Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Lehrstuhl für
INFORMATIK I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme

Institut für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen

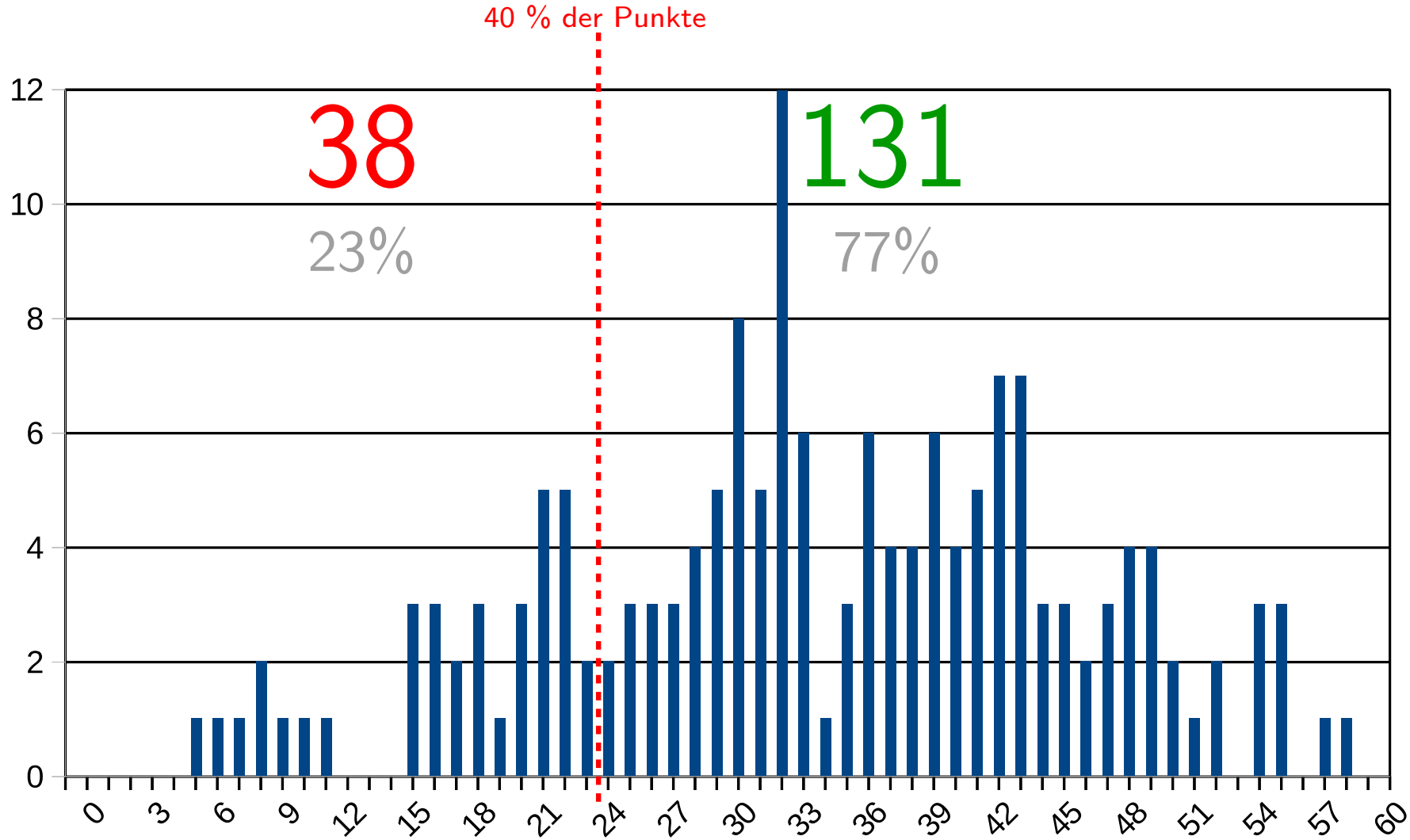
Wintersemester 2019/20

24. Vorlesung

Der Handlungsreisende

Prof. Dr. Alexander Wolff *Lehrstuhl für Informatik I*

Ergebnisse 3. Test WS 2019/20



Mitgeschrieben: 169

Mittelwert: 33,4 Punkte (55 % von 60 Punkten)

Median: 33 Punkte (55 % von 60 Punkten)

Wie gut wurden die Aufgaben gelöst?

