Punktfolge: kurz nachgedacht 1

Beweisen Sie per Definition, dass die Punktfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{3n+4}{5n+6}$ gegen $a = \dfrac{3}{5}$ konvergiert.

Lösung:

Nach Definition gilt es zu zeigen:

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon.$

Wir vereinfachen den Term $|a_n - a|$ algebraisch:

$$\begin{aligned}
|a_n - a| &= \left|\frac{3n+4}{5n+6} - \frac{3}{5}\right| \\
&= \left|\frac{(3n+4)\cdot 5 - 3\cdot(5n+6)}{5\cdot(5n+6)}\right| \\
&= \left|\frac{15n+20-15n-18}{5\cdot(5n+6)}\right| \\
&= \left|\frac{2}{5\cdot(5n+6)}\right| \\
&= \frac{2}{5\cdot(5n+6)}
\end{aligned}$$

Nun versuchen wir von der Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ auf das passende N_ε zu schließen.

$$\begin{array}{rccc}
 & |a_n - a| & < & \varepsilon \\
\Leftrightarrow & \dfrac{2}{5\cdot(5n+6)} & < & \varepsilon \\
\overset{(1)}{\Leftrightarrow} & \dfrac{2}{\varepsilon} & < & 25n+30 \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{25}\cdot(\dfrac{2}{\varepsilon} - 30) & < & n
\end{array}$$

Da wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt hatten, können wir folgern:

Bei fest vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $N_\varepsilon := \max(\lfloor \frac{1}{25}\cdot(\frac{2}{\varepsilon} - 30)\rfloor + 1; 1)$.

Dann gilt für alle $n > N_\varepsilon > \dfrac{1}{25}\cdot(\dfrac{2}{\varepsilon} - 30)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

(zu (1): Hier liegt eine Äquivalenzumformung vor, da sowohl $\varepsilon > 0$ als auch $25n + 30 > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.)