Lehrstuhl für Informatik I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 28.11.2017

Prof. Dr. Alexander Wolff
Dr. Joachim Spoerhase
B. Sc. Moritz Beck

6. Übungsblatt

Vorlesung Approximationsalgorithmen (Winter 2017/18)

Aufgabe 1 – LP-Runden in der Praxis

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit LP-Runden in der Praxis. Dazu verwenden wir einen LP-Solver, also eine Software die (ganzzahlige) lineare Programme lösen kann. Wir wollen eine experimentelle Untersuchung des LP-Rundungs-Algorithmus für (ungewichtetes) VERTEX COVER aus der Vorlesung durchführen, um seine Approximationsgüte in der Praxis zu messen.

a) Implementieren Sie das ILP für (ungewichtetes) VERTEX COVER. Testen Sie Ihr Programm auf dem Graphen K_3 und dem Graphen aus Vorlesung 1. **2 Punkte**

b) Implementieren Sie die LP-Relaxierung und runden Sie die Variablen der fraktionalen Lösung entsprechend Übung 4.2 auf, um eine ganzzahlige Lösung zu erhalten. Testen Sie Ihr Programm auf den beiden Graphen aus a) und vergleichen Sie die erhaltenen Lösungen. **2 Punkte**

Als nächstes wollen wir die Qualität der Lösungen durch LP-Runden auf einer größeren Menge von Instanzen experimentell untersuchen. Dazu generieren wir jeweils zufällig einen Graphen $G_{n,p}$, wobei n die Anzahl der Knoten und p die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass je zwei (verschiedene) Knoten mit einer Kante verbunden sind.

c) Implementieren Sie ein Programm, das das ILP aus a) und den Approximationsalgorithmus aus b) auf einem zufällig generierten Graphen $G_{n,p}$ ausführt. Stellen Sie OPT_f, OPT und ALG für drei Instanzen graphisch auf einem Zahlenstrahl dar. Berechnen Sie das durchschnittliche Integrality Gap OPT / OPT_f, die durchschnittliche „Approximationsgüte"ALG / OPT und das Verhältnis von ALG zu OPT_f für eine große Anzahl solcher Graphen. Stellen Sie die Verteilung dieser Zufallsvariablen geeignet graphisch dar (z.B. Histogram).

   Variieren Sie n und p und schildern Sie Ihre Beobachtungen. Ab welchen Werten ist das Lösen des ILP nicht mehr praktikabel und welche Aussage über die Qualität von ALG können Sie trotzdem treffen? **4 Punkte**

Zum Abschluss werfen wir einen Blick auf die Laufzeit der beiden Ansätze aus a) und b).

d) Vergleichen Sie die Laufzeit für das Lösen des ILP mit LP-Runden. Variieren Sie auch hier die Parameter n und p, erstellen Sie eine Statistik der gemessenen Laufzeiten und diskutieren Sie die Auswirkungen der Parameterwahl auf die beiden Ansätze. **2 Punkte**

Hinweis: In der Übung verwenden wir die kommerzielle Software IBM ILOG CPLEX, die bereits auf den Rechnern im CIP-Pool E40 zur Verfügung steht. Es gibt aber auch eine große Anzahl anderer Solver, darunter auch freie.

Aufgabe 2 – Metrisches k-CLUSTER

Gegeben sei ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c \colon E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$, welche die Dreiecksungleichung erfüllen, und eine positive ganze Zahl k. Gesucht ist eine Partition von V in k Knotenmengen $V_1, \ldots, V_k$, genannt *Cluster*, so dass die teuerste Intraclusterkante möglichst günstig ist. Mit anderen Worten: Es soll

$$\max_{1 \leq i \leq k,\ u,v \in V_i} c(u, v)$$

minimiert werden.

a) Geben Sie einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für dieses Problem an. **5 Punkte**

b) Zeigen Sie, dass es unter der Annahme $P \neq NP$ keinen Faktor-$(2-\epsilon)$-Approximationsalgorithmus für dieses Problem gibt, wobei $\epsilon > 0$. **5 Punkte**

   Vorschlag: Benutzen Sie die Schwere des Graph-Färbungsproblem.