Grenzwertsätze: kurz nachgedacht 3

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Hinweis: Sie dürfen folgenden Grenzwert unbewiesen benutzen:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

Lösung:

Um den Hinweis einsetzen zu können, logarithmieren wir den gesuchten Grenzwert.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\right) &\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(\cos\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln(\cos(\tfrac{1}{\sqrt{n}}))\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(\cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))}{(\frac{1}{\sqrt{n}})^2}\right)\\
&\overset{(2)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\ln(\cos(t))}{t^2}\\
&= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{-\frac{1}{2}}$

zu (1): Da die Logarithmusfunktion stetig ist, dürfen Funktionswertbildung und Grenzwertbildung vertauscht werden.

zu(2) Wir substituieren: $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = t$; $\;(n\to\infty \Leftrightarrow t\to 0)$.