1.	Rot-Schwarz Bäume	74 %
2.	Augmentieren	42 %
3.	Primzahlen	47 %
4.	Amortisierte Analyse	59 %
5.	Breitensuche	83 %
6.	Fehlende Zahl	34 %

Zusammenfassung der drei Tests

	Test 1	Test 2	Test 3
Teilnehmer	225	191	169
(in % von 365)	62 %	52 %	46 %
Durchschnitt Punkte	27,4	30,1	33,3
Anteil über 40%	54,2 %	66,5 %	77,5 %

Alle drei Tests mitgeschrieben	157
Anteil über 40 % der Punkte	130
	82,8 %

Vorbereitung auf die Klausur am Mi, 12.2.

Tipp: Schreiben Sie sich alle Fragen auf, die Ihnen bei der Vorbereitung in den Kopf kommen!

- Nutzen Sie die Übungen zum Fragen.
- Kommen Sie nach der Vorlesung zu mir.
- Nutzen Sie meine Sprechstunde (Mi, 13–14 Uhr)

Auch in der letzten Vorlesung (Do, 6.2.) können Sie Fragen stellen. Ich bringe alle Folien mit.

Die vorletzte Vorlesung (Di, 4.2.) fällt aus, da beide großen HS für die Klausur GADS für WiInfs & MCS benötigt werden.

In WueStudy bis Fr, 31.1., 23:59 Uhr zur Klausur *anmelden!*
Wer sich nicht anmeldet, kann die Klausur NICHT mitschreiben!

ADS-Repetitorium

- Mo., 30.3., bis Fr, 3.4. (5 Tage, SR 10 oder HS 2?)
- Bereitet auf den zweiten Klausurtermin (Mi, 15.4.) vor
- Täglich 9:30–16:00 Uhr: Abwechselnd Vorlesung / Übung
- Leitung: David Dingel, Tim Gerlach, Diana Sieper
- 2008 haben 15 HörerInnen an der 2. Klausur teilgenommen.

	ADS-Repetitorium	*bestanden*
regelmäßig teilgenommen	7	4
nicht oder unregelmäßig	8	1

Das Problem

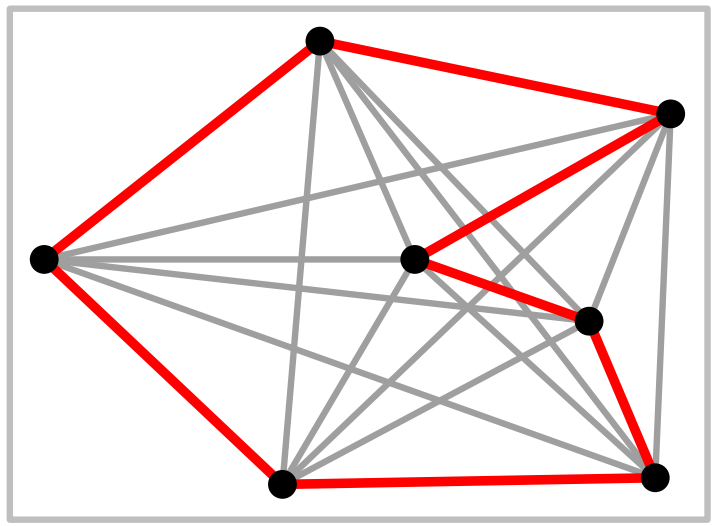
Definition. *Traveling Salesperson Problem (TSP)*

Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Gesucht: Hamiltonkreis K in G mit minimalen Kosten $c(K) := \sum_{e \in K} c(e)$.

(Ein HK besucht jeden Knoten genau $1\times$.)

Beispiel. $c \equiv d_{\text{Eukl.}}$



Problem.

