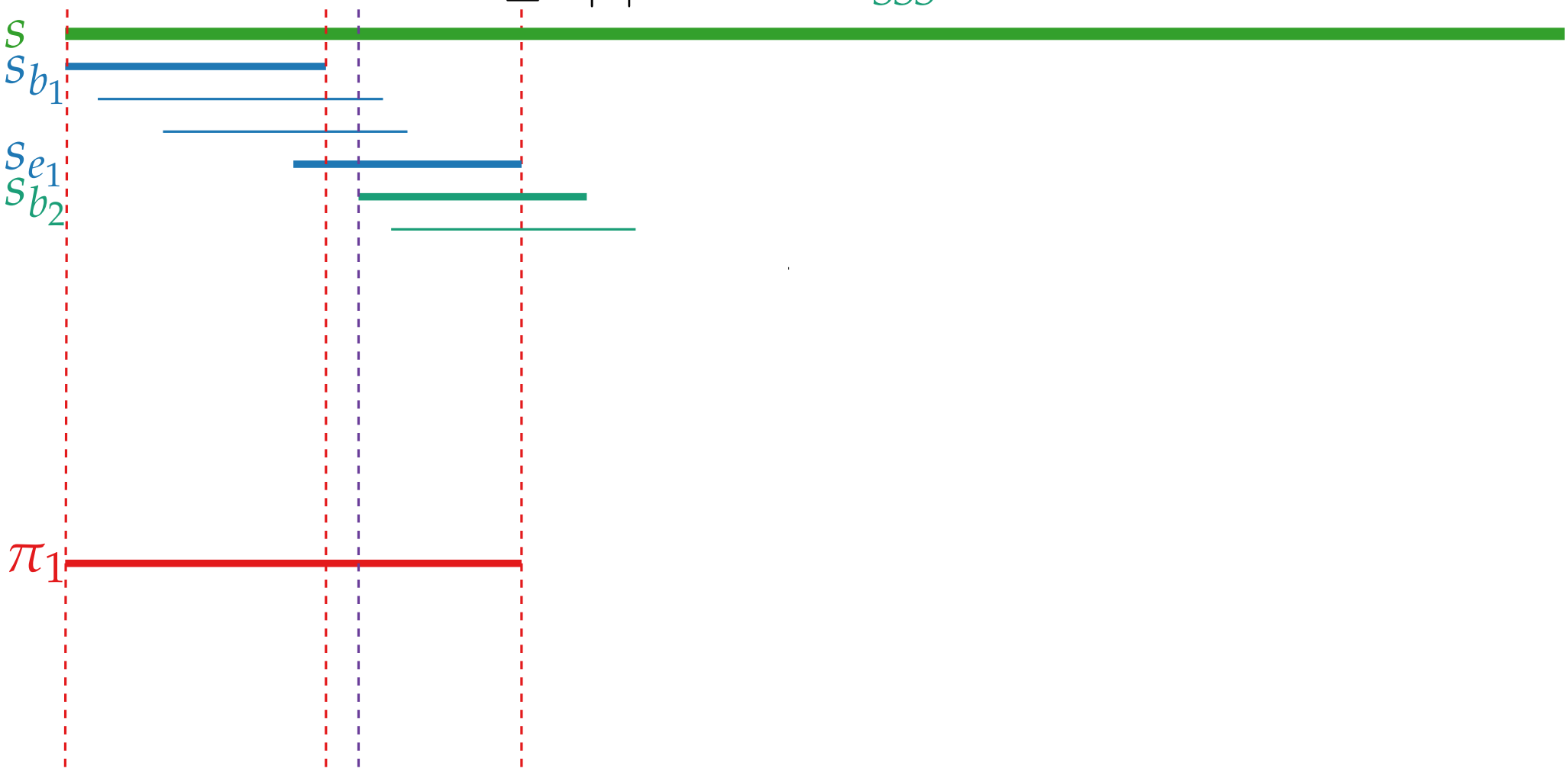
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

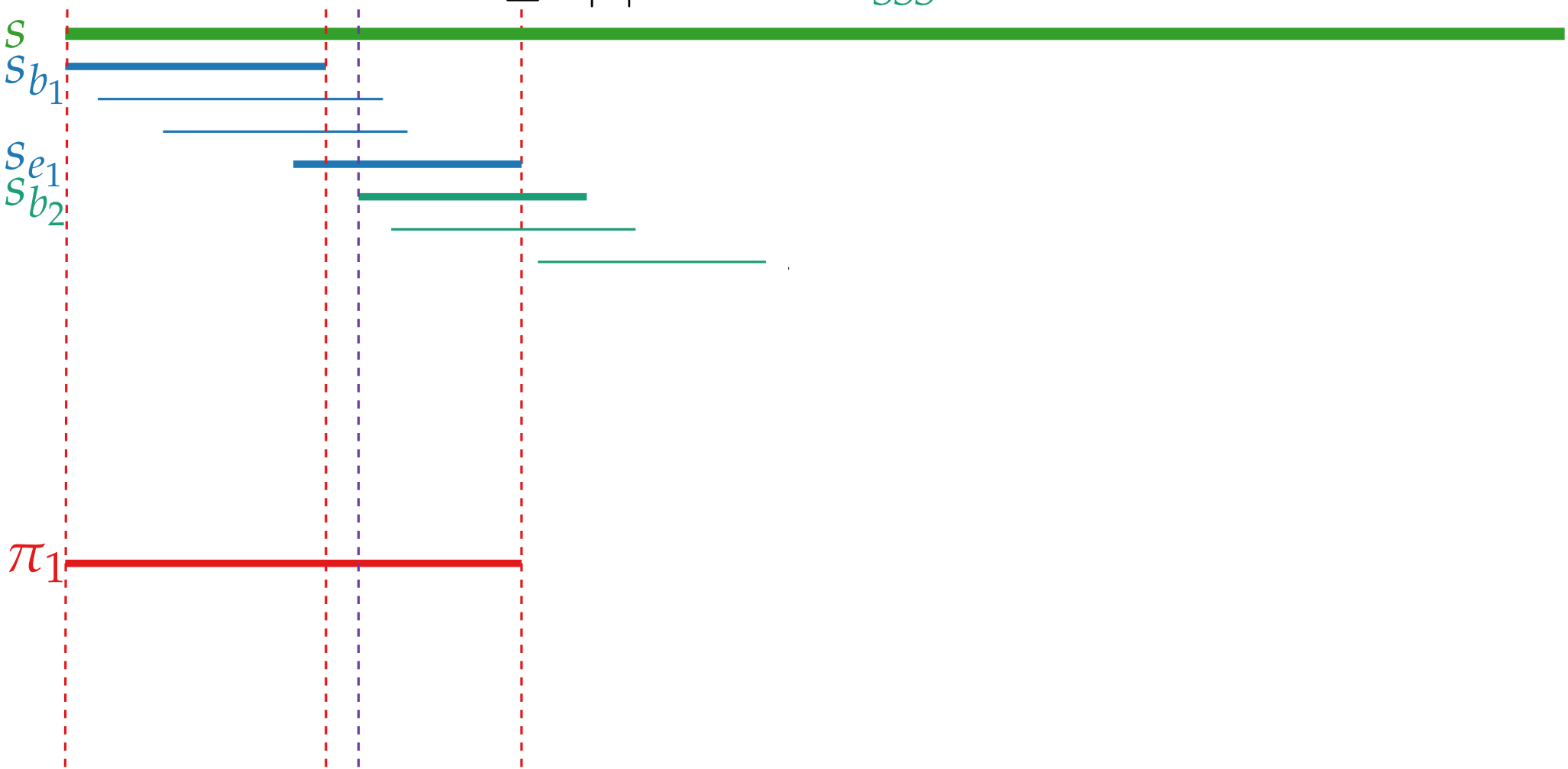
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

