Punktfolge: kurz nachgedacht 2

Gegeben sei die konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a_n > c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie (eventuell mit Widerspruchsbeweis): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq c$

Lösung:

Nach Definition einer konvergenten Folge gilt:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon : \quad |a_n - a| < \varepsilon$

$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Annahme: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n < c \Leftrightarrow c - a > 0$
Wir betrachten ein spezielles $\varepsilon_0 := \dfrac{c-a}{2} > 0$.
Zu diesem ε_0 gibt es ein N_{ε_0}, so dass für alle $n > N_{\varepsilon_0}$ gilt:
$a - \varepsilon_0 < a_n < a + \varepsilon_0 = a + \dfrac{c-a}{2} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a}{2} \overset{Ann.}{<} \dfrac{c}{2} + \dfrac{c}{2} = c$
Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass für alle $n \in \mathbb{N} : a_n > c$.