1.5 Grenzwertsätze

Folgende Rechenregeln für Grenzwerte helfen uns bei schwierigeren Grenzwerten weiter:
Es werden im weiteren immer die konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Es gilt:
a) Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n + b_n$ konvergiert; für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$$

Der Grenzwert der Summe ist also die Summe der Grenzwerte, Summation und Grenzwertbildung sind vertauschbar.
b) Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := a_n - b_n$ konvergiert; für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$$

Der Grenzwert der Differenz ist also die Differenz der Grenzwerte, Subtraktion und Grenzwertbildung sind vertauschbar.
c) Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n := a_n \cdot b_n$ konvergiert; für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$$

Der Grenzwert des Produktes ist also das Produkt der Grenzwerte, Multiplikation und Grenzwertbildung sind vertauschbar.
d) Ist $b \neq 0$, dann sind alle Folgenglieder b_n ab einem gewissen N ebenfalls ungleich 0. Dann gilt:
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := \dfrac{a_n}{b_n}$ konvergiert und für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Der Grenzwert des Quotienten ist also der Quotient der Grenzwerte, Division und Grenzwertbildung sind vertauschbar.
e) Gilt ab einem gewissen Index $N \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \ \ \forall n \geq N$, dann gilt auch $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
f) Falls sich zu einer Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Konvergenz noch untersucht werden soll, zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren lassen mit den Eigenschaften $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n > N$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, dann gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Insbesondere konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(Man nennt diese Aussage auch Quetschlemma oder Schrankenlemma.)