Punktfolge: Übungsaufgabe 2

Sei $q \in \mathbb{R}$ fest gegeben.
Für das Konvergenzverhalten der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := q^n$ zeige man:
(1) Falls $q > 1 \Rightarrow$ Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.
(2) Falls $q = 1 \Rightarrow$ Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.
(3) Falls $|q| < 1 \Rightarrow$ Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert; $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
(4) Falls $q \leq -1 \Rightarrow$ Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert unbestimmt.

Lösung:

(1) Da $q > 1$ existiert $r > 0$ mit $q = 1 + r$.
Mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung können wir abschätzen:
$\forall n \in \mathbb{N} : q^n = (1 + r)^n \geq 1 + nr$
Zu zeigen ist für bestimmte Divergenz nach $+\infty$ per Definition:
$\forall M > 0\ \exists N_M \in \mathbb{N}\ \forall n > N_M : q^n > M$
$1 + nr > M \Leftrightarrow n > \frac{M-1}{r}$
Mit $N_M := \lfloor \frac{M-1}{r} \rfloor + 1$ gilt die Behauptung.

(2) $q = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : q^n = 1^n = 1$
Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine konstante Folge; $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

(3a) $q = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : q^n = 0^n = 0$
Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine konstante Folge; $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

(3b) $|q| < 1 \wedge q \neq 0$
Wir betrachten die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \left|\frac{1}{q^n}\right|$.
Aus $|q| < 1 \wedge q \neq 0$ folgt, dass $\left|\frac{1}{q^n}\right| = \left|\frac{1}{q}\right|^n > 1$ und wir wissen nach (1), dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt nach $+\infty$ divergiert.
Deshalb konvergiert die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
(Zu $\varepsilon > 0$ konstruiere man $M := \frac{1}{\varepsilon} > 0$.
Dann gibt es $N_M \in \mathbb{N} : \forall n > N_M : (b_n > M \Leftrightarrow \left|\frac{1}{q^n}\right| > M \Leftrightarrow |q^n| < \frac{1}{M} = \varepsilon)$

(4a) $q = -1$
Die Teilfolge $(q^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konstant 1; die Teilfolge $(q^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist konstant -1.
Daher ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent.

(4b) $q < -1 \Rightarrow \exists c > 1 : q = (-1) \cdot c$
Wir betrachten zwei Teilfolgen von $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) $(q^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$; $q^{2k} = ((-1) \cdot c)^{2k} = (-1)^{2k} c^{2k} = c^{2k} = (c^2)^k$
Da $c > 1 \Rightarrow c^2 > 1$ und wir können (1) auf $q = c^2$ anwenden.
Also divergiert die Teilfolge $(q^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$.

(ii) $(q^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$; $q^{2k+1} = ((-1) \cdot c)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} c^{2k+1} = (-1)c^{2k} = (-1)(c^2)^k$
Da $c > 1 \Rightarrow c^2 > 1$ und wir können (1) auf $q = c^2$ anwenden.
Also divergiert die Teilfolge $(q^{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $-\infty$.