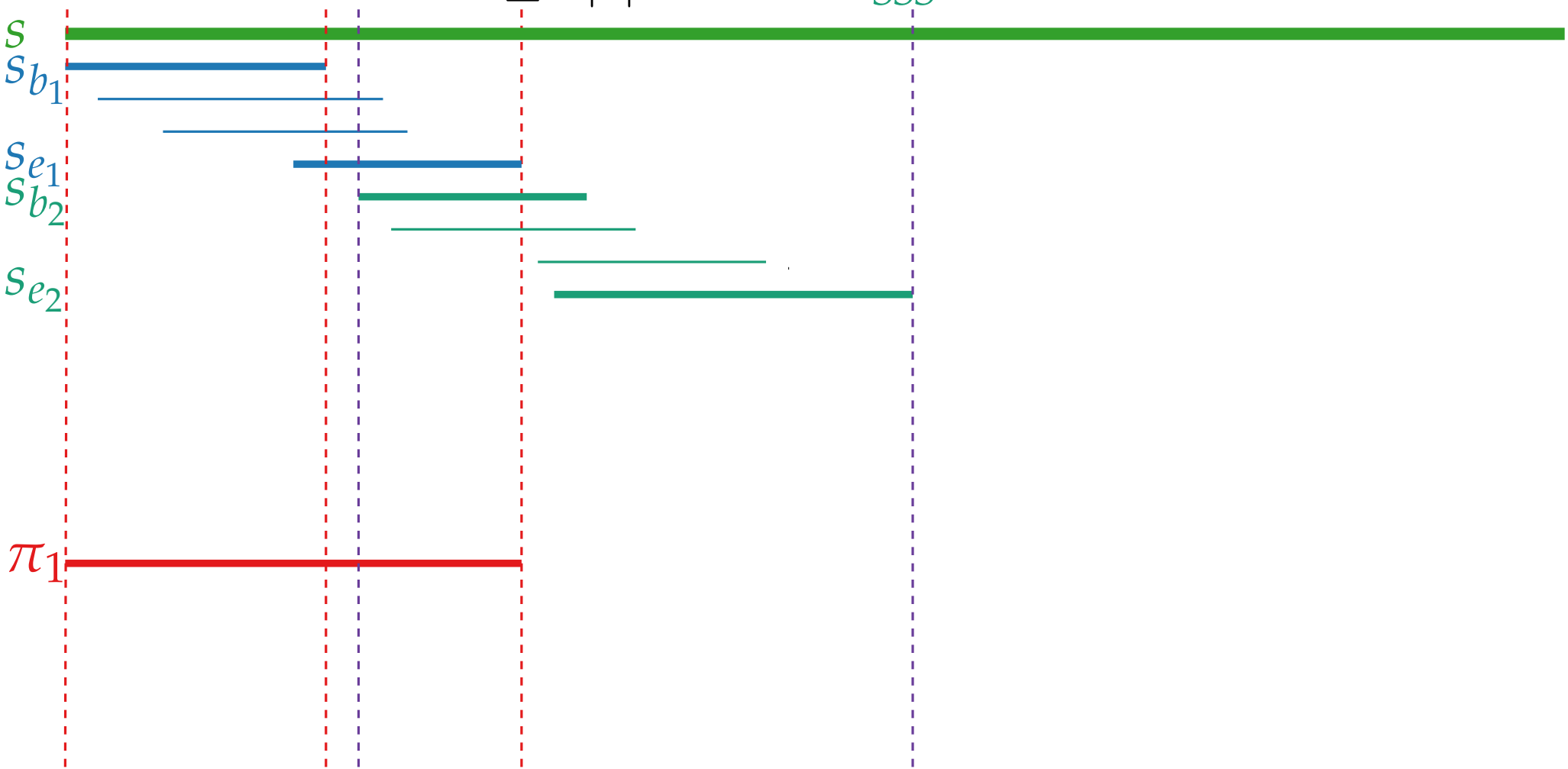
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

