**Frühjahr 2014 - Thema 3 - Aufgabe 2**

Betrachtet wird die rekursiv definierte Folge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}};\ f_1 = f_2 = 1;\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}\ (n \geq 2)$$

a) Beh: $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \geq \frac{4}{9} \cdot (\frac{3}{2})^n$ Bew: vollständige Induktion nach $n$.
Induktionsbeginn:

$$n = 1 : f_1 = 1 > \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1$$

$$n = 2 : f_2 = 1 \geq 1 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Induktionsannahme:

$$\exists n \in \mathbb{N}; n \geq 2\ \ \forall k \leq n : f_k \geq \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k,$$

Induktionsschluss: $n \to n+1$

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &\geq \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3}{2} + 1\right) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{5}{2} \\ &\geq \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{9}{4} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

b) Beh: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. $a_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k}{f_{k+1}}$.
Bew:

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{f_{k+1}} = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}{f_2 \cdot f_3 \cdots f_{n+1}} = \frac{f_1}{f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n+1}} \overset{a)}{\leq} \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

Außerdem gilt $(f_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N})$
Insgesamt:

$$\begin{array}{rccccc} & 0 & < & a_n & \leq & \frac{9}{4} \cdot (\frac{2}{3})^{n+1} \\ \Rightarrow & \lim\limits_{n\to\infty} 0 & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} a_n & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{9}{4} \cdot (\frac{2}{3})^{n+1}\right) \\ \Rightarrow & 0 & \leq & \lim\limits_{n\to\infty} a_n & \leq & \frac{9}{4} \cdot 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ c) Beh: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k}$ konvergiert.

Bew: Die Reihe konvergiert, denn alle Summanden sind positiv und die Reihe hat die konvergente Majorante $\frac{9}{4} \cdot (\frac{2}{3})^k$. Da $\frac{2}{3} < 1$ liegt eine geometrische Reihe als Majorante vor.