Punktfolge: Übungsaufgabe 1

Gegeben sei die durch

$$a_n = \frac{(\sin(n))^3 + 3\cos(n)}{\sqrt{n}}, \ n \geq 1$$

definierte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$.
Bestimmen Sie eine reelle Zahl a und eine natürliche Zahl N_ε, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } \ n \geq N_\varepsilon$$

Lösung:

Zunächst gilt es die richtige Vermutung für a zu formulieren.
Dabei arbeiten wir nicht direkt mit der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, sondern schätzen die Folgenglieder geeignet ab.
Mit der Dreiecksabschätzung und den Rechenregeln für Beträge gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$|(\sin(n))^3 + 3\cos(n)| \leq |(\sin(n))^3| + |3\cos(n)| = |\sin(n)|^3 + 3|\cos(n)| \leq 1^3 + 3 \cdot 1 = 4$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq |\frac{4}{\sqrt{n}}| = \frac{4}{\sqrt{n}}$

Außerdem wissen wir:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0.$
Daher vermuten wir $a = 0$.
Jetzt suchen wir N_ε, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt: $\frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.
Denn für dieses N_ε gilt dann auch $|a_n| < \varepsilon$.

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{4}{\sqrt{n}} & < & \varepsilon \\ \Leftrightarrow & 4 & < & \varepsilon \cdot \sqrt{n} \\ \Leftrightarrow & \frac{4}{\varepsilon} & < & \sqrt{n} \\ \Leftrightarrow & \frac{16}{\varepsilon^2} & < & n \end{array}$$

Nach diesen Vorüberlegungen behaupten und beweisen wir nun:

Mit $a = 0$ und $N_\varepsilon = \lfloor \frac{16}{\varepsilon^2} \rfloor + 1$ gilt für alle $n \geq N_\varepsilon$:

$|a_n - a| = |a_n - 0| = |a_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$