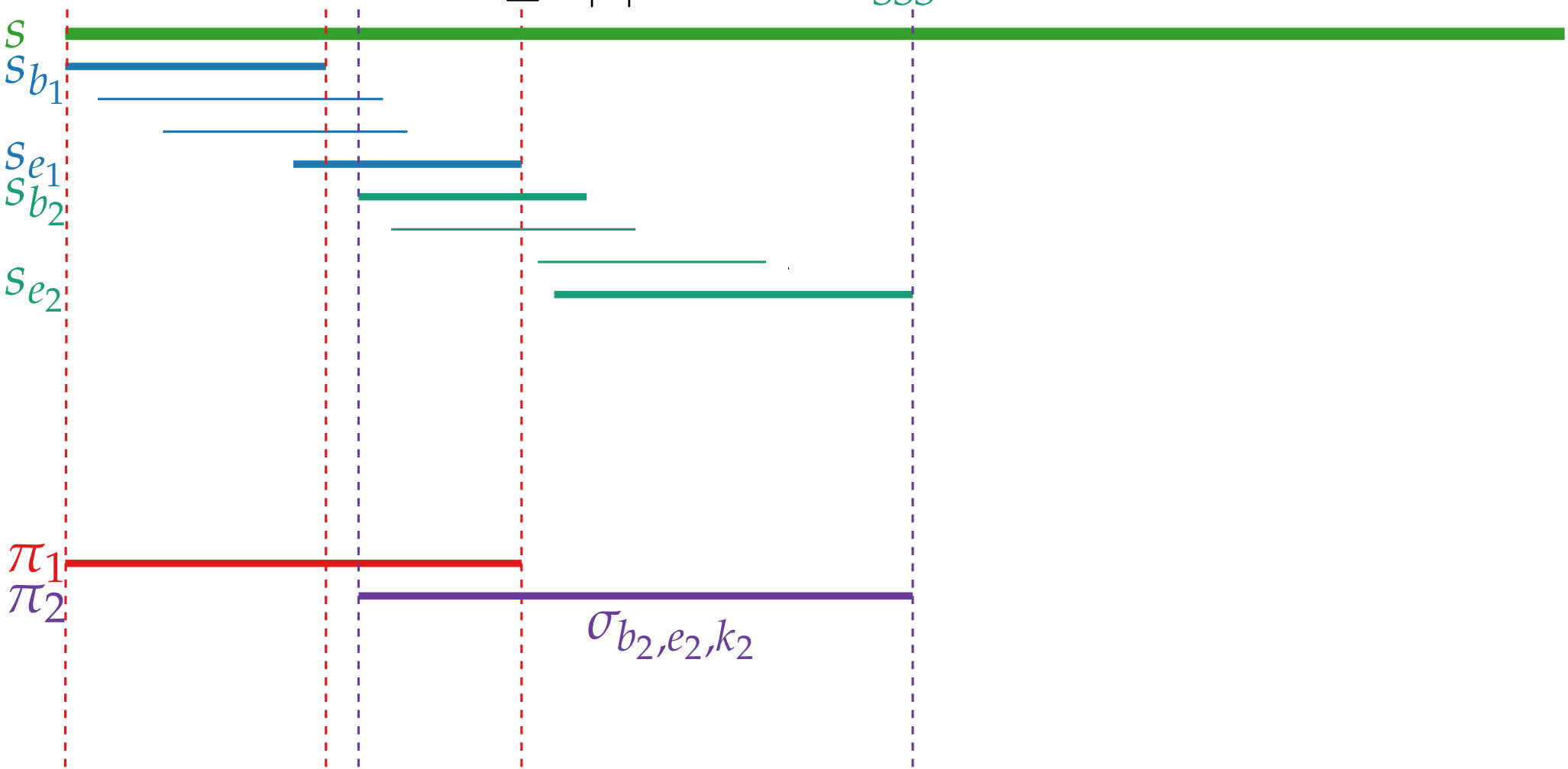
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

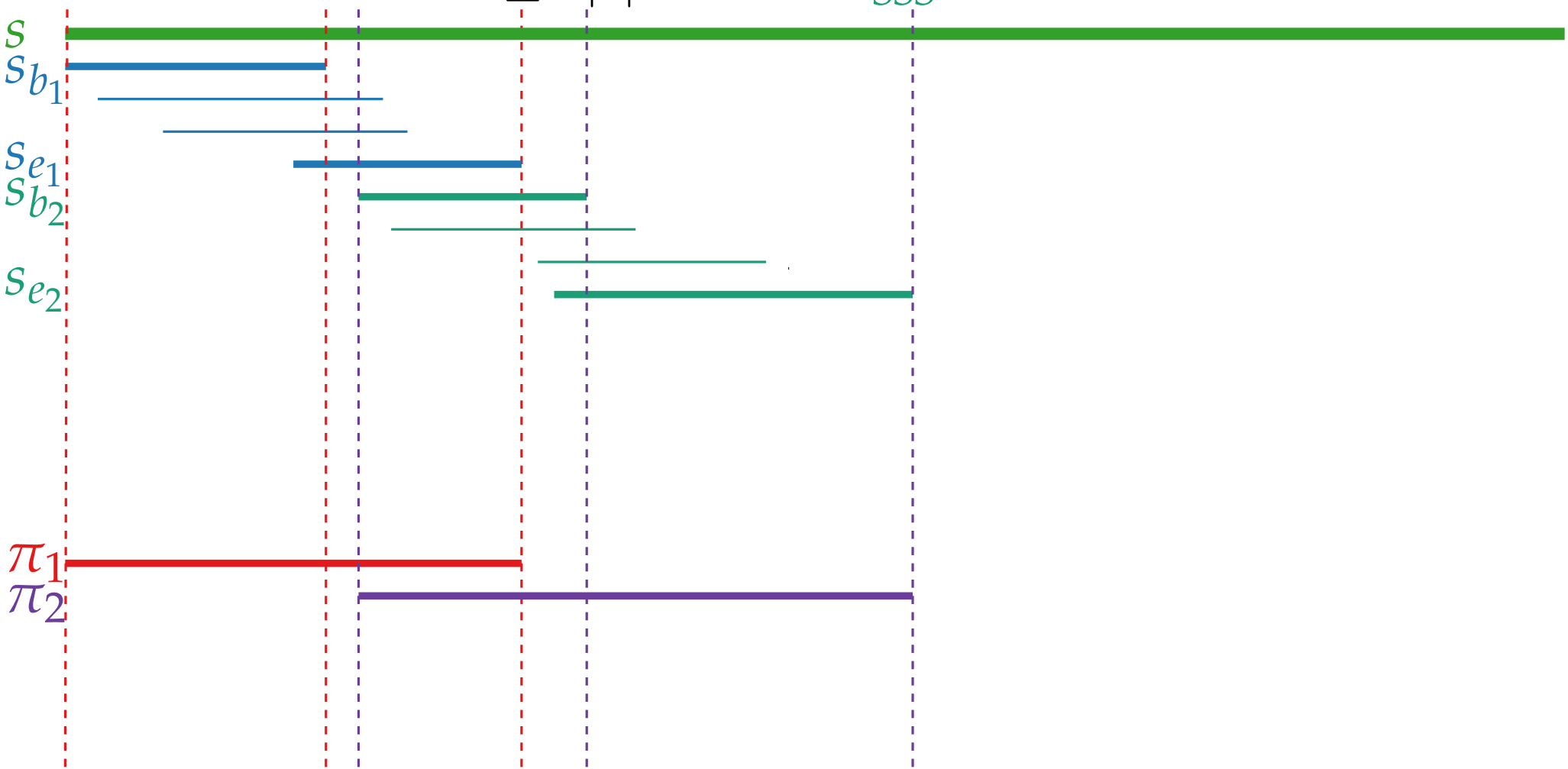
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

