Lehrstuhl für Informatik I
Effiziente Algorithmen und wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 06.11.2017

Prof. Dr. Alexander Wolff
Dr. Joachim Spoerhase
B. Sc. Moritz Beck

3. Übungsblatt

Vorlesung Approximationsalgorithmen (Winter 2017/18)

Aufgabe 1 – Faktor-h-Approximation für ungewichtetes SET COVER

Gegeben sei eine ungewichtete SET COVER-Instanz $(U, \mathcal{S})$, bei der jedes Element aus U in höchstens h Mengen aus $\mathcal{S}$ enthalten ist. Wir bezeichnen h als *Häufigkeit*. (Für Häufigkeit $h = 2$ erhalten wir VERTEXCOVER.)

Wir betrachten nun den folgenden iterativen Algorithmus:

Algorithmus 1 : SimpleGreedySetCover(U, $\mathcal{S}$)

$\mathcal{S}' \leftarrow \emptyset$
while $U \neq \emptyset$ **do**
  markiere beliebiges Element $u \in U$
  $\mathcal{R} \leftarrow \{S \in \mathcal{S} \mid u \in S\}$
  $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \cup \mathcal{R}$
  $U \leftarrow U \setminus \bigcup \mathcal{R}$ // entferne alle von $\mathcal{R}$ überdeckten Elemente aus U
return $\mathcal{S}'$

Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus eine Faktor-h-Approximation liefert, was die aus der Vorlesung bekannte Faktor-2-Approximation für VERTEX COVER generalisiert. **3 Punkte**

Vorschlag: Betrachten Sie die Menge U_m der vom Algorithmus markierten Elemente und setzen Sie $|U_m|$ in Relation zu OPT.

Aufgabe 2 – FEEDBACK VERTEX SET auf Turniergraphen

Ein *Turniergraph* ist ein gerichteter Graph $G = (V, E)$, der für jedes Paar von Knoten $u \neq v$ genau eine der Kanten (u, v) und (v, u) enthält. Das Problem FEEDBACK VERTEX SET sucht nach einer kleinsten Knotenmenge, deren Entfernung aus G zu einem azyklischen Graphen führt.

Zeigen Sie, dass es einen Faktor-3-Approximationsalgorithmus für FEEDBACK VERTEX SET auf Turniergraphen gibt.

Vorschlag: Zeigen Sie, dass es ausreicht alle Kreise der Länge drei zu zerstören. Entwickeln Sie dann eine approximationserhaltende Reduktion auf SET COVER mit Häufigkeit $h = 3$ (siehe Aufgabe 1). **7 Punkte**

Aufgabe 3 – SENDER-EMPFÄNGER

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Kantenkosten $c \colon E \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Außerdem sind disjunkte Knotenmengen S und R gegeben, die wir *Sender* bzw. *Empfänger* nennen. Das Problem SENDER-EMPFÄNGER sucht einen kostengünstigsten Teilgraphen von G, so dass jeder Empfänger mit mindestens einem Sender durch einen Pfad verbunden ist.

Vorschlag: Führen Sie einen neuen Knoten ein, den Sie durch null-gewichtete Kanten in geeigneter Weise mit G verbinden. Die Verwendung einer approximationserhaltenden Reduktion kann die Lösungen von Teilaufgabe a) und c) deutlich vereinfachen.

a) Zeigen Sie, dass sich das Problem in Polynomialzeit *exakt* lösen lässt, wenn $S \cup R = V$ gilt.
5 Punkte

b) Zeigen Sie, dass die allgemeine Version des Problems NP-schwer ist, d. h., wenn auch $R \cup S \neq V$ zugelassen ist. **3 Sonderpunkte**

c) Geben Sie einen Faktor-2-Approximationsalgorithmus für die allgemeine Version des Problems an. **5 Punkte**