Lehrstuhl für Informatik I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 21.11.2017

Prof. Dr. Alexander Wolff
Dr. Joachim Spoerhase
B. Sc. Moritz Beck

5. Übungsblatt

Vorlesung Approximationsalgorithmen (Winter 2017/18)

Aufgabe 1 – Dual-Fitting für SETCOVER

Betrachten Sie den Greedy-Algorithmus und die LP-Relaxierung für SETCOVER aus der Vorlesung. Der Algorithmus berechnet für jedes Grundelement e einen Preis $\mathrm{preis}(e)$. Wir setzen nun $y_e := \mathrm{preis}(e)/\mathcal{H}_k$ für jedes Grundelement e wobei k die Kardinalität der größten Menge der SETCOVER-Instanz ist. Zeigen Sie, dass die Variablen y_e eine zulässige Dual-Lösung bilden und folgern Sie, dass die Kosten des Greedy-Algorithmus durch $\mathcal{H}_k \cdot \mathrm{OPT}_f$ beschränkt sind. Hierbei ist OPT_f der optimale Zielfunktionswert der LP-Relaxierung für SETCOVER. **6 Punkte**

Aufgabe 2 – Randomisiertes Runden für SETCOVER

Betrachten Sie die folgende Prozedur für SETCOVER eine SETCOVER-Instanz $(U, \mathcal{S}, c)$.

Algorithmus 1 : RundeRandomisiert$(U, \mathcal{S}, c)$

```
Bestimme eine optimale Lösung x für die LP-Relaxierung von SETCOVER aus der Vorlesung
C ← ∅
foreach S ∈ S do
    füge S mit Wahrscheinlichkeit x_S zu C hinzu
return C
```

a) Zeigen Sie, dass die erwarteten Kosten von $\mathcal{C}$ genau OPT_f sind. **3 Punkte**

b) Sei $a \in U$ ein beliebiges Grundelement. Zeigen Sie, dass a mit Wahrscheinlichkeit höchstens $1/e$ von $\mathcal{C}$ *nicht* überdeckt wird. **3 Punkte**

   Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $1 + x \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei d eine genügend große Konstante. Wir führen nun die obige Prozedur RundeRandomisiert$(U, \mathcal{S}, c)$ genau $d \cdot \log n$ mal aus. Sei $\mathcal{C}'$ die Vereinigung aller so gewählten Mengen.

c) Zeigen Sie, dass jedes Grundelement $a \in U$ mit Wahrscheinlichkeit höchstens $1/(4n)$ von $\mathcal{C}'$ *nicht* überdeckt wird, sofern d genügend groß gewählt ist. **3 Punkte**

d) Zeigen Sie, dass die Kosten der Menge $\mathcal{C}'$ mit Wahrscheinlichkeit höchstens $1/4$ größer als $4d \log n \cdot \mathrm{OPT}_f$ sind. **3 Punkte**

e) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}'$ mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1/2$ eine *zulässige* Lösung mit Kosten höchstens $4d \log n \cdot \mathrm{OPT}_f = O(\log n) \cdot \mathrm{OPT}_f$ ist. **2 Punkte**

Abgabe bis Mittwoch, 29.11.2017, vor der Vorlesung.