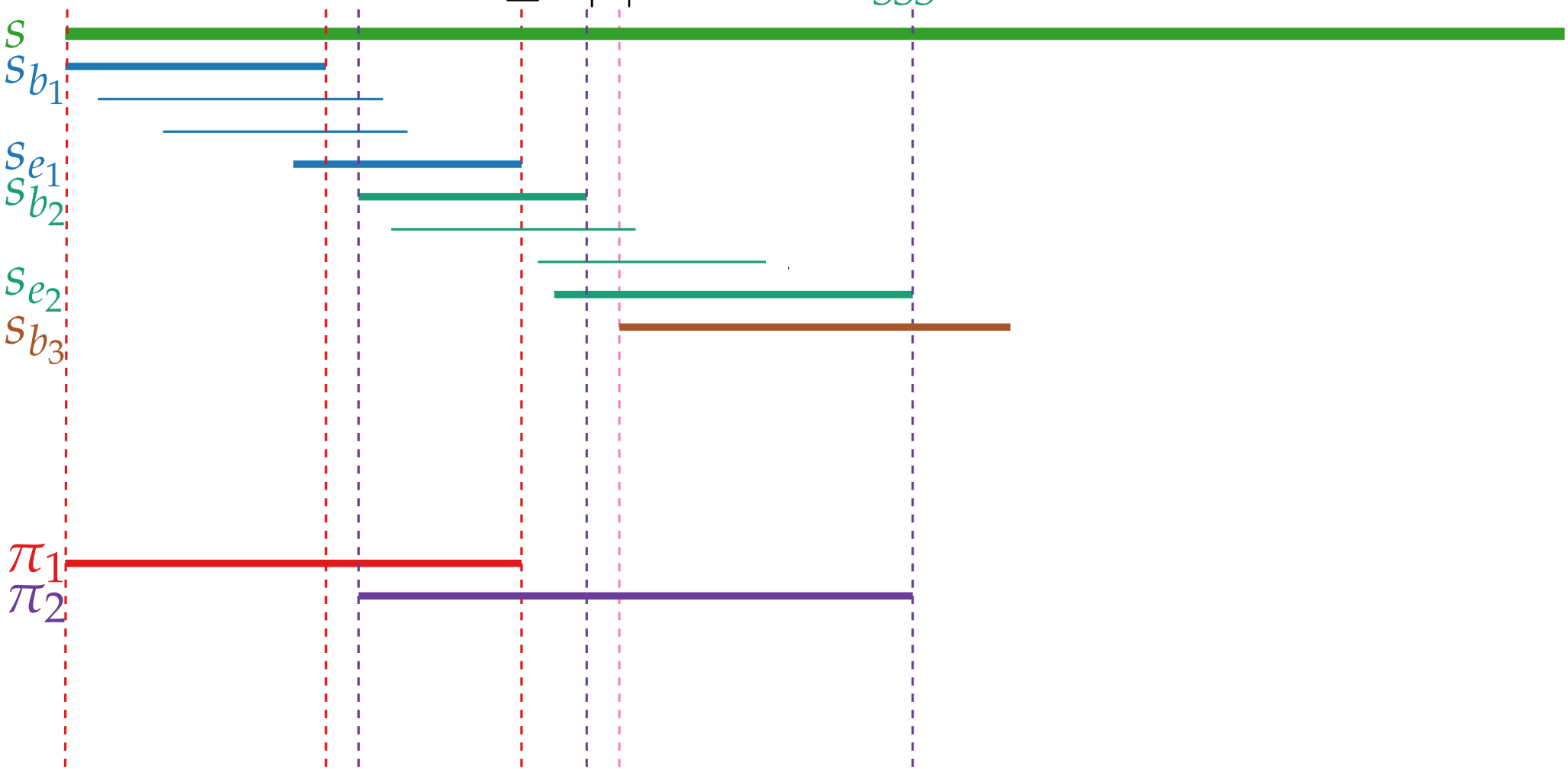
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

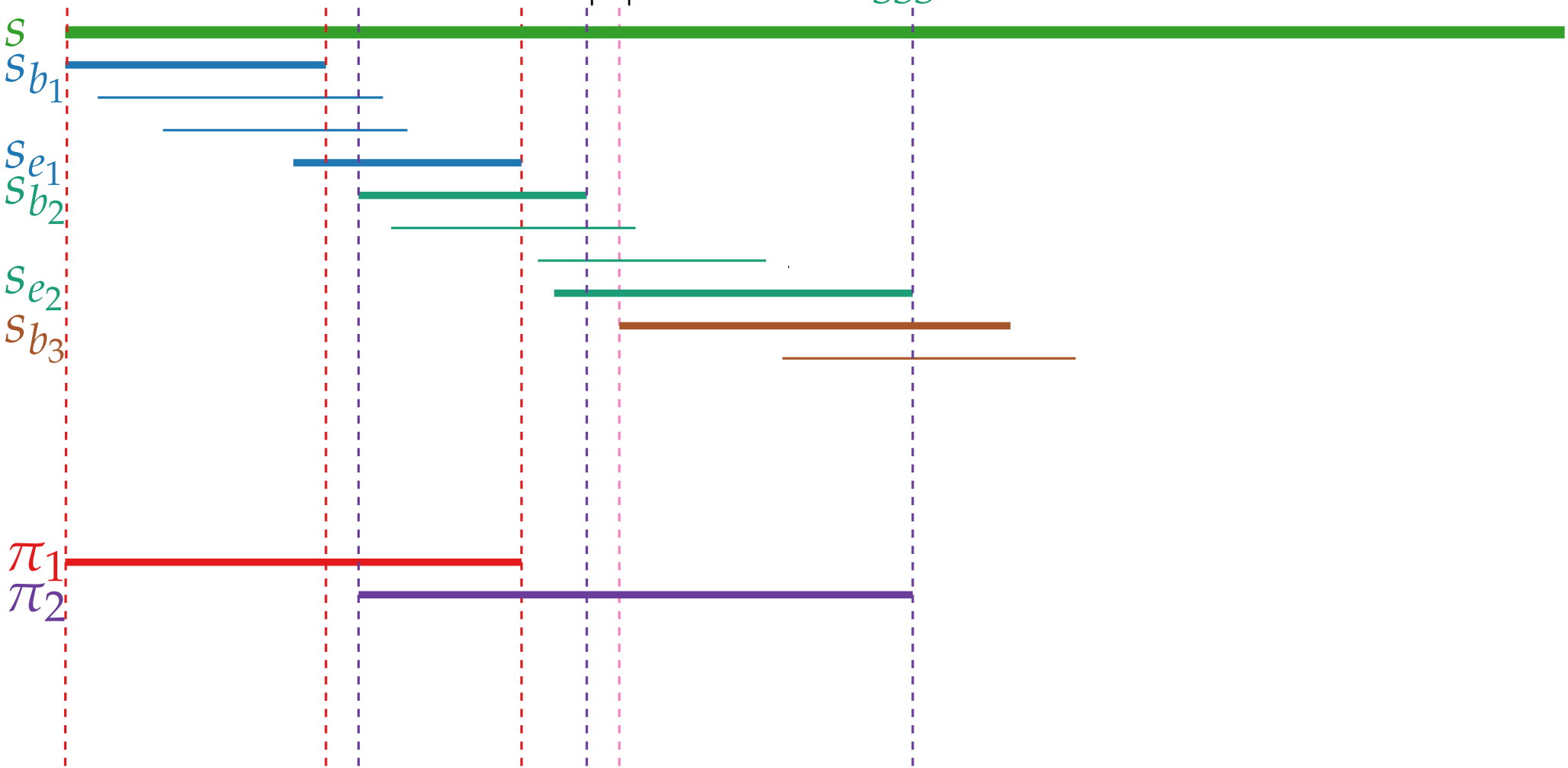
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