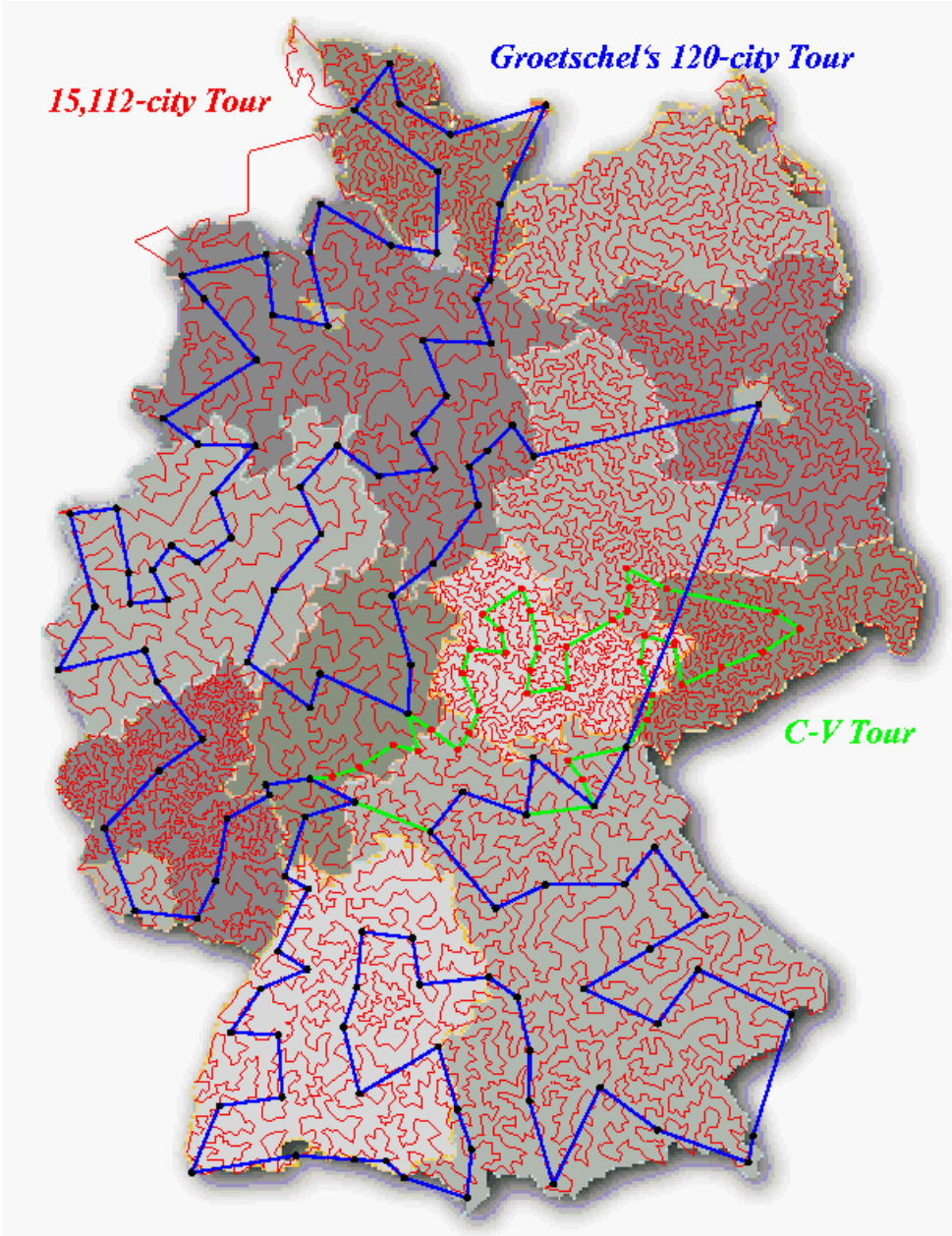
- TSP ist NP-schwer
- und schwer zu approximieren.

Etwas Geschichte

Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein.
Von einem alten Commis-Voyageur
[1832]

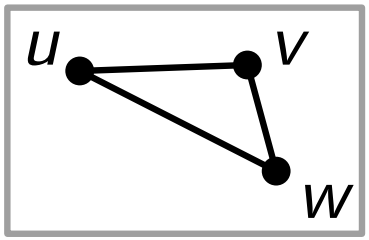
Rekord I:
optimale 120-Städte-Tour
[Groetschel, 1977]

Rekord II:
optimale 15.112-Städte-Tour
[Applegate, Bixby, Chvátal, Cook 2001]



Was tun? – Mach das Problem leichter!

