Aufgabensammlung ADS-Repetitorium 2018

Erwartungswert – Greedy-Algorithmen

Aufgabe 1: Leichte Klausuren

Jede ADS-Klausur wird von den Studierenden nach Ihrer Schwierigkeit bewertet. Die erste Klausur wurde im Semster 0 geschrieben, die letzte Klausur im Semester $n+1$. Jede Klausur hat einen eindeutigen Rang erhalten, sodass sich Bewertungen von 0 bis $n+1$ ergeben. Wir betrachten eine Klausur im Semester i als *leicht*, falls für deren Bewertung b_i gilt, dass $b_i > b_{i-1}$ und $b_i > b_{i+1}$ ist.

Wir nehmen an, dass jede mögliche Folge der Bewertungen gleich wahrscheinlich ist, also alle Permutationen von $(b_0, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten können. Als Studierender möchten Sie berechnen, wie viele leichte Klausuren Sie in n Semestern erwarten können.

(a) Sei K eine Zufallsvariable, die die Anzahl der leichten Klausuren in den Semestern 1 bis n beschreibt. Angenommen, Sie hätten eine Formel, die die Wahrscheinlichkeit $P(K = k)$ für $0 \leq k \leq n$ berechnet. Wie könnten Sie dann $E[K]$ für ein festes n ausrechnen?

(b) Im Allgemeinen ist es schwierig, eine Formel für $P(K = k)$ zu finden. Die Fragestellung können Sie aber trotzdem lösen, indem Sie mit Indikatorzufallsvariablen arbeiten. Definieren Sie eine Indikatorzufallsvariable K_i die einem Semester $0 < i < n+1$ den Wert 0 oder 1 zuweist, je nachdem, ob die Klausur einfach war oder nicht. Wir können Sie K in Abhängigkeit von K_i für $0 < i < n+1$ berechnen?

(c) Geben Sie außerdem eine Formel an, mit der Sie $E[K]$ in Abhängigkeit von $E[K_i]$ für $0 < i < n+1$ berechnen können. Welche Gesetzmäßigkeit des Erwartungswerts machen Sie sich zu Nutze?

(d) Nehmen Sie an, Sie kennen eine Formel, die $P(K_i = 1)$ für ein festes i berechnet. Geben Sie eine Formel an, mit der Sie $E[K_i]$ berechnen können. Formulieren Sie in Worten, was die Wahrscheinlichkeit $P(K_i = 1)$ ausdrückt.

(e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bewertung b_i des Semesters i einen bestimmten Wert j aufweist *und* diese Klausur in Semester i eine leichte ist?

(f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(K_i = 1)$ für ein gegebenes i?

(g) Was ist die erwartete Anzahl von Klausuren in den Semestern 1 bis n, die als leicht empfunden werden?

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert

Auf dem Frühjahrs-Volksfest gibt es ein faires Glücksrad, welches mit den fünf Farben rot, grün, blau, gelb und glitzer angemalt ist. Der rote und der grüne Sektor nehmen jeweils 25 % der Fläche des Glücksrads ein, die anderen drei Farben nehmen jeweils ein Sechstel des Glücksrads ein.

(a) Hängt die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger am Ende einer Drehung auf eine bestimmte Farbe zeigt, davon ab, ob die Farben zusammenhängen oder das Glücksrad in nach außen gehenden Streifen bemalt ist?

(b) Sie bekommen fünf Freifahrten, falls Sie „glitzer“ gedreht haben (Hauptpreis), drei Freifahrten, wenn Sie „gelb“ gedreht haben. Zwei Freifahrten gibt es, wenn der Zeiger „blau“ zeigt und eine Freifahrt ist der Gewinn bei „grün“. Die Farbe „rot“ geht leer aus. Wie viele Freifahrten gibt der Standbesitzer im Durchschnitt pro Besucher aus, wenn jeder Besucher einmal drehen darf?

(c) Die letzten neun Drehungen hatten alle das Ergebnis „glitzer“. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die nächste, zehnte Drehung, erneut das Ergebnis „glitzer“ hat?

(d) Dem Standbetreiber ist es wichtig, dass die Kunden in der Warteschlange sehen, dass der Hauptpreis gewinnbar ist. Es sieht jeweils der nächste Kunde der Warteschlange und der vorherige Kunde, der gerade sein Gewinn abholt, das Ergebnis der aktuellen Drehung. Wenn an einem Tag n Kunden das Glücksrad drehen, wie viele sind dann im Durchschnitt Zeuge eines Hauptgewinns eines anderen Kunden?

Aufgabe 3: Greedy-Algorithmen

Geben Sie für jedes der folgenden Probleme einen Greedy-Algorithmus an. Denken Sie daran, die folgenden Punkte zu beweisen:

- Beweisen Sie, dass die Lösung des Greedy-Algorithmus zulässig ist.
- Beweisen Sie, dass die Lösung des Greedy-Algorithmus optimal ist, oder geben Sie ein Beispiel an, in dem der Greedy-Algorithmus nicht die optimale Lösung findet.
- Geben Sie die Laufzeit an.

(a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Gesucht ist eine möglichst große Teilmenge U der Knoten V, sodass für keine zwei Knoten $u, v \in U$ die Kante uv in E ist.

(b) Gegeben ein Baum $T = (V, E)$, in dem jeder Knoten v einen positiven Wert $v.w$ hat. Gesucht ist ein Pfad von der Wurzel zu einem Blatt, sodass die Summe der auf dem Weg liegenden Knoten möglichst groß ist.

(c) Gegeben sind n positive Zahlen in einem Feld. Selektieren Sie $n/2$ Zahlen so, dass dass deren Summe möglichst klein ist.

(d) Gegeben eine Liste von Jobs $j_1, \ldots, j_n$ sowie die Zeit $t_i.t$ mit $1 \leq i \leq 1$, die zum Abarbeiten des i. Jobs benötigt wird. Es stehen zwei Maschinen zur Verfügung. Verteile die Jobs so auf beide Maschinen, dass alle Jobs möglichst schnell bearbeitet wurden.

(e) Sie wollen eine Wüste durchqueren. In der Wüste sind $n + 1$ Oasen, Sie starten in Oase 0 und Ihr Ziel ist Oase n. Dazwischen sind $n - 1$ Oasen, in denen Sie Ihre Wasserflasche auffüllen können. Ihre Wasserflasche reicht für r Kilometer. Oase i und Oase $i + 1$ sind d_i Kilometer voneinander entfernt. Finden Sie eine Folge von Oasen, sodass die möglichst selten nachfüllen müssen. Sie können davon ausgehen, dass alle Distanzen zwischen den Oasen kleiner als r sind.