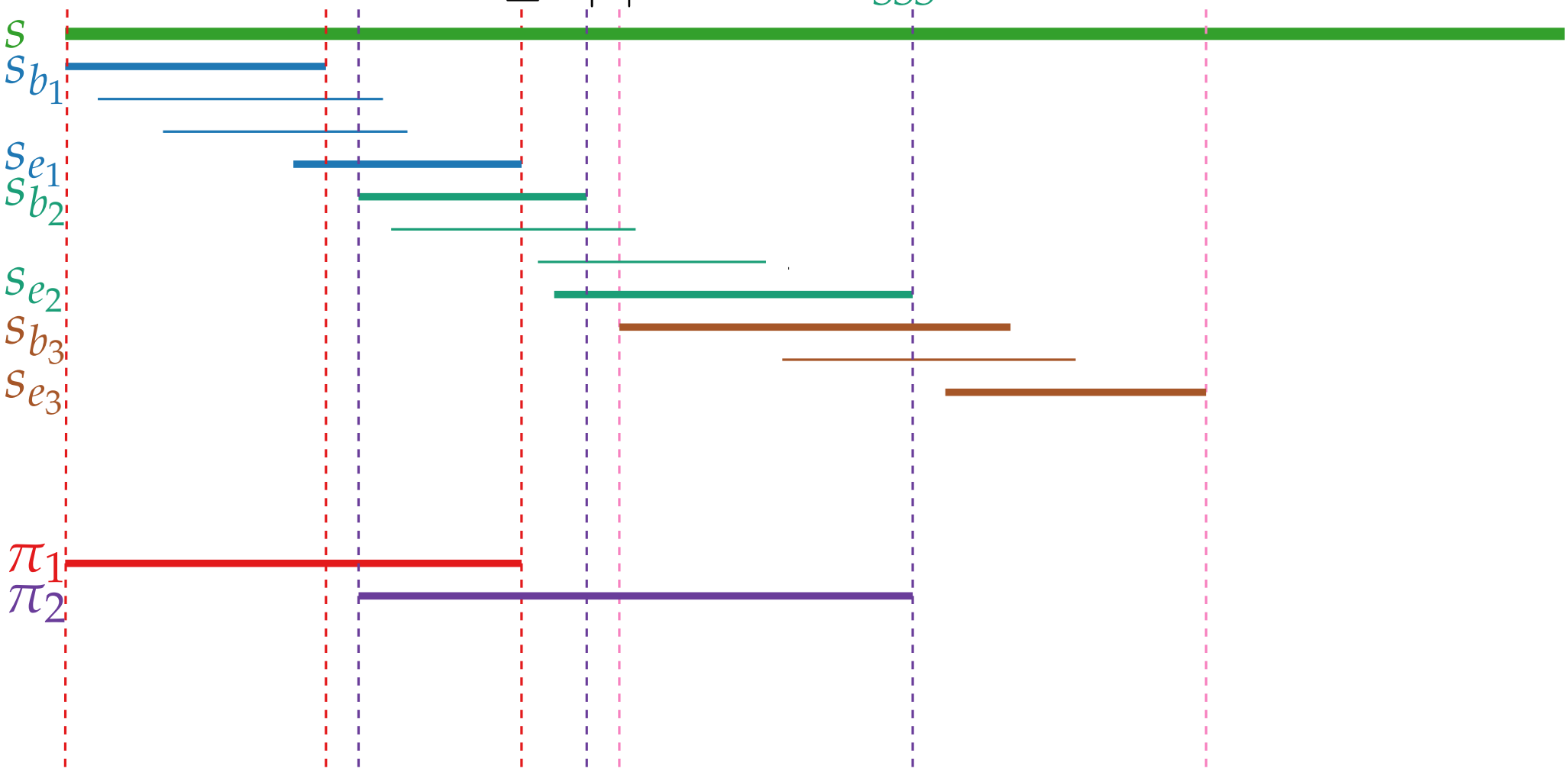
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