Problem: *Metrisches Traveling Salesperson Problem (Δ-TSP)*

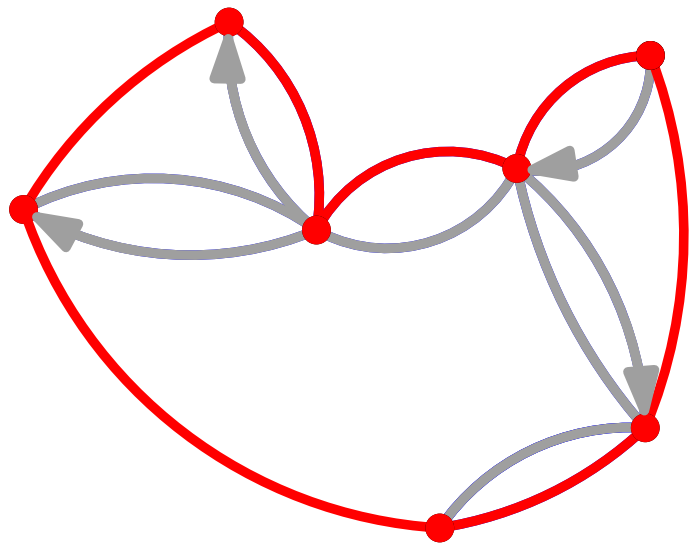


Gegeben: unger. vollständiger Graph $G = (V, E)$
mit Kantenkosten $c\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
die die Dreiecksungleichung erfüllen,
d.h. $\forall u, v, w \in V\colon c(u, w) \leq c(u, v) + c(v, w)$.

Gesucht: Hamiltonkreis in G mit minimalen Kosten.

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



Algorithmus:

Berechne min. Spannbaum MSB.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

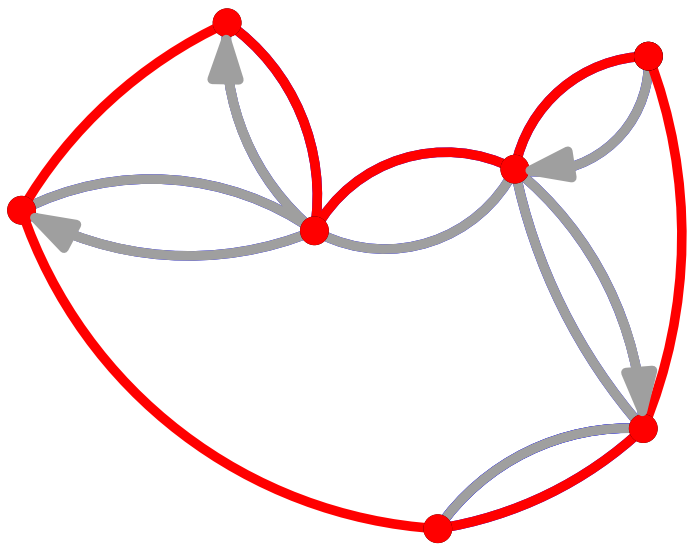
Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

Analyse

Satz. Es gibt eine 2-Approximation für Δ-TSP.

Beweis.



1. *Algorithmus*

Berechne MSB von G.

Verdopple MSB $\Rightarrow$ ergibt Kreis!

Durchlaufe den Kreis.

Überspringe besuchte Knoten.

Füge „Abkürzungen“ ein.

2. *Analyse*

$$c(\text{ALG}) \leq c(\text{Kreis}) = 2 \cdot c(\text{MSB}) \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

Dreiecksungleichung

Optimale TSP-Tour minus eine Kante ist (i.A. nicht minimaler) Spannbaum!!

Die „Kunst“ der unteren Schranke: $c(\text{min. Spannbaum}) \leq c(\text{TSP-Tour})$

Exakte Berechnung: Brute Force

Algorithmus:

- Für jede Permutation σ von $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$:

  Berechne die Kosten der Tour durch die Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in dieser Reihenfolge:

  $c(\sigma) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_{\sigma(i)} v_{\sigma(i+1)}) + c(v_{\sigma(n)} v_{\sigma(1)})$

- Gib die kürzeste Tour zurück.

Laufzeit:

Anzahl Permutationen von n Objekten: $n!$

Hält man den 1. Knoten fest, so bleiben „nur“ $(n-1)!$ Permutationen.

Berechnung einer Tourlänge $c(\sigma)$: $O(n)$ Zeit.

Berechnung der nächsten Permutation: ???

Ang. ??? $= O(n)$, dann ist die Laufzeit $O(n!)$.

Speicher:

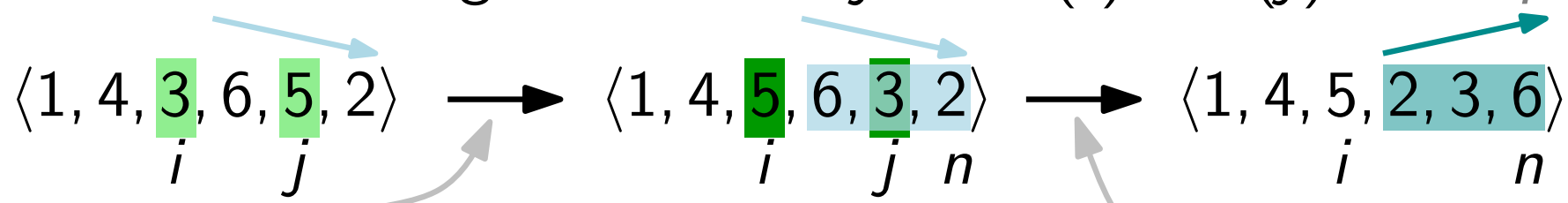
$O(n)$ für: bisher beste, aktuelle & nächste Permutation.

