Lehrstuhl für Informatik I
Effiziente Algorithmen und
wissensbasierte Systeme
Universität Würzburg

Würzburg, den 24.10.2017

Prof. Dr. Alexander Wolff
Dr. Joachim Spoerhase
B. Sc. Moritz Beck

2. Übungsblatt

Vorlesung Approximationsalgorithmen (Winter 2017/18)

Aufgabe 1 – Greedy für VERTEXCOVER

Der vielleicht erste Ansatz, den man versucht, um einen (Approximations-)Algorithmus für ein Optimierungsproblem zu finden, ist die Greedy-Strategie. Für die (ungewichtete) Version von VERTEXCOVER könnte ein Greedy-Algorithmus iterativ einen Knoten v maximalen Grades zur Knotenüberdeckung hinzufügen und v und die zu v inzidenten Kanten anschließend aus dem Graphen löschen.

a) Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus eine Approximationsgüte von $O(\log n)$ hat, wobei n die Anzahl der Knoten ist.

   Hinweis: Siehe Analyse des Greedy-Algorithmus für SETCOVER. **8 Punkte**

b) Geben Sie eine unendliche Menge von Beispielen an, bei denen dieser Algorithmus eine Güte von $\Omega(\log n)$ hat. **8 Sonderpunkte**

Aufgabe 2 – MAXIMUM k-COVERAGE

In dieser Aufgabe untersuchen wir das MAXIMUM k-COVERAGE-Problem, das eine Variante des aus der Vorlesung bekannten SET COVER-Problems ist. Gegeben sei eine Menge U, eine Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen von U, und eine natürliche Zahl k. Das Problem MAXIMUM k-COVERAGE sucht eine Teilmenge $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ mit $|S'| = k$, so dass die Anzahl $|\bigcup \mathcal{S}'|$ der mittels $\mathcal{S}'$ überdeckten Elemente maximiert wird.

Wir betrachten für dieses Problem einen Greedy-Algorithmus, der iterativ wie folgt vorgeht: wähle in jeder Iteration diejenige Menge aus $\mathcal{S}$, die die meisten noch nicht überdeckten Elemente enthält. Nach k Iterationen gibt der Algorithmus die Menge der so gewählten Mengen zurück.

Im Folgenden analysieren wir die Qualität dieses Algorithmus. Sei dabei ALG_i die Anzahl der Elemente, die von den bis einschließlich Schritt $i \in \{1, \dots, k\}$ gewählten Mengen überdeckt werden. Wir setzen $\mathrm{ALG}_0 = 0$. Die Anzahl der insgesamt, also nach k Iterationen, überdeckten Elemente ist dem entsprechend ALG_k.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ALG}_1 \geq \frac{1}{k} \cdot \mathrm{OPT}$, d.h. dass der Greedy-Algorithmus mit seiner Wahl im ersten Schritt mindestens $\frac{1}{k} \cdot \mathrm{OPT}$ Elemente überdeckt. **3 Punkte**

b) Zeigen Sie mittels Induktion, dass für jedes $i \in \{0, \dots, k\}$ gilt: $\mathrm{OPT} - \mathrm{ALG}_i \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^i \cdot \mathrm{OPT}$.

   Hinweis: Benutzen Sie, dass es zu Beginn der Iteration i mindestens $\mathrm{OPT} - \mathrm{ALG}_{i-1}$ viele noch unüberdeckte Elemente in der optimalen Lösung gibt. **7 Punkte**

c) Zeigen Sie, dass der gegebene Greedy-Algorithmus eine Güte von $\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 0.63$ hat.

   Hinweis: Verwenden Sie dafür die Ungleichung $\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \leq \frac{1}{e}$. **2 Punkte**

Abgabe bis Mittwoch, 08.11.2015, vor der Vorlesung.