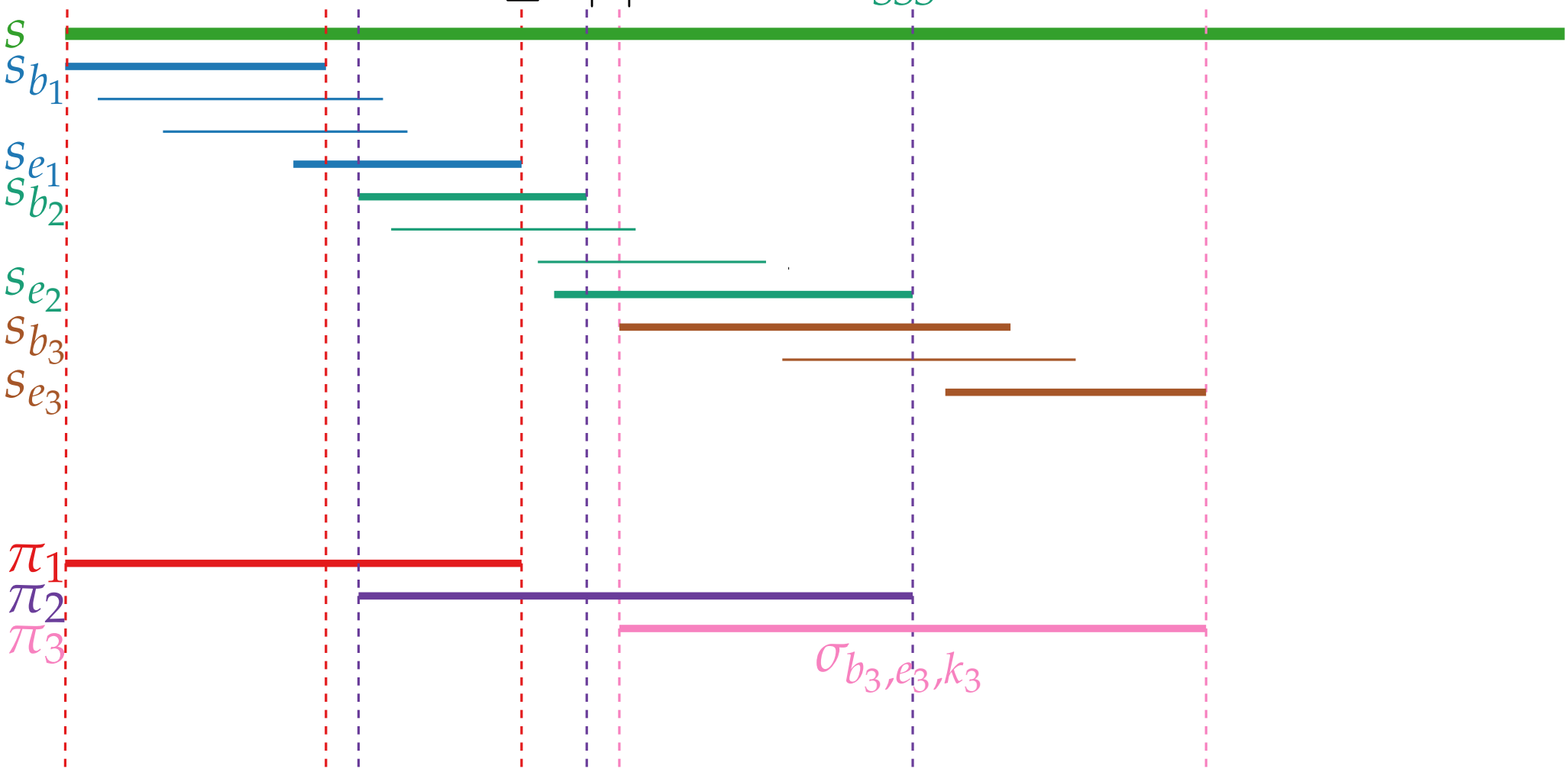
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

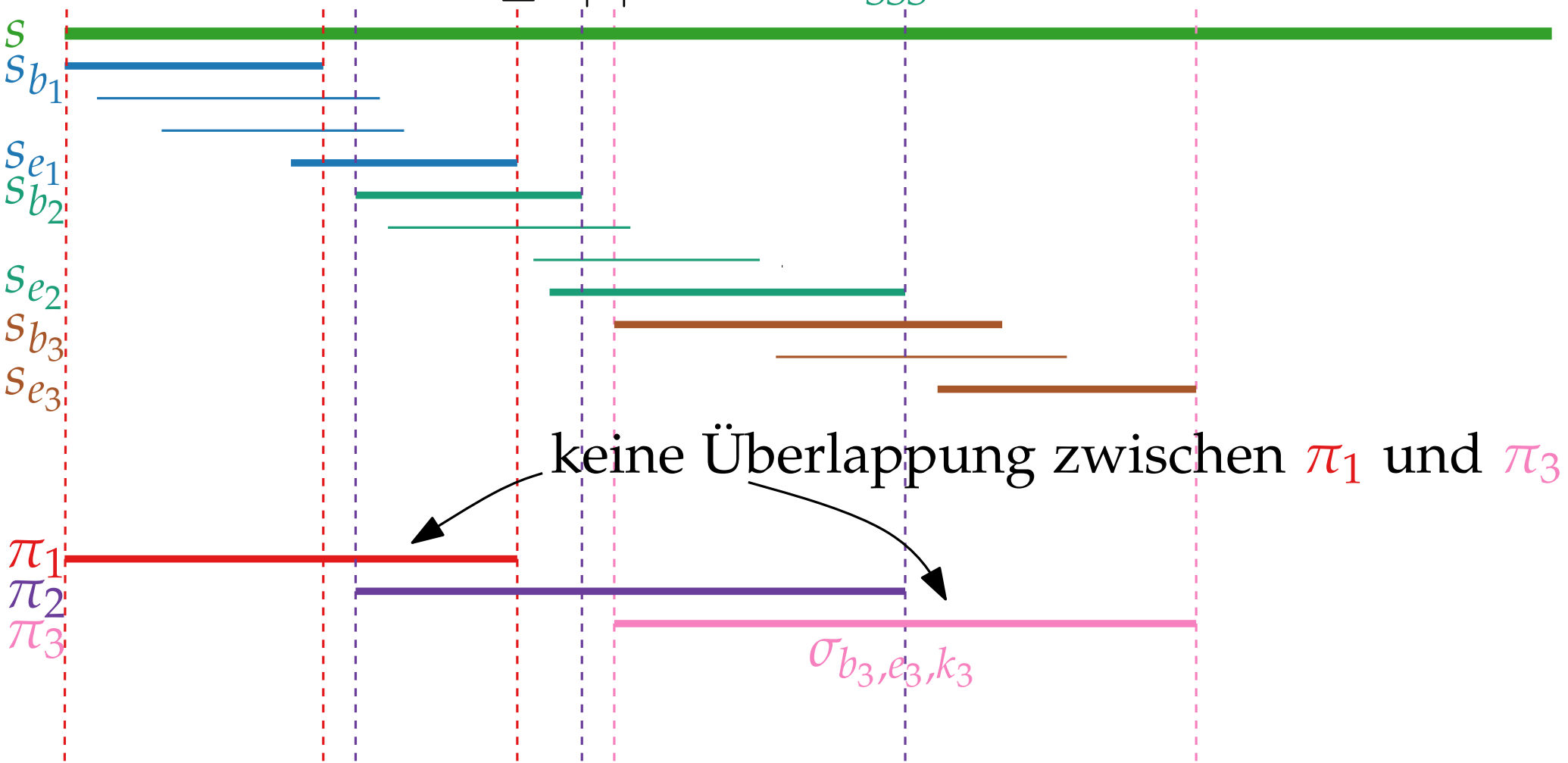
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{sc}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