Wie iteriert man durch alle Permutationen?

Z.B. in lexikografischer Ordnung:
$\langle 1,2,3,4,5,6\rangle, \langle 1,2,3,4,6,5\rangle, \langle 1,2,3,5,4,6\rangle, \ldots, \langle 6,5,4,3,2,1\rangle$.

Für gegebene Permutation σ, finde Nachfolger in $O(n)$ Zeit:

- Bestimme größten Index $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ mit $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.
- Falls nicht existiert, fertig ($\sigma =$ letzte Permutation).
- Sonst bestimme größten Index j mit $\sigma(i) < \sigma(j)$. *Beispiel:*



- Vertausche $\sigma(i)$ und $\sigma(j)$.
- Kehre die Teilfolge $\langle \sigma(i+1), \sigma(i+2), \ldots, \sigma(n)\rangle$ um.

Wie groß ist $n!$?

$$\underbrace{n/2 \cdot n/2 \cdot \ldots \cdot n/2}_{n/2 \text{ mal}} \leq n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \leq n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2^{n/2 \log_2 n/2} \leq n! \leq n^n = \left(2^{\log_2 n}\right)^n = 2^{n \log_2 n}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{n! \in 2^{\Theta(n \log n)}}$$

Genauer: Sterlingformel [James Sterling, 1692–1770]

Für $n \to \infty$ gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Noch genauer:

$$\sqrt{2\pi}\, \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\, \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exakte Berechnung: Schneller per DP!

Wir beginnen alle Rundtouren im Knoten v_1.

Für eine Knotenmenge $W \subseteq V \setminus \{v_1\}$ mit $v_i \in W$ definieren wir

$\mathrm{OPT}[W, v_i] :=$ optimale (kürzeste) Länge eines v_1-v_i-Wegs *durch alle Knoten in W*.

Schritt 2 für DP: *Definiere Wert einer opt. Lösung rekursiv!*

Dann gilt für $W = \{v_i\}$, $i > 1$:

$$\mathrm{OPT}[W, v_i] = c(v_1, v_i)$$

Und für W mit $|W| \geq 2$, $v_i \in W$:

$$\mathrm{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \mathrm{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$$

Letzter Knoten vor v_i

$$\Rightarrow \quad \mathrm{OPT} = \min_{k \neq 1} \mathrm{OPT}[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$$

Index des letzten Knotens vor v_1

Der Algorithmus von Held-Karp

Schritt 3 für DP: *Berechne Wert einer opt. Lsg. (hier: bot.-up)!*

HeldKarp(Knotenmenge V, Abstände $c\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$)

for $i = 2$ **to** n **do**
  $\mathrm{OPT}[\{v_i\}, v_i] = c(v_1, v_i)$
for $j = 2$ **to** $n-1$ **do**
  foreach $W \subseteq \{v_2, \ldots, v_n\}$ mit $|W| = j$ **do**
    foreach $v_i \in W$ **do**
      $\mathrm{OPT}[W, v_i] = \min_{v_j \in W \setminus \{v_i\}} \mathrm{OPT}[W \setminus \{v_i\}, v_j] + c(v_j, v_i)$
return $\min_{k \neq 1} \mathrm{OPT}[\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}, v_k] + c(v_k, v_1)$

Laufzeit: Berechnung von $\mathrm{OPT}[W, v_i]$: $O(n)$ Zeit

Wie viele Paare (W, v_i) mit $v_i \in W$ gibt's? $\leq n \cdot 2^{n-1}$

$\Rightarrow$ Gesamtlaufzeit $\in O(n^2 \cdot 2^n)$ **Speicher:** $O(n \cdot 2^n)$

Vergleich

	Brute Force	Held-Karp
Laufzeit	$2^{\Theta(n \log n)}$	$O\left(n^2 \cdot 2^n\right)$
Speicher	$O(n)$	$O\left(n \cdot 2^n\right)$

Der Algorithmus von Held und Karp verringert also die Laufzeit zu Kosten des Speicherplatzverbrauchs.

Das bezeichnet man als Laufzeit-Speicherplatz-*Trade-Off*.