Kapitel 1

Punktfolgen

1.1 Definition und Beispiele

Definition 1.1.1 *f heißt reelle Folge, falls f eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ ist.*

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & f(n) \end{cases}$$

Eine übliche Schreibweise für Folgen ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $(f(n) = a_n)$
Wir vereinbaren folgende Notationen: $\mathbb{N} := \{1; 2; \ldots\}$; $\mathbb{N}_0 := \{0; 1; 2; \ldots\}$

Beispiel 1.1.2 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt arithmetische Folge, falls für die Folgenglieder gilt: $a_n = a + n \cdot d$, dabei sind $a, d \in \mathbb{R}$ fest gewählt.*

Beispiel 1.1.3 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt geometrische Folge, falls für die Folgenglieder gilt: $a_n = c \cdot q^n$, dabei sind $c, q \in \mathbb{R}; c \neq 0$ fest gewählt.*

Beispiel 1.1.4 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt alternierende Folge, falls für die Folgenglieder gilt: $a_n = (-1)^n \cdot c_n$ oder $a_n = (-1)^{n+1} \cdot c_n$,
dabei ist stets $c_n > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 1.1.5 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konstante Folge, falls für die Folgenglieder gilt: $a_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 1.1.6 *Eine Folge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ heißt Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
falls $n_j < n_{j+1} \;\; \forall j \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 1.1.7 *Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > N_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

1.2 Konvergenz

Die wichtigste Frage, die man an eine Folge in der Analysis stellt, ist:
Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$?
Dabei versteht man unter Konvergenz gegen a, dass sich die Folgenglieder a_n, wenn man nur lange genug wartet, vom Wert a beliebig wenig unterscheiden.
Wir präzisieren das in mathematischer Fachsprache:

Definition 1.2.1 *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:*

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Als Schreibweise für eine konvergente Folge verwenden wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht, so nennt man sie eine divergente Folge.

Definition 1.2.2 *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, falls gilt:*

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \ \exists \varepsilon > 0\ \ \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \exists n > N_\varepsilon : |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Dabei unterscheidet man noch, ob eine Folge bestimmt oder unbestimmt divergiert.

Definition 1.2.3 *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt nach $+\infty$, falls gilt:*

$$\forall M > 0\ \ \exists N_M \in \mathbb{N}\ \forall n > N_M : a_n > M$$

Definition 1.2.4 *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt nach $-\infty$, falls gilt:*

$$\forall m < 0\ \ \exists N_m \in \mathbb{N}\ \forall n > N_M : a_n < m$$

Definition 1.2.5 *Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert unbestimmt, falls sie weder konvergiert noch bestimmt divergiert.*

Definition 1.2.6 *Eine gegen 0 konvergierende Folge heißt Nullfolge.*

Beispiel 1.2.7 *Bekannte Grenzwerte:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1 \;\; (b > 0)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ *(Man beachte hier den simultanen Grenzwertvorgang !)*
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ *(Auch hier ist der Grenzübergang simultan.)*
5. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Leftrightarrow |q| < 1$

Lemma 1.2.8 *Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert, so ist dieser eindeutig.*

Lemma 1.2.9 *Jede Teilfolge $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist selber konvergent und die beiden Grenzwerte stimmen überein.*

$$\lim_{j\to\infty} (a_{n_j}) = \lim_{n\to\infty} (a_n)$$

Lemma 1.2.10 *Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*