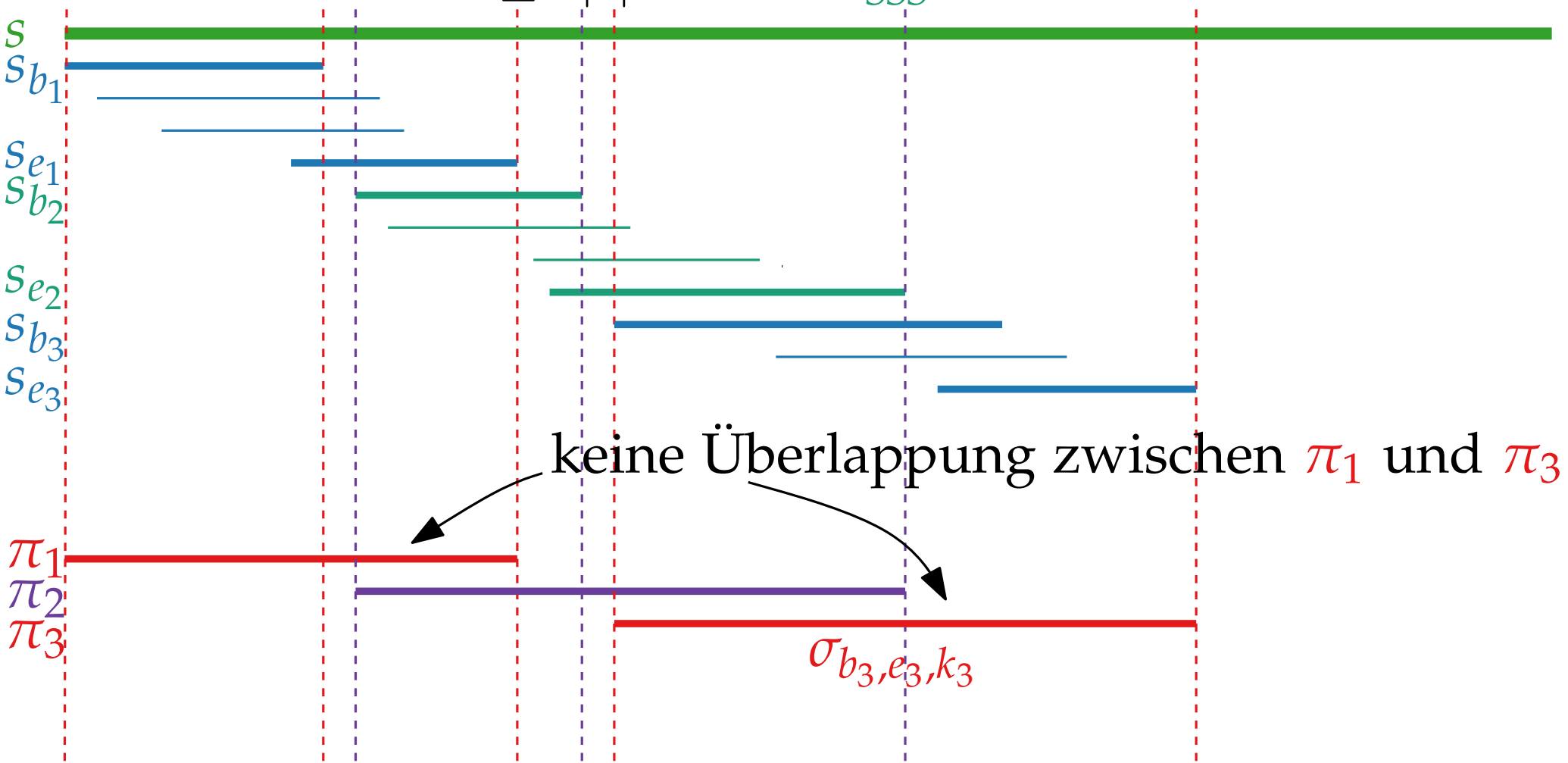
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

