Grenzwertsätze: kurz nachgedacht 2

Beweisen Sie, dass die Punktfolge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)n^{n+1}}$$

konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Lösung:

Wir beschreiben die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ als das Produkt zweier Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$:

$$b_n := \frac{2n^2+1}{(3n+1)\cdot n}; \quad c_n := \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

Wenn beide Folgen konvergieren, dann auch ihr Produkt.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{(3n+1)\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} \overset{GWR}{=} \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Also konvergieren beide Folgen und für $(a_n)_{n\geq 1}$ gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n \cdot c_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{2}{3} \cdot e.$