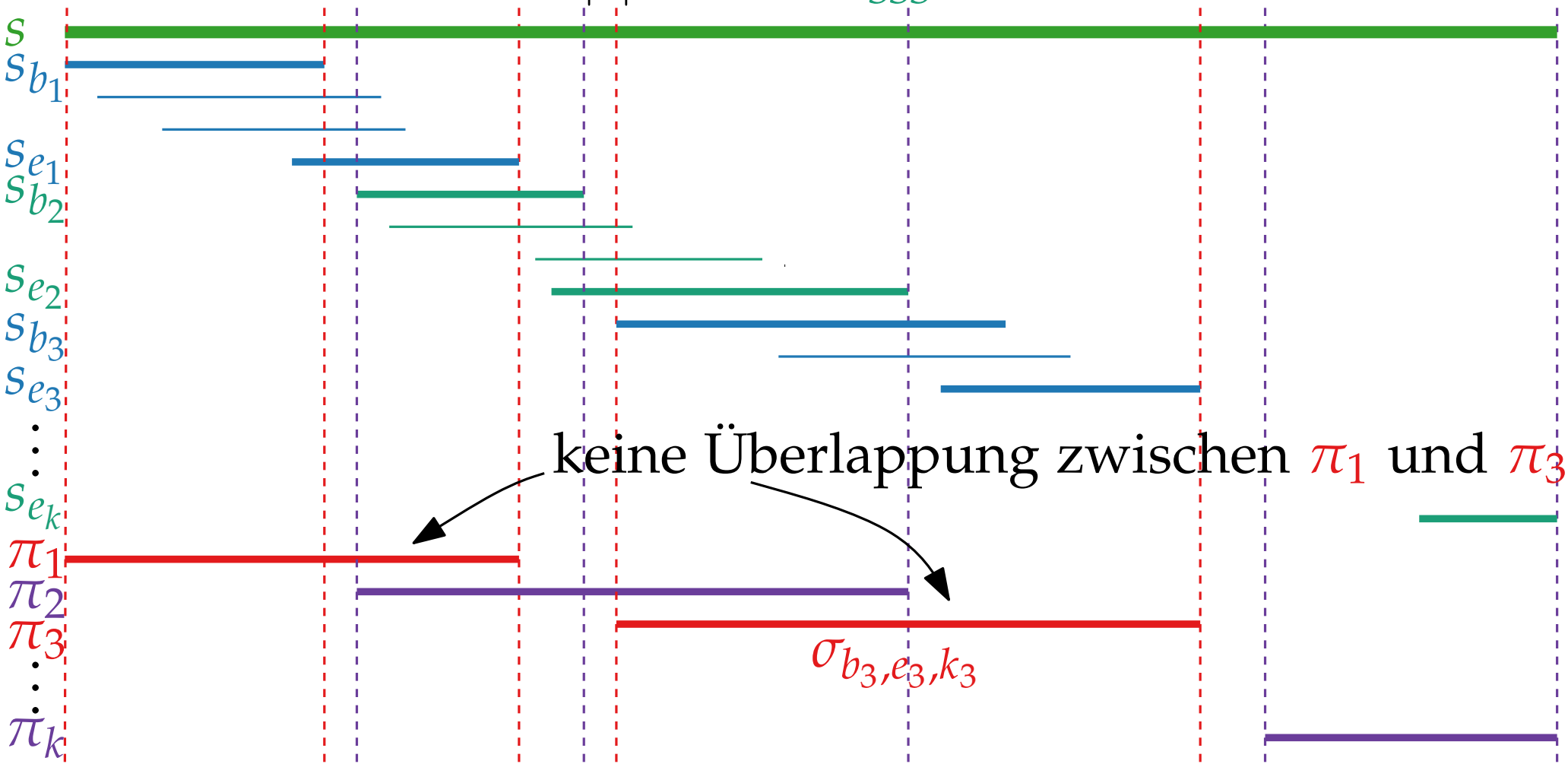
Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{sc}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis. Betrachte optimalen Superstring s.
Konstruiere Überdeckung mit
Kosten $\leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$.



Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis.

Jeder String $s_i \in U$ ist in einem Teilstring π_j enthalten

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis.

Jeder String $s_i \in U$ ist in einem Teilstring π_j enthalten

$\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ ist Lösung für SetCover Instanz mit Kosten $\sum_i |\pi_i|$

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis.

Jeder String $s_i \in U$ ist in einem Teilstring π_j enthalten

$\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ ist Lösung für SetCover Instanz mit Kosten $\sum_i |\pi_i|$

Teilstrings π_j, π_{j+2} sind überschneidungsfrei

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis.

Jeder String $s_i \in U$ ist in einem Teilstring π_j enthalten

$\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ ist Lösung für SetCover Instanz mit Kosten $\sum_i |\pi_i|$

Teilstrings π_j, π_{j+2} sind überschneidungsfrei

Jedes Auftreten eines Zeichens liegt in höchstens **zwei** (aufeinanderfolgenden) Teilstrings π_j und π_{j+1}

Beziehung SSS und SetCover

Lemma. $\mathrm{OPT}_{\mathrm{SC}} \leq 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Beweis.

Jeder String $s_i \in U$ ist in einem Teilstring π_j enthalten

$\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ ist Lösung für SetCover Instanz mit Kosten $\sum_i |\pi_i|$

Teilstrings π_j, π_{j+2} sind überschneidungsfrei

Jedes Auftreten eines Zeichens liegt in höchstens **zwei** (aufeinanderfolgenden) Teilstrings π_j und π_{j+1}

$\sum_i |\pi_i| \leq 2|s| = 2 \cdot \mathrm{OPT}_{\mathrm{SSS}}$

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c
2. Berechne ein Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ mit Algorithmus GreedySetCover

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c
2. Berechne ein Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ mit Algorithmus GreedySetCover
3. Gebe $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ als Superstring zurück

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c
2. Berechne ein Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ mit Algorithmus GreedySetCover
3. Gebe $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ als Superstring zurück

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-$2\mathcal{H}_n$-Approximationsalgorithmus für ShortestSuperString.

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c
2. Berechne ein Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ mit Algorithmus GreedySetCover
3. Gebe $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ als Superstring zurück

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-$2\mathcal{H}_n$-Approximationsalgorithmus für ShortestSuperString.

besser?

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c
2. Berechne ein Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ mit Algorithmus GreedySetCover
3. Gebe $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ als Superstring zurück

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-$2\mathcal{H}_n$-Approximationsalgorithmus für ShortestSuperString.

besser?

Der beste bekannte Approximationsfaktor für ShortestSuperString ist $\frac{71}{30} \approx 2{,}367$

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c
2. Berechne ein Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ mit Algorithmus GreedySetCover
3. Gebe $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ als Superstring zurück

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-$2\mathcal{H}_n$-Approximationsalgorithmus für ShortestSuperString.

besser?

Der beste bekannte Approximationsfaktor für ShortestSuperString ist $\frac{71}{30} \approx 2{,}367$

ShortestSuperString lässt sich nicht mit Faktor $\frac{333}{332} \approx 1{,}003$ approximieren (außer P=NP)

Algorithmus für SSS

1. Erstelle SetCover Instanz U, $\mathcal{S}$, c
2. Berechne ein Set Cover $\{S(\pi_1), \ldots, S(\pi_k)\}$ mit Algorithmus GreedySetCover
3. Gebe $\pi_1 \circ \cdots \circ \pi_k$ als Superstring zurück

Satz. Obiger Algorithmus ist ein Faktor-$2\mathcal{H}_n$-Approximationsalgorithmus für ShortestSuperString.

besser?

Der beste bekannte Approximationsfaktor für ShortestSuperString ist $\frac{71}{30} \approx 2{,}367$

ShortestSuperString lässt sich nicht mit Faktor $\frac{333}{332} \approx 1{,}003$ approximieren (außer P=NP)

Nächste Vorlesung: Dienstag 29.10.2019!